УДК 621.391.26

ОТСЧЁТНЫЕ ФУНКЦИИ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА*

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, А. В. Торгов

Учреждение Российской академии наук
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su
torgov@iae.nsk.su

Получены соотношения для отсчётных функций при неравномерной дискретизации тригонометрического полинома и его производных.

Ключевые слова: отсчётная функция, неравномерная дискретизация, периодический сигнал, теорема отсчётов, ряд Фурье.

Введение. При решении многих практических задач возникает необходимость в аналитическом описании сигнала по совокупности его неравномерных данных. В предлагаемой работе в качестве описания сигнала используется его представление в виде периодической функции. Рассматривается интерполяция периодического сигнала по неравномерной последовательности отсчётов сигнала $\{f^{(0)}(t_r)\}$ $(r = \overline{0, N-1})$, по неравномерной последовательности синхронных отсчётов сигнала и его первой производной $\{f^{(0)}(t_r), f^{(1)}(t_r)\}$ $(r = \overline{0, N-1})$ и по неравномерной последовательности синхронных отсчётов сигнала и его первой и второй производных $\{f^{(0)}(t_r), f^{(1)}(t_r), f^{(2)}(t_r)\}$ $(r = \overline{0, N-1})$. В первом случае абсциссы отсчётов расположены на периоде $T = N\Delta$, при этом $-0{,}5N\Delta \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} \le 0{,}5N\Delta$, во втором и третьем случаях — на периодах $-N\Delta \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} \le N\Delta$ и $-1{,}5N\Delta \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} \le 1{,}5N\Delta$ соответственно.

Интерполяционные формулы (теоремы отсчётов) имеют следующий вид:

$$f(t) = \sum_{r=0}^{N-1} f^{(0)}(t_r) w_{0r}(t - t_r), \qquad (1)$$

$$f(t) = \sum_{r=0}^{N-1} (f^{(0)}(t_r) w_{10r}(t - t_r) + f^{(1)}(t_r) w_{11r}(t - t_r)), \qquad (2)$$

$$f(t) = \sum_{r=0}^{N-1} (f^{(0)}(t_r) w_{20r}(t - t_r) + f^{(1)}(t_r) w_{21r}(t - t_r) + f^{(2)}(t_r) w_{22r}(t - t_r)). \qquad (3)$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00458), Президиума Российской академии наук (программа № 228/2009 г.) и Президиума Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 71/2009 г.).

Далее находятся аналитические соотношения для отсчётных функций из выражений (1)–(3). Для описания сигнала используется традиционный базис $\left(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\ \sin\frac{\pi}{T}2kt\right)$ и базис с синусом половинного угла $\left(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\ \sin\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right)$ [1].

1. Отсчётные функции при неравномерной дискретизации сигнала и использовании базиса $\left(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\ \sin\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right)$. При нечётном числе отсчётов ($N = 2M+1$) определитель системы линейных уравнений, связывающих значения отсчётов и их разложение, имеет вид

$$\Delta_{(2M+1)} = \begin{vmatrix} 1 & \sin\frac{\pi}{(2M+1)\Delta}t_0 & \cos\frac{2\pi}{(2M+1)\Delta}t_0 & \sin\frac{3\pi}{(2M+1)\Delta}t_0 & \cos\frac{4\pi}{(2M+1)\Delta}t_0 & \cdots & \sin\frac{(2M-1)\pi}{(2M+1)\Delta}t_0 & \cos\frac{2M\pi}{(2M+1)\Delta}t_0 \\ 1 & \sin\frac{\pi}{(2M+1)\Delta}t_1 & \cos\frac{2\pi}{(2M+1)\Delta}t_1 & \sin\frac{3\pi}{(2M+1)\Delta}t_1 & \cos\frac{4\pi}{(2M+1)\Delta}t_1 & \cdots & \sin\frac{(2M-1)\pi}{(2M+1)\Delta}t_1 & \cos\frac{2M\pi}{(2M+1)\Delta}t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin\frac{\pi}{(2M+1)\Delta}t_{2M} & \cos\frac{2\pi}{(2M+1)\Delta}t_{2M} & \sin\frac{3\pi}{(2M+1)\Delta}t_{2M} & \cos\frac{4\pi}{(2M+1)\Delta}t_{2M} & \cdots & \sin\frac{(2M-1)\pi}{(2M+1)\Delta}t_{2M} & \cos\frac{2M\pi}{(2M+1)\Delta}t_{2M} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Очевидно, что отсчётная функция $w_{0r}(t-t_r)$ находится из соотношения

$$w_{0r}(t-t_r) = \Delta^r_{(2M+1)}/\Delta_{(2M+1)}, \tag{5}$$

где определитель $\Delta^r_{(2M+1)}$ получается из (4), если в последнем строка

$$\left(1\quad \sin\frac{\pi}{(2M+1)\Delta}t_r\quad \cos\frac{2\pi}{(2M+1)\Delta}t_r\quad \sin\frac{3\pi}{(2M+1)\Delta}t_r\quad \cos\frac{4\pi}{(2M+1)\Delta}t_r\quad \cdots\quad \sin\frac{(2M-1)\pi}{(2M+1)\Delta}t_r\quad \cos\frac{2M\pi}{(2M+1)\Delta}t_r\right)$$

с временем t_r заменяется строкой с временем t:

$$\left(1\quad \sin\frac{\pi}{(2Mv+1)\Delta}t\quad \cos\frac{2\pi}{(2M+1)\Delta}t\quad \sin\frac{3\pi}{(2M+1)\Delta}t\quad \cos\frac{4\pi}{(2M+1)\Delta}t\quad \cdots\quad \sin\frac{(2M-1)\pi}{(2M+1)\Delta}t\quad \cos\frac{2M\pi}{(2M+1)\Delta}t\right).$$

Поэтому для определения отсчётной функции $w_{0r}(t-t_r)$ достаточно вычислить $\Delta_{(2M+1)}$, а затем заменить t_r абсциссой t.

Перед вычислением определителя (4) заменим элементы всех столбцов, начиная с третьего, эквивалентными соотношениями ([2], формулы A(3.171), A(3.172)):

$$\cos 2sX = 1 + \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \frac{\prod_{m=1}^{k} (4s^2-(2m-1)^2)}{(2k)!} \sin^{2k} X, \quad s \geq 1;$$
$$\sin(2s-1)X = (2s-1)\sin X \Big(1 + \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \frac{\prod_{m=1}^{k} ((2s-1)^2-(2m-1)^2)}{(2k-1)!} \sin^{2k} X\Big), \quad s \geq 2. \tag{6}$$

Затем вычтем из всех строк определителя (4) порядка $2M+1$ первую строку и, используя соотношение

$$\sin px - \sin py = (\sin x - \sin y) \sum_{k=1}^{p} \sin^{p-k} x \cdot \sin^{k-1} y, \tag{7}$$

вынесем из нового определителя порядка $2M$ множитель $\prod\limits_{r=1}^{2M} \Big(\sin \frac{\pi}{(2M+1)\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{(2M+1)\Delta} t_0\Big)$. После этого все элементы первого столбца нового определителя становятся равными единице. На следующем шаге вычтем из всех строк определителя порядка $2M$ первую строку. Снова используем соотношение (7) и вынесем из полученного определителя порядка $2M-1$ множитель, пропорциональный величине $\prod\limits_{r=2}^{2M} \Big(\sin \frac{\pi}{(2M+1)\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{(2M+1)\Delta} t_1\Big)$. Повторяя последовательно вышеописанную процедуру, получим, что значение определителя пропорционально величине

$$\Delta_{(2M+1)} = C_{(2M+1)} \prod_{(2M+1)\geq r > k \geq 0} \Big(\sin \frac{\pi}{(2M+1)\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{(2M+1)\Delta} t_k\Big), \tag{8}$$

где константа $C_{(2M+1)} = 2^{(M-1)(2M-3)}$. Соотношение (8) справедливо и для чётного числа неравномерных отсчётов $N = 2M$. При этом константа $C_{2M} = 2^{(M-1)(2M-1)}$, а в определителе (4) отсутствуют последний столбец и последняя строка. Значение определителя при этом

$$\Delta_{2M} = C_{2M} \prod_{2M \geq r > k \geq 0} \Big(\sin \frac{\pi}{2M\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{2M\Delta} t_k\Big). \tag{9}$$

Используя далее соотношение (5), получим, что отсчётные функции $w_{0r}(t-t_r)$ для нечётного ($N = 2M+1$) и чётного ($N = 2M$) чисел отсчётов находятся из соотношения

$$w_{0r}(t-t_r) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta} t - \sin \frac{\pi}{N\Delta} t_k}{\sin \frac{\pi}{N\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{N\Delta} t_k}. \tag{10}$$

2. Отсчётные функции при неравномерной дискретизации сигнала и использовании базиса $\left(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\ \sin\frac{\pi}{T}2kt\right)$. В работе [3], исходя из теоремы отсчётов при периодически неравномерной дискретизации сигнала с ограниченным спектром [4], получены следующие соотношения для отсчётных функций:

$$w_{0r}(t-t_r)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{2M}\frac{\sin\frac{\pi}{(2M+1)\Delta}(t-t_k)}{\sin\frac{\pi}{(2M+1)\Delta}(t_r-t_k)}\tag{11}$$

при нечётном числе отсчётов $(N=2M+1)$ и

$$w_{0r}(t-t_r)=\cos\frac{\pi}{2M\Delta}(t-t_r)\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{2M-1}\frac{\sin\frac{\pi}{2M\Delta}(t-t_k)}{\sin\frac{\pi}{2M\Delta}(t_r-t_k)}\tag{12}$$

при чётном числе отсчётов $(N=2M)$.

Дальнейшие исследования показали, что формула (11) верна при любом расположении абсцисс отсчётов внутри интервала $-0{,}5(2M+1)\Delta\leq t\leq 0{,}5(2M+1)\Delta$ [5]. Что касается формулы (12), то она справедлива, если середина периода сигнала совпадает со средним арифметическим абсцисс отсчётов, т. е. когда

$$\sum_{k=0}^{2M-1}t_k=0.\tag{13}$$

Для произвольного расположения абсцисс отсчётов вычислен соответствующий определитель порядка $2M\times 2M$:

$$\Delta_{2M}=\begin{vmatrix}1 & \sin\frac{\pi}{M\Delta}t_0 & \cos\frac{\pi}{M\Delta}t_0 & \sin\frac{2\pi}{M\Delta}t_0 & \cos\frac{2\pi}{M\Delta}t_0 & \cdots & \sin\frac{M\pi}{M\Delta}t_0\\ 1 & \sin\frac{\pi}{M\Delta}t_1 & \cos\frac{\pi}{M\Delta}t_1 & \sin\frac{2\pi}{M\Delta}t_1 & \cos\frac{2\pi}{M\Delta}t_1 & \cdots & sin\frac{M\pi}{M\Delta}t_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \sin\frac{\pi}{M\Delta}t_{2M-1} & \cos\frac{\pi}{M\Delta}t_{2M-1} & \sin\frac{2\pi}{M\Delta}t_{2M-1} & \cos\frac{2\pi}{M\Delta}t_{2M-1} & \cdots & \sin\frac{M\pi}{M\Delta}t_{2M-1}\end{vmatrix}.$$

Вычисление этого определителя, как и определителя (4), базируется на последовательном вычитании первой строки из всех остальных на каждом шаге понижения порядка определителя и вынесении соответствующего множителя. На первом шаге этот множитель равен

$$2^{2M-1}\prod_{r=1}^{2M-1}\sin\frac{\pi}{2M\Delta}(t_r-t_0).$$

На следующих шагах вычисления становятся более громоздкими, но в конечном итоге искомый определитель выражается как

$$\Delta_{2M}=2^{M(2M-1)}\cos\frac{\pi}{2M\Delta}\sum_{k=0}^{2M-1}t_k\prod_{2M-1\geq r>k\geq 0}\sin\frac{\pi}{2M\Delta}(t_r-t_k).$$

Из этого соотношения вытекает, что (см. выражение (5)) отсчётная функция

$$w_{0r}(t-t_r)=\frac{\cos\frac{\pi}{N\Delta}\left(t+\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}t_k\right)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}\sum\limits_{k=0}^{N-1}t_k}\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_k)}{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t_r-t_k)}. \qquad (14)$$

Очевидно, что

$$\cos\frac{\pi}{N\Delta}\left(t+\sum_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}t_k\right)=\cos\frac{\pi}{N\Delta}\left(t-t_r+\sum_{k=0}^{N-1}t_k\right).$$

Поэтому если сумма (13) равна нулю, то соотношение (14) для отсчётной функции совпадает с соотношением (12) для чётного числа отсчётов ($N=2M$).

3. Отсчётные функции при синхронизированной неравномерной дискретизации сигнала и его производной для базиса $\left(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\ \sin\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right)$. Нахождение соотношений для отсчётных функций $w_{10r}(t-t_r)$ и $w_{11r}(t-t_r)$ с помощью определителей оказывается весьма трудоёмким. Целесообразно применить метод, использованный при получении соответствующей теоремы отсчётов для сигнала со спектром, ограниченным частотой π/Δ [6]. Для этого построим на основании формулы (10) теорему отсчётов для последовательности $2N$ отсчётов сигнала с абсциссами в точках $-0{,}5N\Delta \le t_0-\tau/2 < t_0+\tau/2 < t_1-\tau/2 < t_1+\tau/2 < \ldots < t_{N-1}-\tau/2 < t_{N-1}+\tau/2 \le 0{,}5N\Delta$:

$$f(t)=\sum_{r=0}^{N-1}\left(f^{(0)}\Big(t_r-\frac{\tau}{2}\Big)w_{-r}\Big(t-t_r+\frac{\tau}{2}\Big)+f^{(0)}\Big(t_r+\frac{\tau}{2}\Big)w_{+r}\Big(t-t_r-\frac{\tau}{2}\Big)\right), \qquad (15)$$

где

$$w_{-r}\Big(t-t_r+\frac{\tau}{2}\Big)=\frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r+\frac{\tau}{2}\Big)}{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r-\frac{\tau}{2}\Big)-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r+\frac{\tau}{2}\Big)}\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_k-\frac{\tau}{2}\Big)\right)\left(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_k+\frac{\tau}{2}\Big)\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r-\frac{\tau}{2}\Big)-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_k-\frac{\tau}{2}\Big)\right)\left(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r-\frac{\tau}{2}\Big)-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_k+\frac{\tau}{2}\Big)\right)},$$

$$w_{+r}\Big(t-t_r-\frac{\tau}{2}\Big)=\frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r-\frac{\tau}{2}\Big)}{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r+\frac{\tau}{2}\Big)-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r-\frac{\tau}{2}\Big)}\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_k-\frac{\tau}{2}\Big)\right)\left(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_k+\frac{\tau}{2}\Big)\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r+\frac{\tau}{2}\Big)-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_k-\frac{\tau}{2}\Big)\right)\left(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_r+\frac{\tau}{2}\Big)-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t_k+\frac{\tau}{2}\Big)\right)}.$$

Затем, как и в [6], введём новые переменные

$$f^{(0)}(t_r) = \frac{1}{2}\Big(f^{(0)}\Big(t_r + \frac{\tau}{2}\Big) + f^{(0)}\Big(t_r - \frac{\tau}{2}\Big)\Big),$$

$$f^{(1)}(t_r) = \frac{1}{\tau}\Big(f^{(0)}\Big(t_r + \frac{\tau}{2}\Big) - f^{(0)}\Big(t_r - \frac{\tau}{2}\Big)\Big) \quad (r = \overline{0, N-1}).$$

При $\tau \to 0$ величины $f^{(0)}(t_r)$ и $f^{(1)}(t_r)$ стремятся к значениям сигнала и его производной при $t = t_r$. Решая эти уравнения относительно величин $f^{(0)}(t_r + \tau/2)$ и $f^{(0)}(t_r - \tau/2)$, подставляя полученные значения в (15) и группируя слагаемые при новых переменных $f^{(0)}(t_r)$ и $f^{(1)}(t_r)$, придём к соотношениям для отсчётных функций из (2):

$$\begin{aligned} w_{10r}(t - t_r) &= \lim_{\tau \to 0}\Big(w_{+r}\Big(t - t_r - \tfrac{\tau}{2}\Big) + w_{-r}\Big(t - t_r + \tfrac{\tau}{2}\Big)\Big); \\ w_{11r}(t - t_r) &= \lim_{\tau \to 0}\tfrac{\tau}{2}\Big(w_{+r}\Big(t - t_r - \tfrac{\tau}{2}\Big) - w_{-r}\Big(t - t_r + \tfrac{\tau}{2}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

Произведя необходимые вычисления, будем иметь окончательный результат:

$$w_{10r}(t - t_r) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{N-1} \frac{\Big(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t - \sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_k\Big)^2}{\Big(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_r - \sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_k\Big)^2}\Big(1 + \Big(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t - \sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_r\Big)h_{1r1}\Big), \tag{17а}$$

где $h_{1r1} = -2\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{N-1} 1\Big/\Big(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_r - \sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_k\Big)$,

$$w_{11r}(t - t_r) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{N-1} \frac{\Big(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t - \sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_k\Big)^2}{\Big(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_r - \sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_k\Big)^2}\,\frac{2N\Delta}{\pi}\,\frac{\Big(\sin\frac{\pi}{2N\Delta}t - \sin\frac{\pi}{2N\Delta}t_r\Big)}{\cos\frac{\pi}{2N\Delta}t_r}. \tag{17б}$$

Данные соотношения удовлетворяют равенствам $w_{10r}(0) = 1$, $w'_{10r}(0) = 0$, $w_{11r}(0) = 0$, $w'_{11r}(0) = 1$.

4. Отсчётные функции при синхронизированной неравномерной дискретизации сигнала и его производной для базиса $\Big(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\ \sin\frac{\pi}{T}2kt\Big)$. Вычисления отсчётных функций аналогичны предыдущим. Они опираются на формулу (14) и построение на её основе отсчётных функций в теореме отсчётов, подобной (15):

$$w_{-r}\Big(t - t_r + \frac{\tau}{2}\Big) = \frac{\cos\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t - t_r + \frac{\tau}{2} + 2t_\Sigma\Big)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t - t_r - \frac{\tau}{2}\Big)}{\cos\frac{\pi}{2N\Delta}2t_\Sigma\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(-\tau)} \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t-t_k+\frac{\tau}{2}\Big)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t-t_k-\frac{\tau}{2}\Big)}{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k-\tau)}; \tag{18}$$

$$w_{+r}\Big(t-t_r-\frac{\tau}{2}\Big)=\frac{\cos\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t-t_r-\frac{\tau}{2}+2t_\Sigma\Big)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t-t_r+\frac{\tau}{2}\Big)}{\cos\frac{\pi}{2N\Delta}2t_\Sigma\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\tau}\times$$

$$\times \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t-t_k+\frac{\tau}{2}\Big)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\Big(t-t_k-\frac{\tau}{2}\Big)}{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)}.$$

Повторяя выкладки разд. 3 и осуществляя предельный переход ($\tau\to 0$) в формуле (15) для соотношений (18), придём к следующему результату:

$$w_{10r}(t-t_r)=$$

$$=\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_k)}{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)}\,\frac{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma g_{1r1}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_r+t_\Sigma)g_{1r1}}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma}, \tag{19а}$$

где $g_{1r1}=-2\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)$ [6];

$$w_{11r}(t-t_r)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_k)}{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)}\,\frac{N\Delta}{\pi}\,\frac{-\sin\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma+\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_r+t_\Sigma)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma}. \tag{19б}$$

Если выполняется условие $t_\Sigma=0$, то отсчётные функции (19а) и (19б) принимают вид

$$w_{10r}(t-t_r)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_k)}{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)}\Big(1-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_r)g_{1r1}\Big), \tag{20а}$$

$$w_{11r}(t-t_r)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_k)}{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)}\,\frac{N\Delta}{\pi}\,\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_r). \tag{20б}$$

Последние соотношения могут быть получены и из [6] после перехода от периодически неравномерной дискретизации сигнала с ограниченным частотой π/Δ спектром к периодическому сигналу. Отсчётные функции (19а), (19б), (20а) и (20б) удовлетворяют условиям $w_{10r}(0)=1$, $w'_{10r}(0)=0$, $w_{11r}(0)=0$, $w'_{11r}(0)=1$ соответственно.

5. Отсчётные функции при синхронизированной неравномерной дискретизации периодического сигнала и его двух первых производных для базиса $\left(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\ \sin\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right)$. Для определения этих функций также используем методику из [6], опираясь на формулу (10). Утроим в этой формуле число отсчётов, расположим их в моменты времени $-1{,}5N\Delta \le t_0-\tau,\ t_0,\ t_0+\tau < t_1-\tau,\ t_1,\ t_1+\tau < \ldots < t_{N-1}-\tau,\ t_{N-1},\ t_{N-1}+\tau \le 1{,}5N\Delta$ и построим интерполяционную формулу

$$f(t)=\sum_{r=0}^{N-1}\left(f^{(0)}(t_r-\tau)w_{-r}(t-t_r+\tau)+f^{(0)}(t_r)w_r(t-t_r)+f^{(0)}(t_r+\tau)w_{+r}(t-t_r-\tau)\right). \quad (21)$$

В данном соотношении отсчётные функции имеют следующий вид:

$$w_{-r}(t-t_r+\tau)=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)\right)}\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=0\\k\ne r}}^{N-1}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_k\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_k\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k+\tau)\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k+\tau)\right)},$$

$$w_r(t-t_r)=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)\right)}\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=0\\k\ne r}}^{N-1}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_k\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k+\tau)\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_k\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k+\tau)\right)},$$

$$w_{+r}(t-t_r-\tau)=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\right)}\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=0\\k\ne r}}^{N-1}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_k\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k-\tau)\right)\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_k\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k+\tau)\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r+\tau)-\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_k+\tau)\right)}.$$

Предварительные преобразования сводятся к введению новых переменных $f_1^{(0)}(t_r)$, $f^{(1)}(t_r)$ и $f^{(2)}(t_r)$, которые при $\tau \to 0$ превращаются в значения сигнала и его производных при $t = t_r$. Запишем уравнения для новых переменных:

$$f_1^{(0)}(t_r) = \frac{1}{3}(f^{(0)}(t_r - \tau) + f^{(0)}(t_r) + f^{(0)}(t_r + \tau)),$$

$$f^{(1)}(t_r) = \frac{1}{2\tau}(f^{(0)}(t_r + \tau) - f^{(0)}(t_r - \tau)),$$

$$f^{(2)}(t_r) = \frac{1}{\tau^2}(f^{(0)}(t_r - \tau) - 2f^{(0)}(t_r) + f^{(0)}(t_r + \tau)).$$

Решая эти уравнения относительно старых переменных $f^{(0)}(t_r - \tau)$, $f^{(0)}(t_r)$ и $f^{(0)}(t_r + \tau)$, будем иметь очевидные соотношения:

$$f^{(0)}(t_r - \tau) = f_1^{(0)}(t_r) - \tau f^{(1)}(t_r) + \frac{\tau^2}{6} f^{(2)}(t_r),$$

$$f^{(0)}(t_r) = f_1^{(0)}(t_r) - \frac{\tau^2}{3} f^{(2)}(t_r),$$

$$f^{(0)}(t_r + \tau) = f_1^{(0)}(t_r) + \tau f^{(1)}(t_r) + \frac{\tau^2}{6} f^{(2)}(t_r).$$

Подставляя их в соотношение (21) и группируя члены относительно новых переменных, получим формулы для определения искомых отсчётных функций из (3):

$$w_{20r}(t - t_r) = \lim_{\tau \to 0}(w_{-r}(t - t_r + \tau) + w_r(t - t_r) + w_{+r}(t - t_r - \tau));$$

$$w_{21r}(t - t_r) = \lim_{\tau \to 0} \tau(w_{+r}(t - t_r - \tau) - w_{-r}(t - t_r + \tau)); \tag{21a}$$

$$w_{22r}(t - t_r) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\tau^2}{6}(w_{-r}(t - t_r + \tau) - 2w_r(t - t_r) + w_{+r}(t - t_r - \tau)).$$

Осуществив в этих формулах предельный переход, придём к искомому результату:

$$w_{20r}(t - t_r) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t - \sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_k\right)^3}{\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r - \sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_k\right)^3} \times$$

$$\times\Bigg[1 + \frac{1}{2}\Bigg(2\cos^2\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t - \sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\right) + \sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t - \sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\right)^2\Bigg) \times$$

$$\times \frac{h_{2r1}}{\cos^2\frac{\pi}{3N\Delta}t_r} + \left(\sin\frac{\pi}{3N\Delta}t - \sin\frac{\pi}{3N\Delta}t_r\right)^2 \frac{h_{2r2}}{\cos^2\frac{\pi}{3N\Delta}t_r}\Bigg], \tag{22a}$$

где

$$h_{2r1} = -3 \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq r}}^{N-1} 1 \Big/ \Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_k \Big);$$

$$h_{2r2} = \frac{1}{2}\Big(3 \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq r}}^{N-1} 1 \Big/ \Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_k \Big) +$$

$$+ 3 \cos^2 \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq r}}^{N-1} 1 \Big/ \Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_k \Big)^2 + \cos^2 \frac{\pi}{3N\Delta} t_r h_{2r1}^2 \Big);$$

$$w_{21r}(t - t_r) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq r}}^{N-1} \frac{\Big(\sin \frac{\pi}{2N\Delta} t - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_k \Big)^3}{\Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_k \Big)^3} \times$$

$$\times \frac{3N\Delta}{\pi} \Big[2 \cos^2 \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \Big) + \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \Big)^2 +$$

$$+ 2 \cos^2 \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \Big)^2 h_{2r1} \Big] \Big/ 2 \cos^3 \frac{\pi}{3N\Delta} t_r, \qquad (22б)$$

$$w_{22r}(t - t_r) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq r}}^{N-1} \frac{\Big(\sin \frac{\pi}{2N\Delta} t - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_k \Big)^3}{\Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_k \Big)^3} \frac{1}{2} \Big(\frac{3N\Delta}{\pi} \Big)^2 \frac{\Big(\sin \frac{\pi}{3N\Delta} t - \sin \frac{\pi}{3N\Delta} t_r \Big)^2}{\cos^2 \frac{\pi}{3N\Delta} t_r}. \qquad (22в)$$

Проведя вычисления, можно убедиться, что полученные соотношения удовлетворяют равенствам $w_{20r}(0) = 1$, $w'_{20r}(0) = 0$, $w''_{20r}(0) = 0$, $w_{21r}(0) = 0$, $w'_{21r}(0) = 1$, $w''_{21r}(0) = 0$, $w_{22r}(0) = 0$, $w'_{22r}(0) = 0$, $w''_{22r}(0) = 1$.

6. Отсчётные функции при синхронизированной неравномерной дискретизации сигнала и его двух первых производных для базиса $\Big(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\ \sin\frac{\pi}{T}2kt\Big)$. В этом случае надо различать две ситуации: параметр N чётен и параметр N нечётен. При чётности N для дальнейших вычислений основой служит соотношение (14), а при нечётности N — соотношение (11). Вычисление отсчётных функций повторяет соответствующие операции в разд. 5. При чётном параметре N предварительные отсчётные функции имеют следующий вид:

$$w_{-r}(t - t_r + \tau) = \frac{\cos \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r + \tau + 3t_\Sigma) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - \tau)}{\cos \frac{\pi}{N\Delta} t_\Sigma \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(-\tau) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(-2\tau)} \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k-\tau)}{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k-\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k-2\tau)},$$

$$w_r(t-t_r) = \frac{\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r+3t_\Sigma)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r-\tau)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}\tau\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(-\tau)}\times$$

$$\times \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k-\tau)}{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k-\tau)},$$

$$w_{+r}(t-t_r+\tau) = \frac{\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r-\tau+3t_\Sigma)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}2\tau\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}\tau}\times$$

$$\times \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k-\tau)}{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k+2\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)}.$$

Подставляя эти соотношения в теорему (21) и производя необходимые вычисления в (21а), получим искомые соотношения для отсчётных функций при чётном N:

$$w_{20r}(t-t_r) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k)}{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)}\times$$

$$\times\Big(\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r)+\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r)g_{2r1}+\frac{\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r+3t_\Sigma)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma}\sin^2\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r)g_{2r2}\Big), \quad (23\text{а})$$

$$w_{21r}(t-t_r) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k)}{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)}\frac{3N\Delta}{\pi}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r)\Big(1+\frac{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r)\cdot\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r+3t_\Sigma)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma}g_{2r1}\Big), \quad (23\text{б})$$

$$w_{22r}(t-t_r) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k)}{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)}\frac{1}{2}\Big(\frac{3N\Delta}{\pi}\Big)^2\sin^2\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r)\frac{\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r+3t_\Sigma)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma}. \quad (23\text{в})$$

В этих формулах [6]

$$g_{2r1} = -3\sum_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k); \quad g_{2r2} = \frac{1}{2}\Big(3N - 2 + 3\sum_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k) + g_{2r1}^2\Big).$$

При нечётном числе отсчётов в отсчётных функциях $w_{-r}(t - t_r + \tau)$, $w_r(t - t_r)$ и $w_{+r}(t - t_r - \tau)$ следует убрать величины $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r + \tau + 3t_\Sigma)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma}$, $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r + 3t_\Sigma)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma}$ и $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - \tau + 3t_\Sigma)}{\cos\frac{\pi}{N\Delta}t_\Sigma}$ и для новых функций использовать соотношения (21) и (21а). В итоге после осуществления предельного перехода по τ будем иметь искомые формулы для отсчётных функций:

$$w_{20r}(t - t_r) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k)}{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k)} \times$$

$$\times\Big(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r) + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3N\Delta}2(t - t_r)g_{2r1} + \sin^2\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r)g_{2r2}\Big), \qquad (24а)$$

$$w_{21r}(t - t_r) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k)}{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k)}\frac{3N\Delta}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3N\Delta}2(t - t_r) + \sin^2\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r)g_{2r1}\Big), \quad (24б)$$

$$w_{22r}(t - t_r) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k)}{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k)}\frac{1}{2}\Big(\frac{3N\Delta}{\pi}\Big)^2\sin^2\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r). \qquad (24в)$$

Полученные соотношения удовлетворяют условиям $w_{20r}(0) = 1$, $w'_{20r}(0) = 0$, $w''_{20r}(0) = 0$, $w_{21r}(0) = 0$, $w'_{21r}(0) = 1$, $w''_{21r}(0) = 0$, $w_{22r}(0) = 0$, $w'_{22r}(0) = 0$, $w''_{22r}(0) = 1$.

7. Переход к равномерной дискретизации сигнала и его спектральный анализ. Для перехода к равномерной дискретизации необходимо найти, используя соотношения (1)–(3), значения сигнала $f(t)$ в равноотстоящие моменты времени. При нечётном числе отсчётов N — это значения $f(n\Delta)$, а при чётном N — $f\Big(\frac{2n-1}{2}\Delta\Big)$. Для соотношения (1) (количество вычисляемых значений равно N)

$$f(n\Delta) = \sum_{r=0}^{N-1} f^{(0)}(t_r)w_{0r}(n\Delta - t_r), \quad -\frac{N-1}{2} \le n \le \frac{N-1}{2},$$

$$f\Big(\frac{2n-1}{2}\Delta\Big) = \sum_{r=0}^{N-1} f^{(0)}(t_r)w_{0r}\Big(\frac{2n-1}{2}\Delta - t_r\Big), \quad -\frac{N}{2} + 1 \le n \le \frac{N}{2}.$$

Для соотношения (2) (количество вычисляемых значений равно $2N$)

$$f\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big) = \sum_{r=0}^{N-1}\Big(f^{(0)}(t_r)w_{10r}\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta - t_r\Big) +$$

$$+ f^{(1)}(t_r)w_{11r}\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta - t_r\Big)\Big), \quad -N+1 \le n \le N.$$

Для соотношения (3) (количество вычисляемых значений равно $3N$)

$$f(n\Delta) = \sum_{r=0}^{N-1}(f^{(0)}(t_r)w_{20r}(n\Delta - t_r) + f^{(1)}(t_r)w_{21r}(n\Delta - t_r) +$$

$$+ f^{(2)}(t_r)w_{22r}(n\Delta - t_r)), \quad -\frac{3N-1}{2} \le n \le \frac{3N-1}{2},$$

$$f\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big) = \sum_{r=0}^{N-1}\Big(f^{(0)}(t_r)w_{20r}\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta - t_r\Big) + f^{(1)}(t_r)w_{21r}\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta - t_r\Big) +$$

$$+ f^{(2)}(t_r)w_{22r}\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta - t_r\Big)\Big), \quad -\frac{3N}{2} + 1 \le n \le \frac{3N}{2}.$$

При базисе $\Big(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\, \sin\frac{\pi}{T}2kt\Big)$ для аналитического описания сигналов могут быть использованы тригонометрические теоремы отсчётов. Например, для нечётного N и соотношения (1)

$$f(t) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(n\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}{N\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-n\Delta)},$$

а для чётного N и того же соотношения

$$f(t) = \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} f\Big(\frac{2n-1}{2}\Delta\Big)\cos\frac{\pi}{N\Delta}\Big(t - \frac{2n-1}{2}\Delta\Big)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}\Big(t-\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big)}{N\sin\frac{\pi}{N\Delta}\Big(t-\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big)}.$$

При использовании базиса $\Big(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\, \sin\frac{\pi}{T}(2k-1)\,t\Big)$ сигнал можно описать формулами (8) и (11) из [1].

После перехода к равномерно следующим отсчётам с шагом дискретизации Δ спектральный анализ сигнала (совпадающий со спектральным анализом отсчётных функций) сводится к известным формулам. При нечётном числе отсчётов и базисе $\Big(\cos\frac{\pi}{T}2kt,\, \sin\frac{\pi}{T}2kt\Big)$ формула, эквивалентная соотношению (1), имеет вид

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2}\Big(a_k\cos\frac{\pi}{N\Delta}2kt + b_k\sin\frac{\pi}{N\Delta}2kt\Big),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(n\Delta); \quad a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(n\Delta) \cos \frac{2\pi}{N} kn;$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(n\Delta) \sin \frac{2\pi}{N} kn.$$

При чётном числе отсчётов и том же базисе

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_k \cos \frac{\pi}{N\Delta} 2kt + \sum_{k=1}^{N/2}{}^{*} b_k \sin \frac{\pi}{N\Delta} 2kt.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} f\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big); \quad a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} f\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big) \cos \frac{2\pi}{N} kn;$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} f\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big) \sin \frac{2\pi}{N} kn.$$

Символ «$*$» у знака суммы для $f(t)$ означает, что коэффициент $b_{N/2}$ берётся с весом $1/2$.

Формула (2) при базисе $\Big(\cos \frac{\pi}{T} 2kt, \sin \frac{\pi}{T} 2kt\Big)$ эквивалентна ряду Фурье

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos \frac{\pi}{2N\Delta} 2kt + \sum_{k=1}^{N}{}^{*} b_k \sin \frac{\pi}{2N\Delta} 2kt,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^{N} f\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big); \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N} f\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big) \cos \frac{\pi}{N} kn;$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N} f\Big(\frac{2n-1}{2}\,\Delta\Big) \sin \frac{\pi}{N} kn$$

и коэффициент b_N берётся с весом $1/2$.

Формула (3) при базисе $\Big(\cos \frac{\pi}{T} 2kt, \sin \frac{\pi}{T} 2kt\Big)$ эквивалентна при нечётном числе измерений ряду Фурье

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{(3N-1)/2} \Big(a_k \cos \frac{\pi}{3N\Delta} 2kt + b_k \sin \frac{\pi}{3N\Delta} 2kt\Big),$$

где коэффициенты

$$a_0 = \frac{1}{3N}\sum_{n=-(3N-1)/2}^{(3N-1)/2} f(n\Delta); \quad a_k = \frac{2}{3N}\sum_{n=-(3N-1)/2}^{(3N-1)/2} f(n\Delta)\cos\frac{\pi}{3N}2kn;$$

$$b_k = \frac{2}{3N}\sum_{n=-(3N-1)/2}^{(3N-1)/2} f(n\Delta)\sin\frac{\pi}{3N}2kn,$$

а при чётном числе измерений эквивалентна ряду Фурье

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{3N/2-1} a_k\cos\frac{\pi}{3N\Delta}2kt + \sum_{k=1}^{3N/2}{}^{*} b_k\sin\frac{\pi}{3N\Delta}2kt,$$

где коэффициенты

$$a_0 = \frac{1}{3N}\sum_{n=-3N/2+1}^{3N/2} f\Big(\frac{2n+1}{2}\Delta\Big); \quad a_k = \frac{2}{3N}\sum_{n=-3N/2+1}^{3N/2} f\Big(\frac{2n+1}{2}\Delta\Big)\cos\frac{\pi}{3N}2kn;$$

$$b_k = \frac{2}{3N}\sum_{n=-3N/2+1}^{3N/2} f\Big(\frac{2n+1}{2}\Delta\Big)\sin\frac{\pi}{3N}2kn$$

и коэффициент $b_{3N/2}$ берётся с весом 1/2.

При использовании базиса $\Big(\cos\frac{\pi}{T}2kt, \sin\frac{\pi}{T}(2k-1)t\Big)$ в предыдущих формулах для рядов Фурье и коэффициентов в аргументе для синуса величина $2k$ заменяется величиной $2k-1$, а при чётном числе отсчётов символ «*» у синусной компоненты отсутствует и коэффициенты $b_{N/2}$, b_N и $b_{3N/2}$ берутся с весом 1.

Заключение. Найденные в данной работе соотношения позволяют построить аналитический ряд Фурье для периодического сигнала, исходя из данных о нём (и синхронных значениях его производных), полученных при неравномерной дискретизации. Имея аналитические соотношения, легко перейти к равномерным совокупностям отсчётов, что упрощает спектральный анализ и при необходимости позволяет осуществить компенсацию линейных искажений сигнала [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Бондаренко Ю. В.** Повышение точности синусно-косинусного преобразования при аппроксимации и интерполяции сигнала // Автометрия. 2008. **44**, № 3. С. 41–51.

2. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1100 с.

3. **Ефимов В. М., Касперович А. Н., Резник А. Л.** Восстановление сигнала с конечным числом степеней свободы при его неравномерной дискретизации // Автометрия. 2000. № 3. С. 26–31.
4. **Yen J. L.** On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals // IRE Trans. Circuit Theory. 1956. **3**, N 4. P. 251–257.
5. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. М.: ГИФМЛ, 1962. Том 1. 464 с.
6. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В.** Теоремы отсчетов для сигналов с ограниченным спектром // Автометрия. 2005. **41**, № 5. С. 33–43.
7. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В.** Компенсация линейных искажений сигнала с использованием его гармонического разложения // Автометрия. 2008. **44**, № 4. С. 3–12.

Поступила в редакцию 15 сентября 2010 г.