

УДК 53.082.531, 53.082.532

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ОДНОМЕРНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ*

О. В. Белай, Е. В. Подивилов, Л. Л. Фрумин, Д. А. Шапиро

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: llfrumin@gmail.com*

Рассмотрена одномерная обратная задача рассеяния для волнового уравнения Гельмгольца, состоящая в восстановлении показателя преломления прозрачных неоднородных слоев по заданному комплексному спектру отражения. Использован метод, ранее предложенный авторами для восстановления брэгговских решеток в приближении связанных мод. Проведено численное моделирование обратной задачи рассеяния для классического слоя Рэлея и для экспоненциально гладкого переходного слоя. Полученные решения демонстрируют высокую эффективность предложенного подхода. Точность восстановления показателя преломления оказалась существенно зависящей от степени гладкости слоя. Предложенный подход может применяться в задачах разработки просветленной и интерференционной оптики, синтеза брэгговских решеток и многослойных оптических зеркал, а также в радиофизике и акустике.

Ключевые слова: волновое уравнение Гельмгольца, обратная задача рассеяния, численный метод решения.

Введение. Обратная задача рассеяния (ОЗР) для волнового уравнения, в которой требуется определить характеристики отражателя по рассчитанному или измеренному спектру отражения, имеет первостепенное значение для широкого круга практических приложений. Эта задача возникает при разработке просветленной и интерференционной оптики, синтезе брэгговских решеток, а также при электромагнитном и акустическом зондировании сред.

Актуальность и значимость приложений стимулируют развитие и совершенствование методов решения ОЗР для волнового уравнения. В работе [1] для расчета волоконно-оптических брэгговских решеток с заданными отражательными свойствами предложен эффективный численный метод решения ОЗР для волнового уравнения в резонансном приближении связанных мод Когельника [2]. Данный метод использует специальную процедуру внутреннего окаймления (inner bordering), подобно окаймлению в известном алгоритме Левинсона [3]. При этом существенно используется теплицева симметрия дискретного аналога пары интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко, выведенных для уравнений связанных мод Захаровым и Шабатом [4]. Эффективность метода обусловлена сочетанием высокой точности, скорости и устойчивости расчетного алгоритма. Для N расчетных точек этот метод требует всего $O(N^2)$ арифметических операций как с первым $O(N^{-1})$, так и со вторым $O(N^{-2})$ порядком аппроксимации.

Этот метод был распространен на общий случай ОЗР для уравнения Гельмгольца, схема решения которой представлена в работе [5]. Схема состоит в эквивалентной замене уравнения Гельмгольца парой уравнений, связывающих падающую и отраженную

*Работа выполнена при поддержке Президиума РАН (программа № 27), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-02-00552), Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1527.2008.2), Президиума СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 42) и Министерства образования и науки РФ.

бегущие волны, на основе преобразования Бреммера [6] и последующего перехода от геометрической координаты к оптической (оптическому пути). Полученная при этом система двух уравнений первого порядка аналогична уравнениям связанных мод Когельника, что позволяет применить для решения ОЗР метод внутреннего окаймления.

В предлагаемой работе рассмотрено численное моделирование ОЗР для двух неоднородных слоев с известными точными решениями для эффективного коэффициента связи мод. Цель работы — выяснить путем сравнения численного расчета с известным решением, насколько точно можно решать ОЗР для волнового уравнения Гельмгольца с помощью предложенного подхода. В первом примере рассматривается классический слой Рэлея, а во втором точное решение представляет собой экспоненциально гладкий слой.

В разд. 1 для уравнения Гельмгольца описаны преобразования Бреммера, рассмотрены соотношения между оптической переменной и геометрической координатой и получены аналоги уравнений связанных мод. В разд. 2 представлено описание слоя Рэлея, а в разд. 3 рассмотрен экспоненциально гладкий переходный слой. Результаты численного моделирования ОЗР для восстановления слоев и их качественное сравнение представлены в разд. 4.

1. ОЗР для уравнения Гельмгольца. Рассмотрим постановку одномерных ОЗР для волнового уравнения Гельмгольца. Пусть имеется прозрачный неоднородный плоскопараллельный слой конечной толщины. Слой расположен на отрезке $[0, L_0]$ оси x и характеризуется зависящим от координаты показателем преломления $n(x)$. Слева на границу слоя под прямым углом падают плоские электромагнитные волны с различными волновыми числами k и фиксированной амплитудой. Амплитуды и фазы отраженных волн на левой границе слоя определяют комплексный спектр (левого) коэффициента отражения $r(k)$. Требуется по этому спектру определить зависимость показателя преломления слоя $n(x)$ от координаты x , предполагая отсутствие хроматической дисперсии.

Обозначим компоненту электрического поля в слое $E(x)$ и запишем для нее одномерное волновое уравнение Гельмгольца:

$$E'' + k^2 n^2(x) E = 0. \quad (1)$$

Здесь $k = \omega/c$ (ω, c — частота падающей на слой волны и скорость света соответственно). Следуя Бреммеру [6], будем искать электрическое поле в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{kn(x)}} (Ae^{iS} + Be^{-iS}); \quad E'(x) = i\sqrt{kn}(Ae^{iS} - Be^{-iS}), \quad (2)$$

где A, B — амплитуды волн; $S = k \int n(x) dx$ — фаза волны. В результате приходим к системе двух уравнений первого порядка, эквивалентной исходному волновому уравнению (1) [7]:

$$A' = \frac{n'}{2n} B e^{-2iS}; \quad B' = \frac{n'}{2n} A e^{2iS}. \quad (3)$$

Полученная система уравнений описывает френелево объемное отражение волн от неоднородностей среды.

Фаза волны $S(x)$ меняется сложным образом в зависимости от закона модуляции показателя преломления $n(x)$. Введем новую оптическую координату ξ , имеющую смысл оптического пути, таким образом, чтобы фаза стала линейной функцией новой переменной:

$$S = k\xi, \quad \xi = \int_0^x n(x') dx'. \quad (4)$$

После замены переменной уравнения Бреммера (3) принимают вид

$$\frac{dA}{d\xi} = q(\xi) e^{-2ik\xi} B; \quad \frac{dB}{d\xi} = q(\xi) e^{2ik\xi} A. \quad (5)$$

Здесь q — эффективный коэффициент связи мод (КСМ) слоя:

$$q(\xi) = \frac{1}{2n} \frac{dn}{d\xi}. \quad (6)$$

Эти уравнения связывают падающую и отраженную бегущие волны. Поэтому по аналогии с уравнениями связанных мод [2] назовем их уравнениями связи бегущих волн. В отличие от уравнений связанных мод $q(\xi)$ является не комплексной, а действительной функцией.

Левая задача рассеяния предполагает отсутствие падающей волны на правом крае слоя при $x = L_0$ или при $\xi = \Lambda_0$: $B(\Lambda_0) = 0$. Параметр Λ_0 есть полная оптическая толщина слоя:

$$\Lambda_0 = \int_0^{L_0} n(x) dx. \quad (7)$$

Из уравнений (5) по заданному КСМ $q(\xi)$ можно найти коэффициенты отражения r и прохождения d слоя:

$$r = \frac{B(0)}{A(0)}, \quad d = \frac{A(\Lambda_0)}{A(0)} e^{ik\Lambda_0}.$$

Решение ОЗР состоит в восстановлении КСМ $q(\xi)$ по известной частотной зависимости коэффициента отражения $r(k)$. Если функция $q(\xi)$ известна, то из уравнения (6) находим показатель преломления, а затем на основе соотношения (4) определяем зависимость геометрической координаты от оптической:

$$n(\xi) = n(0) \exp \left[2 \int_0^\xi q(\xi') d\xi' \right]; \quad x = \int_0^\xi \frac{d\xi'}{n(\xi')}. \quad (8)$$

2. Слой Рэлея. Слой, имеющий переходную область с гиперболической зависимостью показателя преломления от координаты $n(x)$ между двумя участками с постоянными показателями преломления n_1 и n_2 , известен как классический слой Рэлея [7, 8]:

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & \Delta x < 0, \\ \frac{n_1 n_2 L}{(n_1 - n_2) \Delta x + n_2 L}, & 0 \leq \Delta x \leq L, \\ n_2, & 0 < \Delta x. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь Δx — координата, отсчитываемая от начала переходной области слоя, геометрический размер которой равен L . Для соответствующей оптической толщины переходной области Λ из уравнения (9) и уравнения, аналогичного (7), получим

$$\Lambda = \frac{n_1 n_2 L}{n_1 - n_2} \ln \frac{n_1}{n_2}.$$

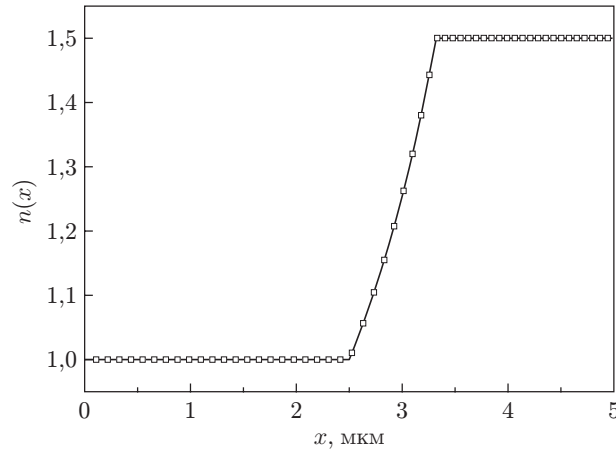


Рис. 1. Слой Рэлея для $n_1 = 1,0$, $n_2 = 1,5$. Оптическая координата начала переходной области слоя составляет 2,5 мкм. Оптическая толщина переходной области слоя $\Lambda = 1$ мкм. Сплошная кривая — восстановленное распределение показателя преломления в слое для $N = 4096$ точек. Квадратами показан точный профиль показателя преломления

На рис. 1 зависимость (9) представлена квадратами. Заметим, что координата x на рисунке не совпадает с Δx из формулы (9) и отсчитывается от левой границы слоя. В переходной области слоя Рэлея КСМ q как функция оптической переменной имеет постоянное значение:

$$q = Q/\Lambda, \quad 0 \leq \Delta\xi \leq \Lambda, \quad (10)$$

где $\Delta\xi$ — оптическая координата, также отсчитываемая от левой границы переходной области слоя, а параметр Q определен следующим соотношением:

$$Q = -\frac{1}{2} \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad (11)$$

Внутри переходной области показатель преломления меняется по экспоненциальному закону: $n = n_1 e^{2Q\Delta\xi/\Lambda}$. В этой области геометрическую координату Δx можно выразить в явном виде как функцию оптической координаты $\Delta\xi$:

$$\Delta x = \Lambda \frac{1 - e^{-2Q\Delta\xi/\Lambda}}{2Qn_1}. \quad (12)$$

В теории волоконно-оптических брэгговских решеток случай постоянного КСМ известен как однородная решетка [9], для которой коэффициент отражения имеет вид

$$r(k) = \frac{(Q/\Lambda) \operatorname{sh} \mu \Lambda}{\mu \operatorname{ch} \mu \Lambda - ik \operatorname{sh} \mu \Lambda}, \quad (13)$$

где $\mu = \sqrt{(Q/\Lambda)^2 - k^2}$. Из уравнения (13) следует, что модуль коэффициента отражения достигает своего максимума $|r|_{\max} = \operatorname{th} Q$ при $k = 0$. Для характерной ширины центрального пика δk справедлива оценка $\delta k \sim q = Q/\Lambda$.

Для больших значений волнового числа $|k| > Q/\Lambda$ параметр μ становится чисто мнимым, и гиперболические функции в (13) следует заменить тригонометрическими. В этой

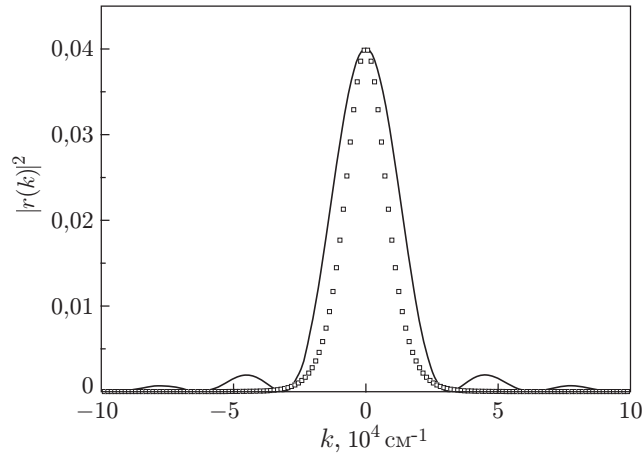


Рис. 2. Спектры отражения $|r(k)|^2$ для слоя Рэлея (сплошная кривая) и экспоненциально гладкого слоя (квадраты) при $n_1 = 1,0$, $n_2 = 1,5$, $\Lambda = 1$ мкм

области волновых чисел коэффициент отражения обращается в нуль в точках, где выполняется равенство $k^2 = (\pi^2 l^2 + Q^2)/\Lambda^2$, $l = 1, 2, 3, \dots$, что приводит к появлению ряда побочных пиков. Спектр отражения слоя Рэлея представлен на рис. 2. Побочные пики и медленное спадание крыльев спектра отражения обусловлены разрывом производной показателя преломления на границах слоя. Физическая причина этого состоит в интерференции волн, многократно отраженных от левой и правой границ слоя, как в интерферометре Фабри — Перо.

Далее рассматривается экспоненциально гладкий неоднородный слой, спектр отражения которого вообще не содержит боковых пиков и быстро затухает с ростом k .

3. Экспоненциально гладкий слой. Гладкий переходный слой соответствует профилю брэгговской решетки, рассмотренной в работе [10], для которой уравнения связанных мод имеют точное решение. КСМ этого слоя как функция оптической переменной ξ описывается выражением

$$q(\xi) = \frac{Q/\Lambda}{\text{ch}(\pi(\xi - \xi_0)/\Lambda)}. \quad (14)$$

Здесь Q — параметр слоя; ξ_0 — оптическая координата центра переходного слоя.

Чтобы определить профиль показателя преломления как функцию оптической переменной, воспользуемся уравнением (6) и получим

$$n(\xi) = C \exp [2(Q/\pi) \arctg \exp (\pi(\xi - \xi_0)/\Lambda)], \quad (15)$$

где C — константа интегрирования. Полученный переходный слой имеет вид сглаженной ступеньки, представленной на рис. 3. Два параметра слоя S и Q выбираются из условий

$$n(\xi) \rightarrow \begin{cases} n_1, & \xi \rightarrow -\infty, \\ n_2, & \xi \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (16)$$

откуда следует

$$C = \sqrt{n_1 n_2}; \quad Q = -\frac{1}{2} \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad (17)$$

Выражение для параметра Q гладкого слоя совпадает с выражением (11) для слоя Рэлея.

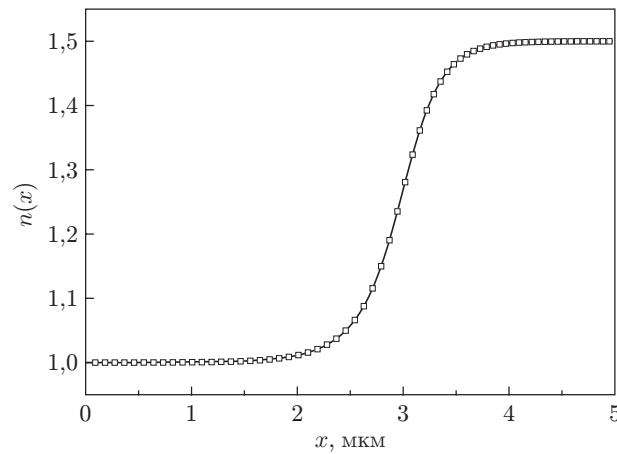


Рис. 3. Экспоненциально гладкий слой для $n_1 = 1,0$, $n_2 = 1,5$. Оптическая координата середины переходной области слоя составляет 3 мкм. Параметр оптической толщины слоя $\Lambda = 1$ мкм. Квадраты — точный профиль показателя преломления, сплошная кривая — восстановленный профиль для $N = 4096$ точек

Обратимся теперь к спектру отражения слоя. Для того чтобы его найти, требуется решить уравнения (5). Следуя работе [10] это решение можно представить в виде

$$r(k) = \frac{Q \Gamma(d)\Gamma(f_-)\Gamma(f_+)}{\pi \Gamma(d^*)\Gamma(g_-)\Gamma(g_+)}, \quad (18)$$

$$d = \frac{1}{2} + \frac{ik\Lambda}{\pi}, \quad f_{\pm} = \frac{1}{2} - \frac{ik\Lambda}{\pi} \pm \frac{iQ}{\pi}, \quad g_{\pm} = 1 \pm \frac{iQ}{\pi}.$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера. Спектр отражения гладкого слоя (18) напоминает спектр слоя Эпштейна [11], который также имеет вид отношений гамма-функций Эйлера. Однако это два разных решения уравнения Гельмгольца, поскольку слой Эпштейна представлен как функция геометрической, а не оптической координаты.

Модуль коэффициента отражения гладкого слоя можно выразить через элементарные функции

$$|r(k)|^2 = \frac{\text{ch } 2Q - 1}{\text{ch } 2Q + \text{ch } 2k\Lambda}. \quad (19)$$

Максимальное значение модуля коэффициента отражения, которое достигается при $k = 0$, совпадает с максимумом, полученным для слоя Рэлея: $|r|_{\max} = \text{th } Q$ (см. разд. 2). Характерная ширина спектра гладкого слоя (см. рис. 2) определяется равенством косинусов в знаменателе последнего выражения, что приводит к оценке $\delta k \propto Q/\Lambda$.

4. Численное моделирование ОЗР для волнового уравнения выполнялось в несколько этапов. Для каждого из выбранных двух переходных слоев задавались параметры слоя n_1 , n_2 , Λ , а также число точек дискретизации N и размер области поиска решения Λ_0 . В узлах ξ_j , $j = 1, \dots, N$, равномерной дискретной сетки с шагом $\Lambda_0/(N - 1)$ выбирались точные значения показателя преломления $n(\xi_j)$ и КСМ $q(\xi_j)$.

На следующем этапе по формулам (13), (18) находились комплексные спектры отражения $r(k)$. Импульсный отклик решетки, который входит в уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко в качестве исходных данных, представляет собой фурье-образ ко-

эфициента отражения

$$r(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{-ik\xi} \frac{dk}{2\pi}.$$

Для его расчета применялся быстрый алгоритм Кули — Тьюки [12] дискретного преобразования Фурье (ДПФ) по основанию 2. При восстановлении профиля показателя преломления на отрезке $[0, \Lambda_0]$ требуется импульсный отклик, определенный на удвоенном интервале $[0, 2\Lambda_0]$. Чтобы точность вычисления ДПФ не влияла на расчеты, выбиралось большое число расчетных точек в спектральной области: $N_k = 2^{18} = 262144$. Заметим, что метод требует значительно меньшего числа точек, а именно только тех, которые попадают в расчетный интервал $0 < \xi < 2\Lambda_0$.

Для численного решения ОЗР применялся метод внутреннего окаймления [1]. В результате решения ОЗР по импульсному отклику слоя восстанавливался его КСМ, который затем сравнивался с соответствующим точным решением (10) или (14), и определялась ошибка восстановления. Численное решение ОЗР для уравнения Гельмгольца завершалось расчетом показателя преломления $n(\xi)$ в оптических координатах и установлением однозначного соответствия между оптической переменной ξ и геометрической координатой x на основе соотношений (8), где интегралы заменялись конечными суммами по формуле трапеций.

Найденный с помощью ДПФ импульсный отклик слоя Рэлея содержит всплески, называемые явлением Гиббса — следствие плохой сходимости ряда Фурье для разрывных функций. Явление Гиббса в исходных данных ОЗР заметно снижает точность восстановления КСМ для слоя Рэлея по сравнению с экспоненциально гладким слоем. Сравнительно низкая точность связана с относительно большой шириной спектра слоя Рэлея. Так как в численных расчетах используется конечный спектральный интервал, для медленно спадающего спектра при заданной точности требуется больший расчетный спектральный интервал и большее число расчетных точек.

Распределения КСМ $q(\xi)$ в оптических координатах для слоя Рэлея и для гладкого слоя представлены на рис. 4. Точное решение для КСМ слоя Рэлея имеет вид разрывной П-образной функции, представленной на рисунке квадратами. Восстановленное решение изображено сплошной линией. Вследствие явления Гиббса в исходных данных ОЗР в решении также содержатся заметные «всплески» вблизи разрывов функции. Погрешность восстановления составила порядка 10^{-2} . Что касается экспоненциально гладкого слоя, также представленного на рисунке кружками, точность восстановления его КСМ оказалась 10^{-6} , что значительно выше, чем для слоя Рэлея.

Расчеты проводились как для первого, так и для второго порядка аппроксимации. Поскольку КСМ для слоя Рэлея представляет собой разрывную функцию, схема второго порядка дает в этом случае ту же точность, что и схема первого порядка. В расчетах использовались следующие параметры слоев: показатель преломления менялся от $n_1 = 1,0$ до $n_2 = 1,5$, толщина слоя в оптических координатах составила $\Lambda = 1$ мкм, а число точек N менялось в пределах от 64 (2^6) до 32768 (2^{15}). Восстановление слоев проводилось на заметно более широком интервале, чем характерная оптическая толщина слоя Λ . Для восстановления использовался интервал $[0, 6\Lambda]$ в области оптической переменной. При этом центр слоя выбирался для значения оптической координаты $\xi = 3\Lambda$.

На заключительном этапе численного решения с помощью дискретного варианта соотношений (8) восстанавливались профили показателя преломления слоя $n(x)$ в зависимости от геометрической координаты x . Результаты восстановления для слоя Рэлея и экспоненциально гладкого слоя представлены сплошными кривыми на рис. 1 и рис. 3 соответственно. Интегральный характер соотношений (8) приводит к заметному сглаживанию ошибки

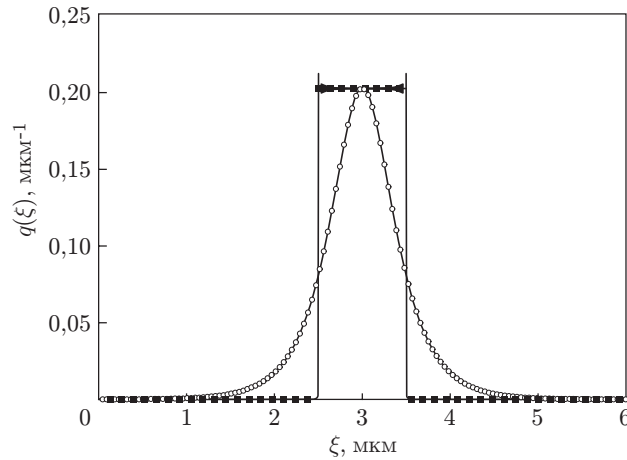


Рис. 4. Точные решения (квадраты и кружки) и восстановленные численно (сплошные кривые) эффективные КСМ $q(\xi)$ для слоя Рэлея (П-образная кривая) и для экспоненциально гладкого слоя при $n_1 = 1,0$, $n_2 = 1,5$, $\Lambda = 1$ мкм, $N = 4096$

восстановления профиля показателя преломления. Поэтому результаты восстановления профилей показателя преломления практически не отличить на рисунках от точных профилей (кружки) не только для гладкого слоя, но и для слоя Рэлея.

Заключение. В данной работе рассмотрены обратные задачи рассеяния для волнового уравнения Гельмгольца, возникающие при восстановлении показателя преломления одномерных прозрачных неоднородных слоев по заданному комплексному спектру отражения. Метод, ранее предложенный авторами для восстановления брэгговских решеток в приближении связанных мод, применяется при решении обратных задач для уравнения Гельмгольца. Проведено численное моделирование двух обратных задач рассеяния: для классического слоя Рэлея и для экспоненциально гладкого переходного слоя. Полученные решения ОЗР для выбранных модельных слоев демонстрируют высокую эффективность предложенного подхода. Точность восстановления показателя преломления оказалась существенно зависящей от степени гладкости слоя. Предложенный метод решения ОЗР для одномерного волнового уравнения может применяться при расчете брэгговских решеток, элементов просветленной и интерференционной оптики, многослойных оптических зеркал, а также в радио- и гидролокации для электромагнитного и акустического зондирования сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Belai O. V., Frumin L. L., Podivilov E. V., Shapiro D. A.** Efficient numerical method of the fiber Bragg grating synthesis // *JOSA B*. 2007. **24**, N 7. P. 1451–1457.
2. **Kogelnik H.** Coupled wave theory for thick hologram gratings // *Bell Syst. Techn. Journ.* 1969. **48**, N 9. P. 2909–2947.
3. **Levinson N.** The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction // *Journ. Math. Phys.* 1947. **25**, N 4. P. 261–278.
4. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.** Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ*. 1971. **61**, вып. 1(7). С. 118–134.
5. **Belai O. V., Frumin L. L., Podivilov E. V., Shapiro D. A.** Inverse scattering for the one-dimensional Helmholtz equation: fast numerical method // *Opt. Lett.* 2008. **33**, N 18. P. 2101–2103.

-
6. **Bremmer H.** The propagation of electromagnetic waves through a stratified medium and its W.K.B. approximation for oblique incidence // *Physica*. 1949. **15**, N 7. P. 593–608.
 7. **Раутиан С. Г.** Введение в физическую оптику. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 256 с.
 8. **Rayleigh L.** On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection // *Proc. Royal Soc. of London Ser. A*. 1912. **86**. P. 207–226.
 9. **Kashyap R.** *Fiber Bragg Gratings*. N. Y.: Academic Press, 1999. 458 p.
 10. **Shapiro D. A.** Family of exact solutions for reflection spectrum of Bragg grating // *Opt. Commun.* 2003. **215**, N 4–6. P. 295–301.
 11. **Epstein P. S.** Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1930. **16**, N 10. P. 627–637.
 12. **Cooley J. W., Tukey J. W.** An algorithm for machine calculation of complex Fourier series // *Math. Comput.* 1965. **19**. P. 297–301.

Поступила в редакцию 22 апреля 2009 г.
