УДК 517.511

ФИЛЬТРАЦИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

С. В. Смагин

Томский государственный университет,
634050, г. Томск, просп. Ленина, 36
E-mail: ssv@fpmk.tsu.ru

Рассматривается алгоритм синтеза оптимального фильтра, определяющего оценку вектора состояния дискретной линейной динамической системы с аддитивными возмущениями, содержащими неизвестную постоянную составляющую. Алгоритм не использует оценки возмущений. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: дискретная линейная система, калмановская фильтрация, неизвестные возмущения.

Введение. В настоящее время актуальной является разработка алгоритмов калмановской фильтрации для класса систем с неизвестными аддитивными возмущениями, которые могут использоваться в качестве моделей реальных физических систем, моделей объектов с неизвестными сбоями.

Известные методы вычисления оценок вектора состояния базируются на алгоритмах, использующих оценки неизвестного возмущения [1–6]. В работах [1, 2] рассматриваются алгоритмы расширения пространства состояний (к основной модели объекта добавляется модель ненаблюдаемого возмущения) и алгоритм двухэтапной фильтрации, уменьшающий вычислительные затраты за счет декомпозиции задачи. В [3–6] представлены алгоритмы рекуррентной оптимальной фильтрации, имеющие достаточно жесткие условия разрешимости.

Целью данной работы является создание и исследование оптимального линейного дискретного фильтра для объектов с неизвестной аддитивной постоянной составляющей возмущений. Метод базируется на преобразовании модели и сведении ее к задаче линейной калмановской фильтрации [7]. Выполнено сравнение точности оценивания предлагаемым методом и другими методами.

Постановка задачи фильтрации. Рассматривается дискретная система, которая описывается следующими разностными уравнениями:

$$x(k+1) = Ax(k) + f + q(k); \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(k) \in R^n$ — вектор состояния; A — $n \times n$-матрица; f — неизвестный постоянный вектор; $q(k)$ — белая гауссовская случайная последовательность аддитивных возмущений с характеристиками:

$$\mathbf{M}\{q(k)\} = 0; \quad \mathbf{M}\{q(k)q^T(j)\} = Q\delta_{k,j}$$

($\mathbf{M}$ — оператор математического ожидания, T — транспонирование).

Канал наблюдений имеет вид

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \tag{2}$$

где $y(k) \in R^l$ — вектор измерений; S — матрица размера $l \times n$; $v(k)$ — белая гауссовская случайная последовательность ошибок измерений с характеристиками:

$$\mathbf{M}\{v(k)\} = 0; \quad \mathbf{M}\{q(k)v^T(j)\} = 0; \quad \mathbf{M}\{v(k)v^T(j)\} = V\delta_{k,j} \tag{3}$$

($\delta_{k,j}$ — символ Кронекера).

Предполагается, что матрицы A, Q, S, V постоянные и для матриц S, A выполняются условия наблюдаемости. Случайный вектор x_0 и процессы $q(k)$, $v(k)$ независимы, при этом

$$\mathbf{M}\{x(0)\} = \bar{x}_0; \quad \mathbf{M}\{(x(0) - \bar{x}_0)(x(0) - \bar{x}_0)^T\} = P_0.$$

Для системы (1) и канала наблюдений (2) требуется построить фильтр, вычисляющий оценку вектора состояния и не использующий оценки неизвестной постоянной составляющей возмущений.

Преобразование математической модели. Для решения поставленной задачи осуществляется преобразование дискретной системы (1). Из описания объекта исключается постоянная составляющая возмущений f посредством вычитания из уравнения (1) такого же уравнения, но со сдвигом на один такт:

$$x(k) = Ax(k-1) + f + q(k-1).$$

Результатом является следующее уравнение:

$$x(k+1) = (A + E_n)x(k) - Ax(k-1) + q(k) - q(k-1), \tag{4}$$

где E_n — единичная матрица размера $n \times n$. Расширение пространства состояния системы осуществляется посредством добавления к уравнению (4) тождества

$$x(k) = x(k). \tag{5}$$

Введя обозначения

$$X(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{pmatrix}; \quad \bar{q}(k) = \begin{pmatrix} q(k) - q(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

систему (4), (5) можно представить в векторно-матричной форме

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + \bar{q}(k); \quad X(0) = X_0, \tag{7}$$

где $\bar{A}$ — $2n \times 2n$-матрица, имеющая блочную структуру

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A + E_n & -A \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а случайный вектор $X_0 = (x_0^T\ x_{-1}^T)^T$ — следующие характеристики:

$$\mathbf{M}\{X(0)\} = \bar{X}_0; \quad \mathbf{M}\{(X_0 - \bar{X}_0)\,(X_0 - \bar{X}_0)^T\} = \bar{P}_0,\ \bar{X}_0 = (\bar{x}_0^T\ \bar{x}_{-1}^T)^T. \tag{9}$$

Отметим, что здесь дополнительно вводится n-мерный вектор x_{-1}, который является независимым от $q(k)$ и $v(k)$, а данные (9) могут быть получены по априорной информации об объекте (1).

В рассмотренной модели (7) процесс $\bar{q}(k)$ не является белой гауссовской последовательностью, процессы $\bar{q}(k)$ и $\bar{q}(k-1)$ уже будут коррелированы:

$$\mathbf{M}\{\bar{q}(k)\bar{q}^T(j)\} = \begin{cases} \bar{Q}, & \text{если } j = k, \\ \bar{\bar{Q}}, & \text{если } j = k-1, \\ 0, & \text{если } 0 \leq j < k-1, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 2Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Согласно (2) и (6) канал наблюдений для расширенной системы (7) можно представить в виде

$$y(k) = \bar{S}X(k) + v(k), \tag{12}$$

где

$$\bar{S} = (S \;\; 0). \tag{13}$$

В (13) нулевая матрица такого же размера, что и матрица S.

Фильтрация дискретного процесса. Для вычисления оценки вектора состояния расширенной системы выберем уравнение, по структуре совпадающее с фильтром Калмана:

$$\hat{X}(k+1) = \bar{A}\hat{X}(k) + K(k)(y(k+1) - \bar{S}\bar{A}\hat{X}(k)); \quad \hat{X}(0) = \bar{X}_0. \tag{14}$$

Учитывая (7), (12) и (14), получим следующее уравнение для ошибки $e(k) = \hat{X}(k) - X(k)$:

$$e(k+1) = (\bar{A} - K(k)\bar{S}\bar{A})e(k) + K(k)v(k+1) + (K(k)\bar{S} - E_{2n})\bar{q}(k); \quad e(0) = X_0 - \bar{X}_0. \tag{15}$$

Найдем уравнение для матрицы $\bar{P}(k) = \mathbf{M}\{e(k)e^T(k)\}$. Для этого перемножим левые и правые части (15) на соответствующие транспонированные выражения. В результате, выполнив операцию математического ожидания на основе (3), (9) и (10), получим

$$\begin{gathered} \bar{P}(k+1) = \mathbf{M}\{e(k+1)e^T(k+1)\} = (\bar{A} - K(k)\bar{S}\bar{A})\bar{P}(k)(\bar{A} - K(k)\bar{S}\bar{A})^T + \\ + K(k)VK^T(k) + (K(k)\bar{S} - E_{2n})\bar{Q}(K(k)\bar{S} - E_{2n})^T + (\bar{A} - K(k)\bar{S}\bar{A})Q_e(k) \times \\ \times (K(k)\bar{S} - E_{2n})^T + (K(k)\bar{S} - E_{2n})Q_e^T(k)(\bar{A} - K(k)\bar{S}\bar{A})^T; \quad \bar{P}(0) = \bar{P}_0, \end{gathered} \tag{16}$$

где $Q_e(k) = \mathbf{M}\{e(k)\bar{q}^T(k)\}$. Для вычисления $Q_e(k)$ необходимо уравнение (15) записать со сдвигом на один такт:

$$e(k) = (\bar{A} - K(k-1)\bar{S}\bar{A})e(k-1) + K(k-1)v(k) + (K(k-1)\bar{S} - E_{2n})\bar{q}(k-1). \tag{17}$$

Тогда, учитывая (17), независимость процессов $q(k)$ и $v(k)$ и характеристики процесса $\bar{q}(k)$ (10), получим

$$Q_e(k) = (\bar{A} - K(k-1)\bar{S}\bar{A})\mathbf{M}\{e(k-1)\bar{q}^T(k)\} + (K(k-1)\bar{S} - E_{2n})\bar{\bar{Q}}. \tag{18}$$

Согласно уравнению

$$e(k-1) = (\bar{A} - K(k-2)\bar{S}\bar{A})e(k-2) + K(k-2)v(k-1) + (K(k-2)\bar{S} - E_{2n})\bar{q}(k-2),$$

независимости процессов $q(k)$ и $v(k)$, а также характеристикам процесса $\bar{q}(k)$ (10) получим

$$\mathbf{M}\{e(k-1)\bar{q}^T(k)\} = (\bar{A} - K(k-2)\bar{S}\bar{A})\mathbf{M}\{e(k-2)\bar{q}^T(k)\}.$$

Продолжая по аналогии вычислять $\mathbf{M}\{e(k-2)\bar{q}^T(k)\}, \ldots, \mathbf{M}\{e(1)\bar{q}^T(k)\}$, можно доказать справедливость формулы

$$\mathbf{M}\{e(k-j)\bar{q}^T(k)\} = (\bar{A} - K(k-j-1)\bar{S}\bar{A})\mathbf{M}\{e(k-j-1)\bar{q}^T(k)\}, \quad j = 1, \ldots, k-1. \tag{19}$$

Тогда при $j = k-1$ в силу независимости $e(0) = X_0 - \bar{X}_0$ и процесса $\bar{q}(k)$ имеем

$$\mathbf{M}\{e(1)\bar{q}^T(k)\} = (\bar{A} - K(0)\bar{S}\bar{A})\mathbf{M}\{e(0)\bar{q}^T(k)\} = 0. \tag{20}$$

Из (19), (20) следует справедливость формулы

$$\mathbf{M}\{e(k-1)\bar{q}^T(k)\} = 0. \tag{21}$$

Окончательно матрица $Q_e(k)$ в силу (18) и (21) определится равенством

$$Q_e(k) = (K(k-1)\bar{S} - E_{2n})\bar{\bar{Q}}. \tag{22}$$

Оптимизируемый критерий, характеризующий точностные характеристики фильтра, задается в виде

$$J(k+1) = \mathrm{tr}\bar{P}(k+1), \tag{23}$$

где tr — след матрицы. Учитывая (23), правую часть уравнения (16) и формулу (22), применяя правила матричного дифференцирования [8, 9]

$$\frac{d\mathrm{tr}AXB}{dX} = A^T B^T, \quad \frac{d\mathrm{tr}AX^T B}{dX} = BA,$$

из условия

$$\frac{dJ(k+1)}{dK(k)} = 0$$

получим уравнение для определения оптимальных коэффициентов передачи фильтра $K(k)$:

$$\begin{gathered}
-\bar{A}\bar{P}(k)\bar{A}^T\bar{S}^T + K(k)\bar{S}\bar{A}\bar{P}(k)\bar{A}^T\bar{S}T + K(k)\bar{S}\bar{\bar{Q}}\bar{S}^T - \bar{\bar{Q}}\bar{S}^T - K(k)\bar{S}\bar{Q}\times \\
\times\bar{S}^T K^T(k-1)\bar{A}^T\bar{S}^T + K(k)\bar{S}\bar{Q}\bar{A}^T\bar{S}^T - K(k)\bar{S}\bar{A}(k)K(k-1)\bar{S}\bar{Q}\bar{S}^T + \\
+ K(k)\bar{S}\bar{A}\bar{Q}\bar{S}^T + \bar{Q}\bar{S}^T K^T(k-1)\bar{A}^T\bar{S}^T - \bar{Q}\bar{A}^T\bar{S}^T - \bar{A}\bar{Q}\bar{S}^{\mathrm{T}} + \\
+ \bar{A}K(k-1)\bar{S}\bar{Q}\bar{S}^T + K(k)V = 0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Уравнения (24) преобразуем к виду

$$K(k)\{\bar S(\bar A\bar P(k)\bar A^T+\bar{\bar Q}(E_{2n}-\bar S^TK^T(k-1))\bar A^T+\bar A(E_{2n}-K(k-1)\bar S)\bar{\bar Q}+\bar Q)\bar S^T+ \\ +V\}-\ (\bar A\bar P(k)\bar A^T+\bar{\bar Q}(E_{2n}-\bar S^TK^T(k-1))\bar A^T+\bar A(E_{2n}-K(k-1)\bar S)\bar{\bar Q}+\bar Q)\bar S^T=0. \quad (25)$$

Решение уравнения (25) относительно $K(k)$ дает следующий результат:

$$K(k)=\tilde P(k)\bar S^T(\bar S\tilde P(k)\bar S^T+V)^{-1}, \quad (26)$$

где

$$\tilde P(k)=\bar A\bar P(k)\bar A^T+\bar{\bar Q}(E_{2n}-\bar S^TK^T(k-1))\bar A^T+\bar A(E_{2n}-K(k-1)\bar S)\bar{\bar Q}+\bar Q. \quad (27)$$

Согласно (22) и (27) уравнение (16) можно преобразовать к виду

$$\bar P(k+1)=K(k)(\bar S\tilde P(k)\bar S^T+V)K^T(k)-K(k)\bar S\tilde P(k)-\tilde P(k)\bar S^TK^T(k)+\tilde P(k);\quad \bar P(0)=\bar P_0. \quad (28)$$

Заменив в (28) в первом слагаемом левый множитель $K(k)$ выражением (26), уравнение можно представить в виде разностного уравнения

$$\bar P(k+1)=(E_{2n}-K(k)\bar S(k))\tilde P(k);\quad \bar P(0)=\bar P_0. \quad (29)$$

Отметим, что для вычисления коэффициентов передачи (26) в силу (27) необходимо задать начальные значения коэффициентов $K(-1)$.

Учитывая симметричность, введем блочное представление матриц $\tilde P(k)$ и $\bar P(k)$:

$$\tilde P(k)=\begin{pmatrix}\tilde p_1(k) & \tilde p_2^T(k)\\ \tilde p_2(k) & \tilde p_3(k)\end{pmatrix};\quad \bar P(k)=\begin{pmatrix}p_1(k) & p_2^T(k)\\ p_2(k) & p_3(k)\end{pmatrix}, \quad (30)$$

а также, учитывая блочные структуры матриц $\bar S$ и $\tilde P(k)$ (формулы (13), (30)), входящих в (26), получим представление оптимальных коэффициентов передачи фильтра (14) в блочном виде:

$$K(k)=\begin{pmatrix}K_1(k)\\ K_2(k)\end{pmatrix}, \quad (31)$$

где

$$K_1(k)=\tilde p_1(k)S^T(S\tilde p_1(k)S^T+V)^{-1};\quad K_2(k)=\tilde p_2(k)S^T(S\tilde p_1(k)S^T+V)^{-1}. \quad (32)$$

На основе (27) и (29), а также структуры матриц (30) и матриц $\bar A,\bar Q,\bar{\bar Q},\bar S$ (формулы (8), (11), (13)) получим уравнения для блоков матрицы $\bar P(k)$ и формулы для определения блоков матрицы $\tilde{P}(k)$ в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
p_1(k+1) = (E_n - K_1(k)S)\tilde{p}_1(k); \quad p_1(0) = p_{1,0};\\
p_2(k+1) = -K_2(k)S\tilde{p}_1(k) + \tilde{p}_2(k); \quad p_2(0) = p_{2,0};\\
p_3(k+1) = -K_2(k)S(k)\tilde{p}_2^T(k) + \tilde{p}_3(k); \quad p_3(0) = p_{3,0};\\
\tilde{p}_1(k) = (A+E_n)p_1(k)(A+E_n)^T - Ap_2(k)(A+E_n)^T -\\
-(A+E_n)p_2^T(k)A^T + Ap_3(k)A^T + QS^TK_1^T(k-1)(A+E_n)^T -\\
-QS^TK_2^T(k-1)A^T + (A+E_n)K_1(k-1)SQ -\\
-AK_2(k-1)SQ - (A+E_n)Q - Q(A+E_n)^T + 2Q;\\
\tilde{p}_2(k) = p_1(k)(A+E_n)^T - p_2^T(k)A^T + K_1(k-1)SQ - Q;\\
\tilde{p}_3(k) = p_1(k).
\end{gathered} \tag{33}
$$

В (33) начальные условия являются соответствующими блоками матрицы

$$\bar{P}_0 = \begin{pmatrix} p_{1,0} & p_{2,0}^T \\ p_{2,0} & p_{3,0} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления оценки вектора состояния системы (1) можно из уравнения (14), используя представление входящих в него блочных матриц (8), (13), (31), $\bar{A}$, $\bar{S}$ и $K(k)$, получить уравнение

$$\hat{x}(k+1) = (A+E_n)\hat{x}(k) - A\hat{x}(k-1) + K_1(k)(y(k+1) - S(A+E_n)\hat{x}(k) + SA\hat{x}(k-1)). \tag{34}$$

Для закона фильтрации (34) начальные условия задаются в соответствии с начальными условиями для фильтра (14) в виде

$$\hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \hat{x}(-1) = \mathbf{M}\{x(-1)\} = \bar{x}_{-1}.$$

Результаты вычислительного эксперимента. Рассмотрим применение алгоритма фильтрации для модели второго порядка вида (1), канала наблюдений (2) со следующими значениями параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}02 \end{pmatrix}, \quad V = 0{,}8,$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм фильтрации исследовался для неизвестного кусочно-постоянного возмущения с двумя возможными значениями компонент вектора f:

$$f_1(k) = f_2(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le k \le 9, \\ -1, & \text{если } 9 < k < 25, \\ 1, & \text{если } 25 \le k \le 50. \end{cases}$$

Вычисление оценок вектора $x(k)$ можно выполнить, используя двухэтапный алгоритм фильтрации [1]. Модель измерений в этом случае с учетом (1) представляется в виде

$$y(k+1) = Sx(k+1) + v(k+1) = SAx(k) + Sf + Sq(k) + v(k+1).$$

Рекуррентные уравнения, осуществляющие оценивание неизвестного вектора f, имеют следующий вид:

$$\hat{f}(k+1) = \hat{f}(k) + K_f(k)(y(k+1) - SA\hat{x}(k) - S\hat{f}(k)), \quad \hat{f}(0) = \bar{f}_0,$$

$$K_f(k) = P_f(k)S^T(SP_f(k)S^T + SQS^T + V)^{-1},$$

$$P_f(k+1) = (E_2 - K_f(k)S)P_f(k),\ P_f(0) = P_{f_0},$$

где

$$\mathbf{M}\{f\} = \bar{f}_0, \quad \mathbf{M}\{(f-\bar{f}_0)(f-\bar{f}_0)^T\} = P_{f_0}.$$

Оценка вектора состояния для объекта с неизвестным постоянным входом находится из уравнения

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + \hat{f}(k) + K_x(k)(y(k+1) - SA\hat{x}(k) - S\hat{f}(k)),$$

где $K_x(k)$ — матрица коэффициентов передачи фильтра Калмана. При моделировании $\bar{f}_0$ и P_{f_0} задавались как

$$\bar{f}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{f_0} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

Применение расширенного фильтра Калмана [2] для данного примера (в этом случае (1) расширяется посредством добавления уравнения $f(k+1) = f(k)$) приводит к необходимости построения фильтра Калмана для дискретной системы с матрицами динамики, канала наблюдений и интенсивностей аддитивных возмущений соответственно:

$$\begin{pmatrix} A & E_2 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Использование в данном примере методов, описанных в работах [3–6], невозможно в силу невыполнения условий существования оптимальных оценок неизвестного входного вектора

$$n \ge m, \quad l \ge m. \tag{35}$$

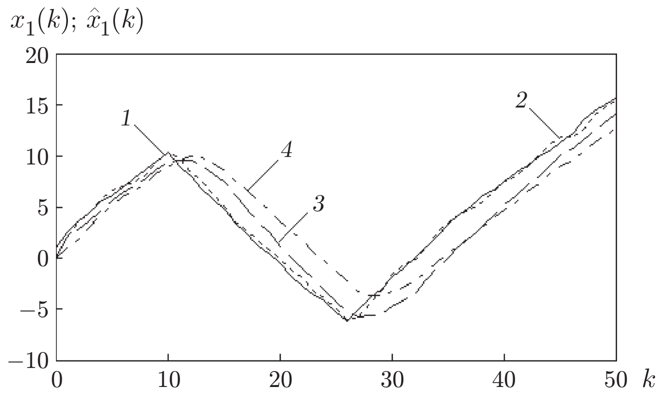

Рис. 1. Реализации процессов для первой координаты (кривая *1* — реализация $x_1(k)$; *2* — оценка $\hat{x}_1(k)$, построенная по алгоритму (34); *3* — по двухэтапному алгоритму фильтрации; *4* — с помощью расширенного фильтра Калмана)

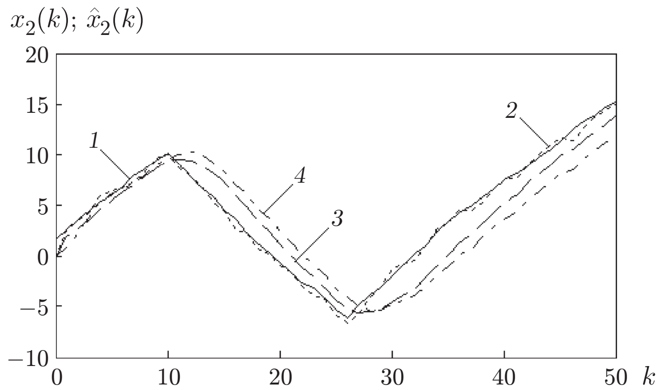

Рис. 2. Реализации процессов для второй координаты (кривая *1* — реализация $x_2(k)$; *2* — оценка $\hat{x}_2(k)$, построенная по алгоритму (34); *3* — по двухэтапному алгоритму фильтрации; *4* — с помощью расширенного фильтра Калмана)

В [3–6] неизвестное возмущение определяется в виде $f = Gd$, где d — неизвестный m-мерный вектор, G — $n \times m$-известная матрица. Здесь $G = E_2$, $n = 2$, $m = 2$, $l = 1$, а это означает, что условия (35) не выполняются.

Реализации оцениваемых процессов и их оценок для трех сравниваемых фильтров приведены на рис. 1, 2. Отметим, что при реализации алгоритма фильтрации (34) начальные значения $K(-1)$ задавались нулевыми.

Как видно из рисунков, качество оценок, полученных с помощью фильтра (34), лучше, чем для двухэтапного алгоритма фильтрации и расширенного фильтра Калмана, использующих оценки неизвестного возмущения. Отметим также, что для алгоритма фильтрации (34) нет необходимости в задании априорной информации о характеристиках распределения начальных значений $\bar{f}_0$ и P_{f_0}.

Заключение. В данной работе предложен алгоритм синтеза дискретного оптимального фильтра для объекта, возмущения которого содержат неизвестную постоянную составляющую. Алгоритм построен на основе расширения пространства состояния и исключения из модели неизвестной составляющей. В отличие от классического фильтра Калмана предложенный фильтр (34) использует рекуррентные оценки, построенные на двух предыдущих тактах. Как показали результаты вычислительного эксперимента, алгоритм может быть использован в случае неизвестной аддитивной составляющей возмущений кусочно-постоянного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Friedland B.** Treatment of bias in recursive filtering // IEEE Trans. Automat. Contr. 1969. **AC-14**. P. 359–367.
2. **Astrom K., Eykhoff P.** System identification — A survey // Automatica. 1971. **7**. P. 123–162.
3. **Darouach M., Zasadzinski M.** Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs // Automatica. 1997. **33**, N 4. P. 717–719.
4. **Hou M., Patton R.** Optimal filtering for systems with unknown inputs // IEEE Trans. Automat. Contr. 1998. **AC-43**. P. 445–449.
5. **Darouach M., Zasadzinski M., Xu S. J.** Full-order observers for linear systems with unknown inputs // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. **AC-39**. P. 606–614.
6. **Gillijns S., Moor B.** Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // Automatica. 2007. **43**. P. 111–116.
7. **Медич Дж.** Статистически-оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973. 440 с.
8. **Athans M.** The matrix minimum principle // Inform. and Contr. 1968. **11**, N 5/6. P. 592–606.
9. **Амосов А. А., Колпаков В. В.** Скалярно-матричное дифференцирование и его применение к конструктивным задачам теории связи // Проблемы передачи информации. 1972. **8**, вып. 1. С. 3–15.

Поступила в редакцию 12 января 2009 г.