УДК 53.08 : 681.3.08

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ РЕАЛИЗАЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

С. В. Леньков

Физико-технический институт УрО РАН,
426001 г. Ижевск, ул. Кирова, 132
E-mail: gep@pti.udm.ru

Рассмотрен усовершенствованный алгоритм вычисления взаимокорреляционных функций (ВКФ) сигналов, использующий алгоритм быстрого преобразования Фурье и квадратурные формулы метода трапеций и метода Симпсона. Проведен анализ погрешности вычисления ВКФ путем сравнения ВКФ, полученных на непрерывных конечных реализациях сигналов, и ВКФ, полученных усовершенствованными алгоритмами вычисления на реализациях дискретных сигналов. Показано, что в результате применения таких алгоритмов вычисления ВКФ получается более точная первичная оценка ВКФ. Описаны усовершенствованные алгоритмы вычислений.

Ключевые слова: взаимокорреляционная функция, быстрое преобразование Фурье, квадратурные формулы.

Введение. При работе системы обнаружения несанкционированного воздействия на трубопровод нахождение места воздействия происходит по скорости распространения звука и временному сдвигу, определяемому по максимуму взаимокорреляционных функций (ВКФ) сигналов с датчиков, расположенных на трубопроводе. Кроме того, система должна определять тип аварийной ситуации (утечка или удар), а также в случае разгерметизации (утечки) размер отверстия или растрескивания. Это требует существенного повышения точности оценки спектров, параметров ВКФ и автокорреляционных функций (АКФ) ударных и виброакустических сигналов (шумов утечки) с датчиков. Сигналы регистрируются и обрабатываются в реальном масштабе времени в автономных регистраторах сигналов, которые установлены на трубопроводе и поэтому имеют ограниченные возможности. Требуемое повышение точности оценки спектров и корреляционных функций и их параметров можно реализовать, используя усовершенствованные быстрые алгоритмы вычисления корреляционных функций и спектров. Алгоритмы вычисления оценок корреляционных функций конечных дискретных сигналов приведены в [1], а вопросы повышения точности оценки спектров рассмотрены в [2].

В данной работе рассматриваются методы повышения точности оценки (вычисления) корреляционных функций коротких реализаций дискретных сигналов, основанные на использовании быстрого преобразования Фурье (БПФ) и высших квадратурных формул.

Анализ алгоритма повышения точности оценки ВКФ. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — аналоговые сигналы с датчиков, имеющие финитные спектры $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ соответственно, связанные между собой интегральными преобразованиями Фурье [3]:

$$u_{1,2}(t) = \int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} S_{1,2}(\omega)\exp(j\omega t)\frac{d\omega}{2\pi}, \quad S_{1,2}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{1,2}(t)\exp(-j\omega t)dt, \tag{1}$$

а дискретные спектры, полученные БПФ, связаны с непрерывными спектрами $S_1(\omega)$ и

$S_2(\omega)$ соотношением [4, 5]

$$S_{1,\,2}(\omega_i) = \Delta t \int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} S_{1,\,2}(\omega) \frac{\exp(j(\omega - \omega_i)T) - 1}{\exp(j(\omega - \omega_i)\Delta t) - 1} \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{2}$$

где T — длительность реализации; Δt — шаг дискретизации; ω_m — наибольшая верхняя частота спектров сигналов.

Взаимокорреляционная функция реализаций двух непрерывных сигналов [3]

$$B_{1,\,2}(\tau) = \int\limits_0^T u_1(t)\theta(t)u_2(t-\tau)\theta(t-\tau)dt, \tag{3}$$

где $\theta(t)$ — временное окно, используемое при корреляционном анализе; τ — временной сдвиг.

Оценка ВКФ с использованием прямоугольного временного окна. Вначале рассмотрим оценку ВКФ реализаций сигналов при применении наиболее распространенного прямоугольного временного окна. Выражение (3) для положительных и отрицательных значений τ при этом примет вид

$$B_{1,\,2}(\tau) = \begin{cases} \int\limits_\tau^T u_1(t)u_2(t-\tau)dt, & \forall\, 0 \le \tau \le T, \\ \int\limits_0^{T+\tau} u_1(t)u_2(t-\tau)dt, & \forall -T \le \tau \le 0. \end{cases} \tag{4}$$

Используя спектральное представление сигналов, выражение для ВКФ (4) согласно (1) можно представить в виде

$$B_{1,\,2}(\tau) = \int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} \int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} S_1(\omega_1)S_2^*(\omega_2)F(\omega_1 - \omega_2;\, \tau)\exp(j\omega_2\tau)\,\frac{d\omega_1}{2\pi}\,\frac{d\omega_2}{2\pi},$$

$$F(\omega_1 - \omega_2; \tau) = \begin{cases} \dfrac{\exp(j(\omega_1-\omega_2)T) - \exp(j(\omega_1-\omega_2)\tau)}{j(\omega_1-\omega_2)}, & \forall\, 0 \le \tau \le T, \\ \dfrac{\exp(j(\omega_1-\omega_2)(T+\tau)) - 1}{j(\omega_1-\omega_2)}, & \forall -T \le \tau \le 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $S_1^*(\omega_1)$, $S_2^*(\omega_2)$ — комплексно-сопряженные спектры сигналов.

Оценка ВКФ методом прямоугольников. Выражение для оценки ВКФ, полученной цифровым интегрированием дискретного сигнала методом прямоугольников, является дискретным аналогом выражения (4) и имеет вид

$$\tilde{B}_{1,\,2}(\tau_p) = \begin{cases} \sum\limits_{n=p}^{N-1} u_1(t_n)u_2(t_n-\tau_p)\Delta t, & \forall\, 0 \le \tau_p \le T, \quad \forall\, 0 \le p \le N-1, \\ \sum\limits_{n=0}^{N-1+p} u_1(t_n)u_2(t_n-\tau_p)\Delta t, & \forall -T \le \tau_p \le 0, \quad \forall -N+1 \le p \le 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $N = 2^m$ — основной объем выборки, хранящийся в памяти цифровой измерительной системы; m — целое число; $\tau_p = p\Delta t$ — временной сдвиг; $p \in [-N+1\ N-1]$, $n \in [0\ N-1]$ — целые числа. Интегральная сумма в (6) обычно вычисляется с помощью алгоритмов прямого и обратного БПФ. Так как при обратном БПФ значения ВКФ для отрицательных значений сдвигов τ выводятся зеркально симметрично относительно середины реализации сигнала, то для правильного вывода графика ВКФ для положительных и отрицательных сдвигов τ необходимо исходные объемы реализаций сигналов удвоить с помощью процедуры дополнения нулями.

Используя спектральное представление отсчетов сигнала и проведя преобразования, аналогичные приведенным в [4, 5], выражение (6) для оценки ВКФ можно представить в виде интегрального соотношения

$$\tilde{B}_{1,\,2}(\tau_p) = \int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m}\int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} S_1(\omega_1)S_2^*(\omega_2)\tilde{F}(\omega_1-\omega_2;\,\tau_p)\exp(j\omega_2\tau_p)\,\frac{d\omega_1}{2\pi}\,\frac{d\omega_2}{2\pi}, \tag{7}$$

$$\tilde{F}(\omega_1-\omega_2;\tau_p) = \begin{cases} \Delta t\,\dfrac{\exp(j(\omega_1-\omega_2)T)-\exp(j(\omega_1-\omega_2)\tau_p)}{\exp(j(\omega_1-\omega_2)\Delta t)-1}, & \forall\, 0 \le \tau_p \le T, \\[2ex] \Delta t\,\dfrac{\exp(j(\omega_1-\omega_2)(T+\tau_p))-1}{\exp(j(\omega_1-\omega_2)\Delta t)-1}, & \forall -T \le \tau_p \le 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из сравнения выражения для спектров дискретных сигналов (2) и выражений для ВКФ (7), (8) следует, что для корректного вычисления ВКФ необходимо осуществить передискретизацию сигналов (увеличить частоту дискретизации $\omega_D = 2\pi/\Delta t$), как минимум, в 2 раза относительно предельного требования $2\omega_m = \omega_D$ [3], необходимого для оцифровки сигналов без искажения их спектров. Это связано с тем, что при вычислении ВКФ происходит нелинейное преобразование (перемножение) сигналов.

Погрешность оценки ВКФ определим на сетке сдвигов $\tau_p = p\Delta t$ нормой вида

$$\Pi = \left\|\tilde{B}_{1,\,2}(\tau_p) - B_{1,\,2}(\tau_p)\right\| = \max_p\left|\tilde{B}_{1,\,2}(\tau_p) - B_{1,\,2}(\tau_p)\right|, \tag{9}$$

которая используется для анализа поведения ограниченных дискретных функций. Согласно выражениям (5), (7) и (8) погрешность оценки ВКФ (9) при цифровом интегрировании дискретного сигнала методом прямоугольников примет вид

$$\Pi_1 = \max_p\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega_1)S_2^*(\omega_2)D(\omega_1-\omega_2)G_1(\omega_1-\omega_2)\exp(j\omega_2\tau_p)\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}\right|, \tag{10}$$

$$D(\omega_1-\omega_2) = \begin{cases} \exp(j(\omega_1-\omega_2)T)-\exp(j(\omega_1-\omega_2)\tau_p), & \forall\, 0 \le \tau_p \le T, \\[2ex] \exp(j(\omega_1-\omega_2)(T+\tau_p))-1, & \forall -T \le \tau_p \le 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$G_1(\omega_1-\omega_2) = \Delta t\Big(\frac{1}{\exp(j(\omega_1-\omega_2)\Delta t)-1} - \frac{1}{j(\omega_1-\omega_2)\Delta t}\Big).$$

Оценка ВКФ с использованием квадратурных формул высших порядков и БПФ. Представим метод цифрового интегрирования с помощью формулы трапеций. При применении метода трапеций интегральная сумма в (6) по первым N слагаемым вычисляется прямым и обратным БПФ, а затем происходит аддитивное преобразование полученного выражения путем добавления к нему величин

$$0{,}5\Delta t(u_1(T)u_2(T-\tau_p) - u_1(\tau_p)u_2(0)), \quad \forall\tau_p \ge 0,$$

$$0{,}5\Delta t(u_1(T+\tau_p)u_2(T) - u_1(0)u_2(-\tau_p)), \quad \forall\tau_p \le 0.$$

Объем выборки, необходимый для реализации данного алгоритма, равен $N+1$.

Таким образом, спектральное представление оценки ВКФ при интегрировании по формуле трапеций имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{1,2}(\tau_p) = \frac{1}{T}\int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m}\int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} S_1(\omega_i)S_2^*(\omega_i)\tilde{F}(\omega_1-\omega_2;\,\tau_p)\times \\ \times\Big[\frac{\exp(j(\omega_1-\omega_2)\Delta t)+1}{2}\Big]\exp(j\omega_2\tau_p)\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}.\end{aligned} \tag{12}$$

Погрешность оценки ВКФ согласно (4), (7), (8) и (11) примет вид

$$\Pi_2 = \max_p\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega_1)S_2^*(\omega_2)D(\omega_1-\omega_2)G_2(\omega_1-\omega_2)\exp(j\omega_2\tau_p)\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}\right|, \tag{13}$$

$$G_2(\omega_1-\omega_2) = \Delta t\Big(\frac{1}{\exp(j(\omega_1-\omega_2)\Delta t)-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{j(\omega_1-\omega_2)\Delta t}\Big). \tag{14}$$

Оценка ВКФ с помощью формулы Симпсона. Интегрирование в (4) по общей формуле Симпсона корректно только для четных значений $p = 2q$ [6]. Для вычисления оценки ВКФ с использованием интегрирования по методу Симпсона необходимо вектор отсчетов первого сигнала $u_2(t_n)$ размера $N+1$ скалярно умножить на вектор коэффициентов $g_n = [1/3,\ 4/3,\ 2/3,\ 4/3,\ \ldots,\ 4/3,\ 2/3,\ 1/3]$ такого же размера.

Тогда выражения для оценки ВКФ можно представить как

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{1,2}(\tau_p) &= \Delta t\sum_{n=p}^{N-1} u_1(t_n)g_{n-p}u_2(t_n-\tau_p) = \frac{4\Delta t}{3}\sum_{n=p}^{N-1} u_1(t_n)u_2(t_n-\tau_p) - \\ &- \frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=p/2}^{N/2-1} u_1(t_{2n})u_2(t_{2n}-\tau_p) + \\ &+ \frac{\Delta t}{3}(u_1(T)u_2(T-\tau_p) - u_1(\tau_p)u_2(0)), \quad \forall\tau_p \ge 0 \quad (p \ge 0); \\ \tilde{B}_{1,2}(\tau_p) &= \Delta t\sum_{n=0}^{N-1+p/2} g_n u_1(t_n)u_2(t_n-\tau_p) = \frac{4\Delta t}{3}\sum_{n=0}^{N-1+p/2} u_1(t_n)u_2(t_n-\tau_p) - \\ &- \frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=0}^{N/2-1+p/2} u_1(t_{2n})u_2(t_{2n}-\tau_p) + \\ &+ \frac{\Delta t}{3}(u_1(T+\tau_p)u_2(T) - u_1(0)u_2(-\tau_p)), \quad \forall\tau_p \le 0 \quad (p \le 0).\end{aligned} \tag{15}$$

Первые интегральные суммы в выражении (15) для $p > 0$ и $p < 0$ вычисляются с помощью БПФ согласно описанному выше алгоритму, а затем к полученному результату добавляются величины $\Delta t(u_1(T)u_2(T-\tau_p))/3$, $\forall\tau_p \geq 0$; $\Delta t(u_1(T+\tau_p)u_2(T))/3$, $\forall\tau_p \leq 0$, соответственно.

Спектральное представление выражения для оценки ВКФ при интегрировании по формуле Симпсона согласно (15) и описанному выше примет вид

$$\tilde{B}_{1,2}(\tau_p) = \frac{\Delta t}{3}\int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m}\int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} S_1(\omega_1)S_2^*(\omega_2)\tilde{F}(\omega_1-\omega_2;\,\tau_p)\times$$
$$\times\left[4 - \frac{2}{\exp(j(\omega_1-\omega_2)\Delta t)+1} + (\exp(j(\omega_1-\omega_2)\Delta t)-1)\right]\exp(j\omega_2\tau_p)\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}. \tag{16}$$

Погрешность оценки ВКФ в соответствии с (5), (9) и (16) запишем в виде

$$\Pi_3 = \max_p\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega_1)S_2^*(\omega_2)D(\omega_1-\omega_2)G_3(\omega_1-\omega_2)\exp(j\omega_2\tau_p)\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}\right|, \tag{17}$$

$$G_3(\omega_1-\omega_2) =$$
$$= \frac{\Delta t}{3}\Big(\frac{4}{\exp(j(\omega_1-\omega_2)\Delta t)-1} - \frac{2}{\exp(j(\omega_1-\omega_2)2\Delta t)-1} + 1 - \frac{3}{j(\omega_1-\omega_2)\Delta t}\Big). \tag{18}$$

Анализ выражений (16)–(18) показывает, что для применения метода Симпсона необходима передискретизация сигнала еще в 2 раза по сравнению с рассмотренными выше методами вычисления ВКФ.

Анализ погрешностей оценки. Полученные в данной работе выражения позволяют провести полный анализ ВКФ и погрешностей оценки ВКФ сигналов с произвольными известными спектрами. Для иллюстрации точности вычисления оценки ВКФ с помощью предлагаемых алгоритмов рассмотрим погрешность оценки АКФ на модельном входном косинусоидальном сигнале с точной привязкой фазы запуска АЦП. Спектр такого сигнала определяется выражением [3]

$$S(\omega) = \pi A[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)],$$

где A — амплитуда; Ω — круговая частота, изменяющаяся в диапазоне $0 \leq \Omega \leq \omega_m$; $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака. Заметим, что качественные результаты, полученные с использованием нормы (9) для модельного косинусоидального сигнала, справедливы и для любых интегрируемых с квадратом сигналов с произвольным спектром. Поскольку АКФ есть четная функция временного сдвига τ, то рассмотрение погрешностей будем проводить для $\tau > 0$.

Погрешность оценки АКФ реализации косинусоидального сигнала согласно (9)–(11) для положительных значений τ примет вид

$$\Pi_1^* = 2A^2\max_p\left|\frac{\Omega\Delta t\cos(\Omega\Delta t)}{\sin(\Omega\Delta t)} + \frac{\Omega\Delta t\sin(\Omega T)}{\cos(\Omega T)} - 1\right|\left|\frac{\sin(\Omega(T-\tau_p))\cdot\cos(\Omega T)}{\Omega}\right|.$$

Погрешность Π_1^* при $\Omega\Delta t \ll 1$ имеет порядок малости, пропорциональный $\Omega\Delta t$.

Погрешность определения АКФ реализации косинусоидального сигнала при интегрировании методом трапеций согласно (13) и (14) для положительных значений τ будет иметь вид

$$\Pi_2^* = \max_p \left|\tilde{B}_{1,1}(\tau_p) - B_{1,1}(\tau_p)\right| = 2A^2 \max_p \left|\frac{\Omega\Delta t\cos(\Omega\Delta t)}{\sin(\Omega\Delta t)} - 1\right| \left|\frac{\sin(\Omega(T-\tau_p))\cdot\cos(\Omega T)}{\Omega}\right|.$$

Погрешность Π_2^* при $\Omega\Delta t \ll 1$ имеет порядок малости, пропорциональный $(\Omega\Delta t)^2/2$.

Погрешность определения АКФ реализации косинусоидального сигнала при интегрировании по методу Симпсона согласно (17), (18) для положительных значений τ запишем как

$$\Pi_3^* = A^2 \max_p \left|\frac{8\Omega\Delta t\cos(\Omega\Delta t)}{\sin(\Omega\Delta t)} - \frac{4\Omega\Delta t\cos(2\Omega\Delta t)}{\sin(2\Omega\Delta t)} - 6\right| \left|\frac{\sin(\Omega(T-\tau_p))\cdot\cos(\Omega T)}{3\Omega}\right|.$$

Погрешность Π_3^* при $\Omega\Delta t \ll 1$ имеет порядок малости, пропорциональный $(\Omega\Delta t)^4/3$.

Отношения полученных выше погрешностей оценки АКФ при $\Omega\Delta t = \pi/8$ выражаются как

$$\Pi_2^*/\Pi_1^* = \pi/16 \approx 0{,}196; \quad \Pi_3^*/\Pi_1^* = \pi^3/1536 \approx 0{,}020; \quad \Pi_3^*/\Pi_2^* = \pi^2/86 = 0{,}115.$$

Из приведенных соотношений видно, что применение высших квадратурных формул дает значительное уменьшение погрешности вычислений АКФ и ВКФ дискретных сигналов.

Для анализа погрешностей оценки ВКФ в случае использования в процессе измерения временного окна $\Theta(t)$, отличающегося от прямоугольного, необходимо получить выражения для ВКФ непрерывного сигнала и оценки ВКФ. Достаточно во всех приведенных выше выражениях для спектрального представления ВКФ непрерывного сигнала, оценок ВКФ и соответствующих погрешностей заменить спектры $S_1(\omega_1)$, $S_2^*(\omega_2)$ спектрами $S_{1\Theta}(\omega)$, $S_{2\Theta}^*(\omega)$, полученными сверткой спектров $S_1(\omega_1)$, $S_2^*(\omega_2)$, и частотной характеристикой временного окна $H(\omega)$:

$$S_{1\Theta}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_1(\zeta)H(\omega-\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi};$$

$$S_2^*(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_2^*(\zeta)H^*(\omega-\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}; \tag{19}$$

$$H(\omega) = \int\limits_0^T \theta(t)\exp(-j\omega t)dt.$$

Заключение. Полученные в данной работе выражения для ВКФ и их оценки, а также соотношения (18) позволяют анализировать погрешности оценки ВКФ как при использовании наиболее распространенного прямоугольного временного окна, так и в случае использования при измерении произвольного временного окна, отличающегося от прямоугольного. Применение усовершенствованных алгоритмов вычисления ВКФ дает возможность повысить точность оценки ВКФ, программные и вычислительные затраты при этом возрастают мало, поскольку основной массив данных обрабатывается с помощью БПФ. Особенно интересно применение метода Симпсона, хотя это и требует дополнительной передискретизации сигнала и увеличения массива данных по сравнению с другими методами в

2 раза. Применение квадратурных формул высшего порядка потребует соответствующего увеличения передискретизации, что снижает эффективность их использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сергиенко А. Б.** Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие. С.-Пб.: Питер, 2006. 751 с.
2. **Леньков С. В.** Повышение точности оценки спектров реализаций дискретных сигналов // Метрология. 2007. № 8. С. 27–31.
3. **Баскаков С. И.** Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк., 1988. 448 с.
4. **Леньков С. В.** Определение максимальной частоты спектра сигнала при оцифровке в системе вибродиагностики // Измер. техника. 2005. № 6. С. 46–49.
5. **Леньков С. В.** Измерение амплитуды синусоидального сигнала ускорения в системе вибродиагностики с помощью БФП и сигнатурного спектрального анализа // Датчики и системы. 2004. № 12. С. 12–14.
6. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.

Поступила в редакцию 13 мая 2009 г.