УДК 519.725 : 519.24

ЭФФЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ ГЕНЕРАТОРОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Б. Д. Борисов

Институт лазерной физики СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева 13/3
E-mail: borisov@laser.nsc.ru

Рассмотрена задача определения истинной (невыборочной) дисперсии параметра Аллана — основной характеристики нестабильности частоты генераторов, синтезаторов и стандартов частоты во временной области. Определены и сравнены по величине переменные, влияющие на эффективность оценки параметра. Для частотных флуктуаций со степенной спектральной плотностью мощности фликкерного типа наибольший вклад в точность оценки параметра вносит дисперсия оценки среднего значения частоты — величина, входящая в определение параметра Аллана и характеризующая качество усреднения на конечном временном интервале.

Ключевые слова: эффективная оценка, характеристика нестабильности частоты, дисперсия Аллана, фликкер-шум, минимум дисперсии, оптимальная фильтрация.

Введение. При аттестации генераторов, синтезаторов и стандартов частоты в качестве основной характеристики нестабильности частоты во временной области широко используется двухвыборочная дисперсия, или параметр Аллана $\sigma_y^2(2,\,\tau)$ в форме дисперсии первых разностей средних значений флуктуаций частоты $\bar{y}_i$:

$$\sigma_y^2(2,\tau) = \frac{1}{2}\left\langle(\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1})^2\right\rangle, \tag{1}$$

где $i, i+1$ — парные смежные интервалы с конечной длительностью τ секунд каждый и с паузой $\tau_p = 0$ между ними [1]. Символ $\langle\,\rangle$ обозначает оператор усреднения на бесконечном временном интервале. В работе [2] характеристика (1) представлена в форме, учитывающей уход (систематическое изменение) частоты за время τ. Выбор $\sigma_y^2(2,\,\tau)$ в качестве основной характеристики нестабильности частоты обусловлен ее отличительными, важными для практики свойствами: во-первых, характеристика состоятельна и существует для фликкерных флуктуаций частоты со спектральными плотностями мощности (СПМ) степенного типа благодаря свойствам передаточной функции дисперсии Аллана [1]; во-вторых, технической простотой реализации (1).

Смещенность и состоятельность оценок дисперсии Аллана для частотных и фазовых флуктуаций фликкерного типа рассмотрены в [1]. В практических измерениях эффективность оценки зависит от конечного объема парных выборок M и задается выборочной дисперсией $\hat{G}^2[\sigma_y^2(2,\,\tau)]$ дисперсии Аллана [1, 3].

Целью данной работы является определение потенциальной точности измерений характеристик нестабильности частоты и выявление других факторов, влияющих на эффективность оценки (1). Для этого необходимо исключить зависимость $\sigma_y^2(2,\,\tau)$ от M и найти истинную, невыборочную, дисперсию параметра Аллана $G^2[\sigma_y^2(2,\,\tau)]$ как второй центральный момент функции плотности распределения вероятностей параметра (1).

Невыборочная дисперсия параметра Аллана. Характеристика (1) является функцией случайных аргументов $\bar{y}_i$ и, следовательно, сама — случайная величина. Для определения ее статистической точности введем новые переменные

$$Y = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1}}{\sqrt{2}}; \quad Z = Y^2. \tag{2}$$

Обычно $\bar{y}_i$ имеют нормальное распределение за счет усреднения флуктуаций на интервалах τ [3]. Тогда Y также будет иметь нормальное распределение

$$p(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_Y}} \exp(-Y/2D_Y), \tag{3}$$

где D_Y — дисперсия Y.

Однако распределение $p(Z)$ уже не является нормальным, что не учитывалось явно в [3], и будет иметь вид [4]

$$p(Z) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi D_Y Z}\, \exp(-Z/2D_Y), & Z > 0, \\ 0, & Z \leqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Так как $\langle Z \rangle \neq 0$, для определения искомой дисперсии необходимо найти первый и второй (четвертый для Y) моменты случайной величины Z. С учетом (4) имеем [5]

$$m_Z = \int\limits_0^\infty p(Z) Z dZ = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_Y}} \int\limits_0^\infty Z^{1-1/2} \exp(-Z/2D_Y) dZ = D_Y, \tag{5}$$

$$D_Z = \int\limits_0^\infty p(Z) Z^2 dZ = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_Y}} \int\limits_0^\infty Z^{2-1/2} \exp(-Z/2D_Y) dZ = 3D_Y^2. \tag{6}$$

Используя соотношение между вторыми центральным и начальным моментами, получим из (5), (6) искомую дисперсию (второй центральный момент $\overset{\circ}{D}_Z$)

$$\overset{\circ}{D}_Z = D_Z - m_Z^2 = 2D_Y^2. \tag{7}$$

Раскрывая скобки в (1), имеем

$$D_Y = [\sigma^2(\bar{y}_i) - \rho_{i,i+1}], \tag{8}$$

где $\rho_{i,i+1}$ — корреляционный момент для смежных отсчетов $\bar{y}_i$, $\bar{y}_{i+1}$.

Подставляя (8) в (7), окончательно получим

$$G^2[\sigma_y^2(2,\, \tau)] = \overset{\circ}{D}_Z = 2[\sigma^2(\bar{y}_i) - \rho_{i,i+1}]^2. \tag{9}$$

Величина (9) и определяет невыборочную величину дисперсии (дисперсию дисперсии) параметра Аллана.

Из (9) следует, что истинный минимум дисперсии $G^2[\sigma_y^2(2,\, \tau)]$, как и выборочной $\hat{G}^2[\sigma_y^2(2,\, \tau)]$, зависит от качества сглаживания y_i на конечном интервале τ и степени коррелированности соседних отсчетов $\bar{y}_i$, $\bar{y}_{i+1}$. В [6] определен вклад ρ_k в дисперсию оценки параметра Аллана для частотных и фазовых флуктуаций с СПМ степенных видов. В [7] для этого типа шумов развита методика оптимальной фильтрации, обеспечивающая минимальные дисперсии сглаживания $\sigma^2(\bar{y}_i)$ на конечном временном интервале τ с учетом краевых эффектов на его концах.

Для примера используем эти результаты при определении эффективности оценки характеристики нестабильности частоты генератора с частотными флуктуациями наиболее известного типа фликкер-шума с СПМ вида $1/\omega$. Если величины y_i не используются дважды при подсчетах $\bar{y}_i$, $\bar{y}_{i+1}$ в смежных интервалах, то $\rho_k = -0{,}132$ Гц^2 [6]. Оптимальное значение $\sigma^2(\bar{y})$, определенное в [7] в стационарном приближении модели $1/\omega$ моделью СПМ вида

$$S(\omega) = \frac{a+\omega}{a^2+\omega^2}, \qquad a = 1/\tau,$$

равно $\sigma^2(\bar{y}) = 2{,}29$ Гц^2. Тогда согласно (9) получим

$$G^2[\sigma_y^2(2,\,\tau)]^2 = 11{,}7\ \text{Гц}^4.$$

Сравним значение этой дисперсии с величиной дисперсии только от конечного объема выборки M для этого вида фликкер-шума, определенной в [3]. Из табл. 1 в [3] имеем

$$\hat{\sigma}^2[\sigma_y^2(2,\,\tau)] = (2h_{-1}\log 2)^2\frac{(2{,}3M-2{,}6)}{(M-1)^2}. \tag{10}$$

Например, для $M = 10$ и $h_{-1} = 1$ Гц^2 (мощности фликкер-шума) эта величина равна 0,1 Гц^4.

Из сравнения ясно, что основной вклад в дисперсию оценки характеристики нестабильности частоты вносит не корреляция парных средних и объем выборки, а качество усреднения флуктуаций y_i на интервале τ при определении $\bar{y}_i$. Высокие значения оценок $\sigma^2(\bar{y})$ в (9) для этого типа шума связаны с характером его СПМ — растущей мощностью низкочастотных компонент при росте временного интервала τ. Таким образом, частотный фликкер-шум слабо подавляется за счет увеличения времени усреднения, и единственным в этом случае методом улучшения эффективности оценок является оптимальная фильтрация для получения $\bar{y}_i$ на интервалах τ [7].

Заключение. В данной работе выявлены главные факторы, влияющие на эффективность оценки основной характеристики нестабильности частоты генераторов любого спектрального диапазона во временной области — параметра Аллана. Показано, что основной вклад в дисперсию параметра вносит дисперсия оценки среднего значения частоты на конечном временном интервале τ. Для частотных флуктуаций с СПМ фликкерного типа уменьшение этих дисперсий достигается преимущественно с использованием оператора оптимальной фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рютман Ж.** Характеристики нестабильности фазы и частоты сигналов высокостабильных генераторов // ТИИЭР. 1978. **66**, № 9. С. 70.
2. **ГОСТ 8.441-81.** Меры частоты и времени высокой точности. Введ. 01.01.83. М.: Изд-во стандартов, 1981.
3. **Lesage P., Audon C.** Characterization of frequence stability: uncertainty due to the finite number of measurements // IEEE Trans. Instrum. and Meas. 1973. **22**, N 2. P. 157–161.

4. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций. М.: Физматгиз, 1962. С. 565–576.
5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Мир, 1972. С. 352.
6. **Yoshimura K.** Characterization of frequence stability: uncertainty due to the autocorrelation of the frequence fluctuations // IEEE Trans. Instrum. and Meas. 1978. **27**, N 1.
7. **Борисов Б. Д.** Оптимальная фильтрация частоты сигнала на фоне фликкер-шумов // Автометрия. 2008. **44**, № 4. С. 42–51.

Поступила в редакцию 3 апреля 2009 г.