УДК 519.246.8

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕЗОННОГО ПРОЦЕССА НА ПРИМЕРЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

Б. Н. Луценко

*Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,
630090, г. Новосибирск, ул. Институтская, 6
E-mail: bor@kti.nsc.ru*

Приведен способ оценки некратных периодов сезонности на примере данных циклической солнечной активности в виде годовых чисел Вольфа. Полученные значения периодов используются при построении мультипликативной сезонной модели, количество периодов в которой практически не может превышать пяти. Описаны два варианта алгоритма выбора начальных приближений параметров модели с использованием датчика псевдослучайных чисел. Приведена модификация двухтактного алгоритма скорейшего спуска, повысившая его быстродействие и устойчивость. Для неполных неадекватных моделей АРСС предложен дополнительный критерий локальной близости траектории, формируемой моделью, к фактическим данным, который может повысить точность прогноза.

Ключевые слова: временные ряды, стохастические модели, линейные нестационарные модели, сезонные ряды, периоды сезонности, модели АРСС и АРПСС, идентификация модели, периоды солнечной активности, числа Вольфа, прогнозирование.

Введение. Объектом исследования в данной работе выбран циклический процесс с некратными периодами сезонности. Его характерной особенностью являются вариации амплитуды и протяженности циклов. Примером могут быть данные пульсирующей активности Солнца, проявляющиеся, в частности, в количестве темных пятен в его фотосфере — местах выхода сильных магнитных полей, вызывающих понижение их температуры в 5–10 раз. Эти данные в виде относительных чисел Вольфа ежегодно регистрируются с 1700 года.

Целью исследования является разработка инструментария для анализа таких процессов и выявление возможности описания циклической активности Солнца с помощью стохастических сезонных моделей.

Решение этой задачи включает:

— выбор математической модели, в нашем случае это мультипликативная сезонная модель авторегрессии (АР) и скользящего среднего (СС);

— выбор критерия качества модели, характеризующего ее пригодность к адекватному описанию процесса;

— оценку множества периодов сезонности процесса;

— идентификацию модели и оценку ее параметров вначале путем дискретного зондирования пространства параметров с отбором перспективных траекторий, а затем их уточнение с помощью двухтактной процедуры скорейшего спуска;

— проверку адекватности полученной модели исследуемому процессу и его прогноз.

Периоды сезонности. При построении моделей, описывающих стохастические процессы колебательного характера, не всегда заранее известны присущие им периоды сезонности. Оценка этих периодов включается в качестве одного из этапов в задачу идентификации самой модели. Периодичность сезонных воздействий позволяет рассчитывать на использование гармонических функций для их индикации. В выборочном спектре стохастического процесса сезонные периодичности проявляются в виде пиков. Стационарные временные ряды характеризуются случайным изменением частоты, амплитуды и фазы, и их выборочный спектр существенно флуктуирует вокруг теоретического спектра. Индикаторы же сезонных колебаний представляются величинами детерминированными и сохраняют свое положение на временной оси в различных реализациях процесса, если не изменяются условия его формирования.

Обозначим исследуемый процесс Z_t, $t \in (1, N)$. Дискретность поступления данных представляет масштабная временная единица, в которой выражаются периоды сезонных колебаний.

Спектр мощности случайной последовательности Z_t, называемый иногда периодограммой, вычисляется по известным формулам:

$$I(f_i) = \frac{N}{2}\,(a_i^2 + b_i^2), \qquad i \in (1, q), \tag{1}$$

где $q = N/2$ при четных N и $q = (N-1)/2$ при нечетных, а компоненты a_i и b_i находятся из формул

$$a_i = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} Z_t \cos 2\pi f_i t, \qquad i \in (1, q),$$

$$b_i = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} Z_t \sin 2\pi f_i t, \qquad f_i = f\,i, \quad f = \frac{1}{N}.$$

Функция $I(f_i)$ представляет интенсивность процесса Z_t на частоте f_i. Для выборочного спектра $I(f_i)$ с частоты f_i снимается ограничение кратности основной частоте $f = 1/N$ и она может принимать любое значение в интервале $(0, 1/2)$.

В случаях спектральной мощности и выборочного спектра используются обычно линейная частотная и гиперболическая временная шкалы. Но поскольку нас будут интересовать периоды сезонности, кратные дискретности поступления данных, удобнее использовать линейную временную и гиперболическую частотную шкалы. При этом частоты будут принимать значения $f_t = 1/t$, $t \in (2, N)$. Чтобы подчеркнуть отличие введенной шкалы от традиционной, обозначим периодограмму через

$$Q(t) = I(f_t). \tag{2}$$

Обратим внимание на то, что в отличие от спектра мощности с дискретным множеством q частот, кратных основной, здесь имеем $N-1$ частот f_t, выстроенных по гиперболическому закону, т. е. почти в 2 раза больше. Эта гиперболичность приводит к дополнительному расширению пиков, соответствующих различным периодам сезонности, с ростом их величины.

Пики индикаторов сезонности обычно возвышаются над выборочным спектром стационарного процесса, что является их характерным признаком.

Числа Вольфа. Объектом исследования были выбраны данные активности Солнца. Циклически изменяющаяся интенсивность протекающих в нем процессов проявляется, в частности, в появлении в его фотосфере темных пятен — мест выхода сильных магнитных полей ($(2{-}4) \cdot 10^3$ эрстед). Их температура в 5–10 раз меньше температуры окружающей фотосферы и составляет $(3{-}4) \cdot 10^3$ К. Пятна формируются по определенным законам, образуя биполярные группы с противоположной полярностью магнитного поля.

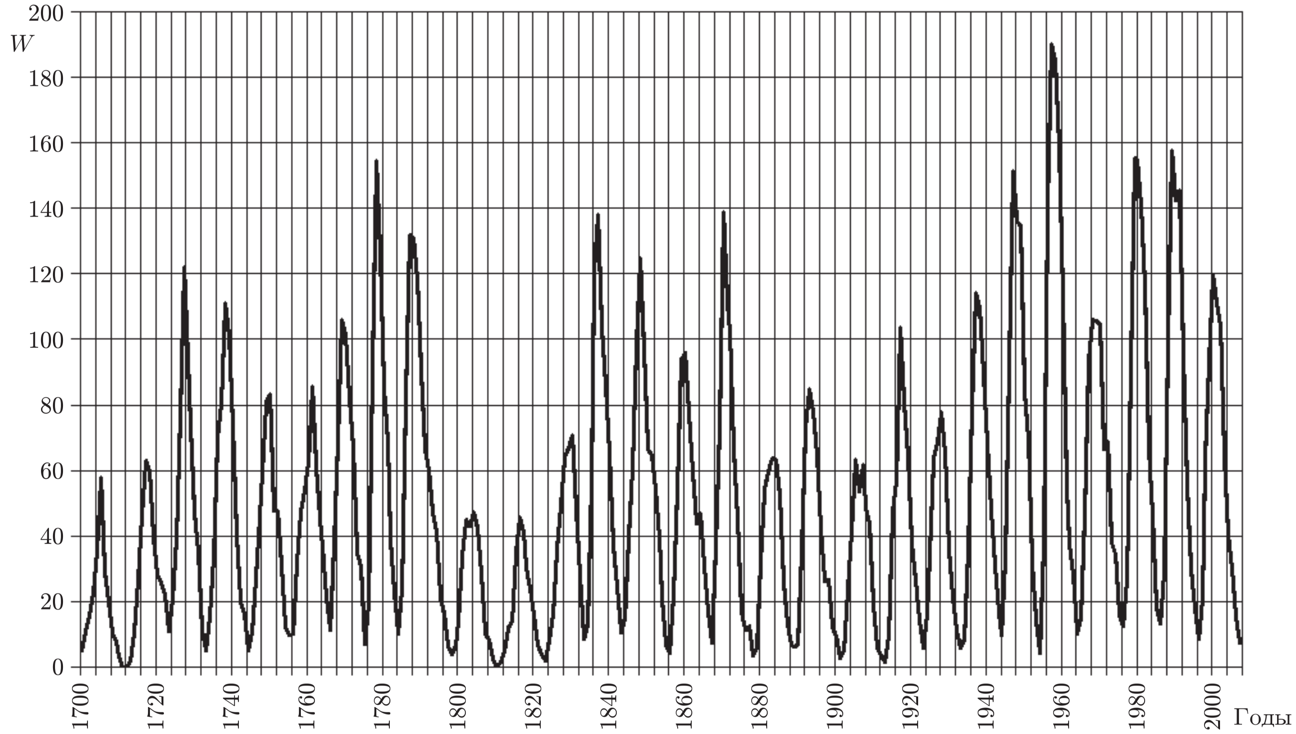

Рис. 1

Активность Солнца пульсирует, длительность циклов между минимумами меняется от 9 до 14 лет (в среднем 11,1 года), а между максимумами — от 7 до 17 лет. Амплитуда последовательных циклов также плавно изменяется примерно в 4 раза (от 45,8 до 190,2).

Каждый следующий цикл сопровождается изменением полярности магнитных полюсов Солнца, практически совпадающих с его географическими полюсами. Меняются при этом и полярности образующихся пятен.

Директор обсерватории в Цюрихе Р. Вольф тщательно изучил, систематизировал ранние наблюдения и организовал их регулярную регистрацию. Он предложил характеризовать пятнообразовательную активность Солнца специальным индексом W, пропорциональным сумме $f + 10g$, где f — количество всех отдельных пятен, а g — число образованных ими групп: $W = k(f + 10g)$. Здесь коэффициент k — фактор обсерватории, учитывающий качество наблюдений и позволяющий свести их в единую систему (обычно $k < 1$). Индекс W получил название относительных чисел Вольфа. Данные чисел Вольфа с годичной периодичностью имеются с 1700 года, а с ежедневной — с 1749 года [1, 2].

На рис. 1 представлены графически числа Вольфа за период с 1700 по 2007 годы [3].

Числа Вольфа обладают представительным набором периодов сезонности, в чем мы убедимся несколько позже. Некратность этих периодов порождает некоторую вариацию длительности циклов и, по-видимому, в значительной мере обусловливает изменение их амплитуды. Они являют достаточно сложный и богатый возможностями объект для «оттачивания» на нем алгоритмов идентификации и прогнозирования стохастических процессов, хотя правомочность трактовки этой последовательности как одной из реализаций некоторого стохастического процесса еще подлежит обоснованию.

На рис. 2 представлена периодограмма чисел Вольфа за период с 1700 по 2007 годы. По оси абсцисс отложены периоды сезонности в годах. Наиболее значимо представлен период 11 лет, вслед за ним идут периоды сезонности 10, 12, 103, 52, 43, 37, 29 лет и менее ярко выраженные периоды 21 год и 8 лет.

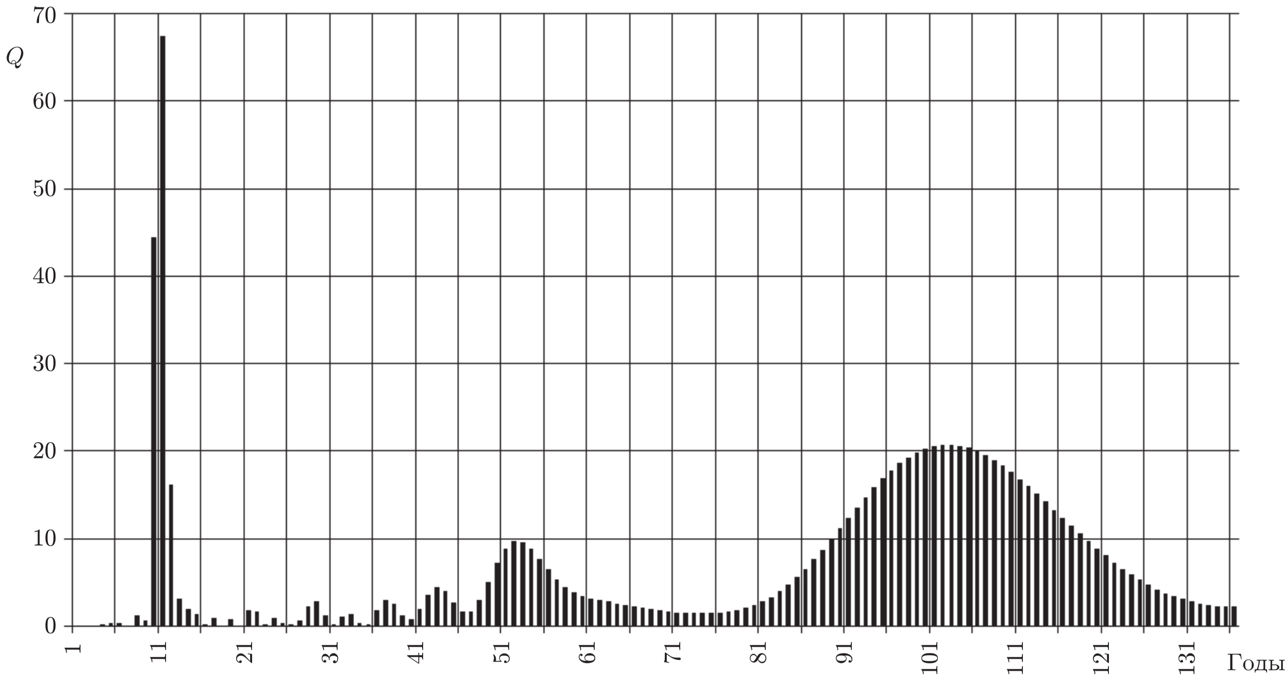

Рис. 2

Мультипликативная и аддитивная модели. Последовательность чисел Вольфа будем описывать мультипликативной АРСС или аддитивной АРПСС сезонными моделями [4–6]. Напомним выражения для мультипликативной модели и приведем выражение для аддитивной [7]. Обе модели задаются одинаковой структурой: k — количество интервалов сезонности (в том числе и единичный) для $i = 1, \ldots, k$; S_i — значения периодов сезонности; p_i, q_i — количество параметров АР и СС для каждого периода сезонности; d_i — количество сезонных разностей для каждого периода сезонности. Обозначим через B оператор сдвига на один такт назад, а через ∇ — оператор взятия разности. Оператор АР для периода сезонности S_i представим в виде

$$\Phi_{p_i}(\mathrm{B}^{S_i}) = 1 - \sum_{j=1}^{p_i} \varphi_{ij} \mathrm{B}^{jS_i}, \tag{3}$$

а оператор СС — в виде

$$\Theta_{q_i}(\mathrm{B}^{S_i}) = 1 - \sum_{j=1}^{q_i} \theta_{ij} \mathrm{B}^{jS_i}. \tag{4}$$

В этих обозначениях мультипликативная модель АРПСС имеет вид

$$\prod_{i=1}^{k} \Phi_{p_i}(\mathrm{B}^{S_i}) \nabla_{S_i}^{d_i} \tilde{Z}_t = \prod_{i=1}^{k} \Theta_{q_i}(\mathrm{B}^{S_i}) a_t. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{Z}_t$ — центрированный или смещенный исходный процесс, a_t — последовательность белого шума. Введя обозначение

$$\prod_{i=1}^{k} \nabla_{S_i}^{d_i} \tilde{Z}_t = W_t, \qquad t \in \Big(\sum_{i=1}^{k} S_i d_i + 1, N_Z \Big), \tag{6}$$

преобразуем выражение (5) к виду

$$\prod_{i=1}^{k}\Phi_{p_i}(\mathrm{B}^{S_i})W_t=\prod_{i=1}^{k}\Theta_{q_i}(\mathrm{B}^{S_i})a_t. \tag{7}$$

В аддитивной модели операторы АР и СС, соответствующие различным периодам сезонности, будут выражаться формулами, подобными (3) и (4) за исключением отсутствия у них единиц (операторов тождественного преобразования для мультипликативной модели, роль которых в случае аддитивной модели будут играть нулевые операторы). Теперь вместо произведения этих операторов используется сумма. Выражение для аддитивной модели в таком случае будет иметь вид

$$\Big(1-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i}\varphi_{ij}\mathrm{B}^{jS_i}\Big)W_t=\Big(1-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q_i}\theta_{ij}\mathrm{B}^{jS_i}\Big)a_t. \tag{8}$$

Избыточные параметры мультипликативной модели. При итерационном уточнении параметров модели удобно объединить все параметры АР и СС в единый вектор $\boldsymbol{\beta}$ размером

$$n_{\boldsymbol{\beta}}=\sum_{i=1}^{k}(p_i+q_i). \tag{9}$$

При использовании одношагового прогнозирования, основанного на разностной модели, удобнее ввести избыточные приведенные параметры модели, перемножив соответственно операторы в левой и правой части выражения. Количество избыточных параметров для приведенных операторов АР и СС составит соответственно

$$n_p=\prod_{i=1}^{k}(p_i+1)-1, \tag{10}$$

$$n_q=\prod_{i=1}^{k}(q_i+1)-1. \tag{11}$$

Эти параметры ранжируют по степеням B. При этом, если обозначить их через φ_i^* и θ_i^*, получим соответственно

$$\prod_{i=1}^{k}\Phi_{p_i}(\mathrm{B}^{S_i})=\sum_{i=0}^{n_p}\varphi_i^*\mathrm{B}^{l_i},\qquad \varphi_0^*=1,\quad l_0=0, \tag{12}$$

$$\prod_{i=1}^{k}\Theta_{q_i}(\mathrm{B}^{S_i})=\sum_{i=0}^{n_q}\theta_i^*\mathrm{B}^{m_i},\qquad \theta_0^*=1,\quad m_0=0, \tag{13}$$

и после введения переменной W_t согласно (6) исходная модель примет вид

$$\sum_{i=0}^{n_p}\varphi_i^*\mathrm{B}^{l_i}W_t=\sum_{i=0}^{n_q}\theta_i^*\mathrm{B}^{m_i}a_t, \tag{14}$$

похожий на модель АРСС, только теперь количество параметров избыточно, а степени операторов сдвига l_i и m_i следуют с неравномерным шагом. В таком виде описание процесса используется при идентификации модели в ходе извлечения последовательности a_t из $\tilde{Z}_t$.

На завершающем этапе при прогнозировании используется представление модели с, возможно, еще большим количеством избыточных параметров АР, получаемых в результате перемножения и упорядочения всех операторов $\prod\limits_{i=1}^{k} \Phi_{p_i}(\mathrm{B}^{S_i})\nabla_{S_i}^{d_i}$. Количество избыточных параметров АР будет

$$n_{pr} = \prod_{i=1}^{k} (p_i + 1)\,(d_i + 1) - 1, \tag{15}$$

а описание модели примет вид

$$\sum_{i=0}^{n_{pr}} \varphi_i^{**} \mathrm{B}^{l_i} \tilde{Z}_t = \sum_{i=0}^{n_q} \theta_t^{*} \mathrm{B}^{m_i} a_t. \tag{16}$$

Именно это вовлечение в прогноз избыточного количества данных исходного процесса и обеспечивает преимущество мультипликативной модели перед аддитивной моделью с теми же периодами сезонности и тем же количеством базовых параметров. Однако такое преимущество мультипликативной модели превращается постепенно в непреодолимое препятствие с увеличением количества ее параметров. Как видно из (10), при четырех периодах сезонности ($k = 4$) и двух параметрах для каждого из периодов ($p_i = 2, i \in (1, k)$) количество избыточных параметров n_p равно 80 при восьми базовых параметрах, а при $k = 5$ и десяти базовых количество избыточных параметров будет 242. По-видимому, $k = 5$ является пределом для мультипликативной сезонной модели. Рост количества избыточных параметров происходит по закону, близкому к экспоненциальному.

Двухтактный алгоритм модифицированного скорейшего спуска. Алгоритм осуществляет последовательно скорейший спуск вначале по обычному градиенту (первый такт), а затем из полученной точки минимума критерия по модифицированному с помощью матрицы вторых частных производных (матрицы Гессе) градиенту (второй такт). Далее эти два такта повторяются вплоть до достижения задаваемого порога точности поправок уточняемого вектора-столбца $\boldsymbol{\beta}$. Алгоритм описан в работе [7], здесь напомним лишь обозначения, хотя сам алгоритм претерпел значительные изменения. Его удалось существенно упростить, повысив устойчивость и быстродействие. Потребность в этом была вызвана усложнением рельефа критерия качества модели $\mathrm{Cr}(\boldsymbol{\beta})$, повлекшим затруднения с параболической аппроксимацией его сечений даже на небольшом интервале.

Обычный градиент представляет собой частную производную от функционала $\mathrm{Cr}(\boldsymbol{\beta})$ по вектору-столбцу параметров модели $\boldsymbol{\beta}$:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial\,\mathrm{Cr}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}. \tag{17}$$

Преобразованный с помощью матрицы Гессе $\mathbf{H}$ градиент [8] имеет вид

$$\mathbf{Ge} = \mathbf{H}^{+}\mathbf{G}, \tag{18}$$

где

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathrm{Cr}\,(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T},$$

а символ «+» означает операцию псевдообращения Мура — Пенроуза [9].

При сканировании вдоль градиента $\mathbf{G}$ или $\mathbf{Ge}$ формируется массив

$$f(k) = \mathrm{Cr}(\boldsymbol{\beta}_0 + k\Delta \mathbf{G}^*), \qquad k \in (kL,\, kR), \tag{19}$$

где $\boldsymbol{\beta}_0$ — начальное значение вектора параметров модели, Δ — относительный шаг зондирования, $\mathbf{G}^* = \mathbf{G}/||\mathbf{G}||$. Нормировка градиентов $\mathbf{G}$ и $\mathbf{Ge}$ исключает масштабную зависимость от исходного процесса, обеспечивая единообразие выбора параметра Δ. Процесс сканирования начинается со спуска при $k = -1, -2, ..., kL$. При этом вычисляется минимальное значение $f(k)$, начиная с $f(0) = \mathrm{Cr}(\boldsymbol{\beta}_0)$, и соответствующее ему значение k, т. е. $f_{\min}$ и $k_{\min}$. Движение по спуску прекращается, если выполнено условие

$$f(k_{\min} - i) > f_{\min}, \qquad i \in (1, q),$$

при этом $kL = k_{\min}$. Изредка встречаются ситуации, когда минимальное значение критерия оказывается в области подъема по градиенту. Тогда приходится вычислять значения $f(k)$ $(k \in (1, kR))$, и здесь возможно уточнение $f_{\min}$ и $k_{\min}$. В случае $k_{\min} > 0$, движение вдоль подъема прекращается, если выполнено условие

$$f(k_{\min} + 1) > f_{\min}, \qquad i \in (1,\ q),$$

при этом $kR = k_{\min}$. Если же $k_{\min} < 0$, вычисления прекращаются в случае

$$f(i) > f_{\min}, \qquad i \in (1, q),$$

тогда $kR = 0$. Полученное в результате скорейшего спуска уточненное значение вектора параметров будет иметь вид

$$\boldsymbol{\beta}_{\min} = \boldsymbol{\beta}_0 + k_{\min}\Delta \mathbf{G}^*. \tag{20}$$

Дальнейшее уточнение вектора параметров модели достигается повторением описанной выше процедуры с использованием вместо $\boldsymbol{\beta}_0$ вектора $\boldsymbol{\beta}_{\min}$, а вместо Δ, уменьшенного в ν раз, относительного интервала зондирования Δ/ν. Двух шагов уточнения в нашем случае оказывается достаточно.

Второй такт алгоритма начинается с вычисления обычного градиента для уточненного на втором шаге вектора параметров $\boldsymbol{\beta}_{\min}$, матрицы Гессе и преобразованного с ее помощью градиента $\mathbf{Ge}$ с последующей его нормировкой $\mathbf{Ge}^* = \mathbf{Ge}/||\mathbf{Ge}||$. Двухшаговый скорейший спуск по преобразованному градиенту осуществляется аналогично описанному выше. Спуск по обычному градиенту позволяет опуститься на дно «русла» в рельефе критерия, а спуск по преобразованному — осуществить перемещение вдоль русла. Благодаря использованию операций численного дифференцирования не возникает проблем со сложностью выражения для самого критерия.

Одна итерация включает два такта, каждый такт содержит два шага уточнения параметров. Процедура двухтактного спуска завершается после уменьшения нормы поправок для $\boldsymbol{\beta}_{\min}$ ниже задаваемого порога точности.

Выбор начальных приближений для параметров модели. В работе [7] для выбора начальных приближений использовался алгоритм дихотомического зондирования пространства параметров модели с выбором на каждом шаге задаваемого количества наиболее перспективных по заданному критерию претендентов на достижение глобального минимума. После нескольких шагов погружения в пространство параметров включался в работу алгоритм двухтактного скорейшего спуска. Алгоритм устойчиво работал в случае простых моделей с кратными периодами сезонности.

Для более сложных моделей с некратными периодами алгоритм дихотомического зондирования был дополнен множеством центров $\boldsymbol{\beta}_i$ генерируемых в задаваемом количестве с помощью датчика псевдослучайных чисел:

$$\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\beta}_0 + \mathrm{B}_r \boldsymbol{\Xi}_i, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\beta}_0$ — центр области сканирования; B_r — диагональная матрица с элементами b_i, $i \in$ $\in (1, m)$, определяющими размеры симметричного относительно $\boldsymbol{\beta}_0$ прямоугольного бруса — области генерирования центров; $\boldsymbol{\Xi}_i$ — вектор-столбец с компонентами

$$\xi_{ij} = \eta(j + (i-1)m) - 0{,}5, \qquad j \in (1, m), \tag{22}$$

в котором $\eta(k)$ — последовательность независимых равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ случайных чисел.

Выбирая положение центра и размеры области сканирования, можно более тщательно исследовать интересующие области пространства параметров модели.

Результаты зондирования дихотомических окрестностей всех генерируемых центров подвергались совместной обработке с отбором претендентов по критерию перспективности. Однако вскоре обнаружилось, что при таком способе выбора на некотором этапе один из претендентов может заблокировать дальнейшее участие остальных, заменив их своим дихотомическим окружением. Чтобы предотвратить блокировку, был реализован алгоритм с раздельной обработкой данных зондирования для каждого из сгенерированных центров.

После реализации алгоритмов с независимыми, генерируемыми с помощью датчика случайных чисел центрами время их работы увеличилось в сравнении с прежним алгоритмом кратно количеству генерируемых центров. При больших размерах $\boldsymbol{\beta}$ это уже было ощутимо. Вместе с тем в результате модификации алгоритма скорейшего спуска повысились его устойчивость и быстродействие и появилась возможность перехода к уточнению параметров при использовании скорейшего спуска непосредственно после генерирования начальных координат для векторов $\boldsymbol{\beta}$. Функции алгоритма дихотомического зондирования были реализованы частично при выборе генерируемых центров по минимальному значению критерия

$$\mathrm{Cr}(\boldsymbol{\beta}_i) < \mathrm{Cr}_0,$$

где Cr_0 — пороговое значение критерия, пропорциональное среднему квадрату исходной центрированной последовательности $\tilde{Z}_t$, $t \in (1, N)$. Естественно, часть генерируемых центров будет отвергнута по пороговому уровню. Но несмотря на эти издержки время, в среднем затраченное на генерирование и уточнение параметров $\boldsymbol{\beta}_i$, существенно сократится в сравнении с использованием процедуры дихотомического зондирования с последующим уточнением.

Уточнение параметров модели с помощью алгоритма скорейшего спуска выявило наличие различных $\boldsymbol{\beta}_i$ с близкими значениями критерия, не образующих единого кластера. Поскольку каждому значению $\boldsymbol{\beta}_i$ соответствует определенная реализация стохастического процесса, описываемого моделью АРСС или АРПСС с заданной структурой, это означает, что есть множество реализаций, отвечающих исходным данным и практически эквивалентных по выбранному критерию на интервале прогнозной базы. Однако поведение этих реализаций или траекторий вне прогнозной базы может быть различным. Появляется возможность выбора среди траекторий подмножества, обеспечивающего повышенную точность прогноза на интересующем нас интервале.

Критерии качества модели. Критерии $\mathrm{Cr}(\boldsymbol{\beta})$ обычно характеризуют степень адекватности модели описываемому ею процессу. Основным критерием является средний квадрат последовательности белого шума a_t, получаемой как разность одношагового прогноза процесса и фактических значений процесса на интервале прогнозной базы

$$S_2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} a_t^2. \tag{23}$$

Однако оказалось, что близкие значения этого критерия могут быть у различных значений вектора параметров $\boldsymbol{\beta}_i$, а каждому $\boldsymbol{\beta}_i$ из допустимой области значений параметров соответствует определенная траектория, связанная с исходным процессом и заданной структурой модели. Далее будем использовать термин «траектория» для обозначения функций, формируемых с помощью разностного уравнения, но не обязательно адекватных исходному процессу. Любое $\boldsymbol{\beta}_i$ из пространства параметров модели с заданной структурой будет порождать траекторию, некоторые из них могут соответствовать нестационарным или необратимым процессам. Если при этом последовательность a_t близка к белому шуму и модель признана адекватно описывающей исходный процесс Z_t, траекторию будем считать реализацией стохастического процесса.

Критерий S_2 характеризует ядро стохастического процесса, которое собственно его и порождает. И если достигнута белизна последовательности a_t в пределах возможностей ограниченной выборки, т. е. построена адекватная модель, дальнейшее ее уточнение на интервале прогнозной базы $\tilde{Z}_t$, $t \in (1, N)$, уже невозможно.

Поскольку нас интересует, прежде всего, прогноз исследуемого процесса и его точность, был введен дополнительный критерий $\hat{V}$ в виде средней дисперсии прогноза на интервале прогнозирования:

$$\hat{V} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} V(i), \tag{24}$$

где $V(i) = S_2 \sum\limits_{i=0}^{L-1} \psi_i^2$ (здесь L — интервал прогнозирования, а ψ_i — коэффициенты разложения исходного процесса Z_t по компонентам белого шума [7]).

Теперь среди $\boldsymbol{\beta}$, прошедших отбор по первому критерию S_2, можно выбирать претендентов по минимуму второго критерия $\hat{V}$. И тот и другой критерий связан со средним квадратом порождающего процесс белого шума a_t. В этом особенность стохастических процессов. Дисперсия их прогноза не может быть меньше среднего квадрата или дисперсии последовательности a_t, так как $\hat{V} > 1$. Если для процессов с детерминированными функциями, сопровождаемых аддитивными или мультипликативными шумами, с увеличением объема выборки можно рассчитывать на асимптотическое повышение точности прогноза, то в стохастических процессах — максимум на повышение точности оценок параметров модели.

Приведенные соображения относятся в основном к адекватной или близкой к ней модели. В случае же использования заведомо неадекватной модели, включающей лишь часть выявленных в исследуемом процессе периодов сезонности, точность представления процесса будет понижена. Если возможность построения адекватной модели затруднена или нереальна вследствие сложности процесса, а сам процесс адекватен модели АРСС и представляет фрагмент одной из реализаций стохастического процесса, описываемого этой моделью, можно попытаться, используя упрощенную неадекватную модель, приблизить ее поведение к фактическому процессу на некотором ограниченном интервале. Повышение точности приближения на этом интервале будет достигаться ценой понижения точности вне его, иллюстрируя всеобъемлющий закон сохранения. Для исследования этой возможности был введен еще один вспомогательный критерий — критерий локальной близости S_L. Он представляет собой взвешенную сумму прежнего критерия S_2 со средним квадратом отклонений прогнозных значений $\hat{Z}_t$ от фактических данных Z_t на задаваемом временном интервале L, обычно охватывающем цикл солнечной активности, который предшествует прогнозу, совпадает или следует за ним, если для него уже имеются данные

$$S_L = \alpha S_2 + (1-\alpha) S_{LT_c}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{25}$$

где

$$S_{LT_c} = \frac{1}{L} \sum_{T_c}^{T_c+L} (\hat{Z}_t - Z_t)^2. \tag{26}$$

При $T_c = N - L$ критерий охватывает цикл активности, предшествующий прогнозу, а при $T_c = N$ — совпадающий с ним.

Критерий локальной близости, подобно аттрактору, извлекает из пространства параметров модели траектории, отвечающие его требованиям. В данной работе он используется для того, чтобы выявить наличие траекторий, близких по точности к траектории адекватной модели. В зоне локальной близости разность с фактическими данными исследуемого процесса будет близка к процессу белого шума, присущего адекватной модели. По среднему квадрату этой разности можно будет судить о возможной точности представления процесса адекватной моделью и оценить точность последующего прогноза.

Этот вспомогательный критерий введен для того, чтобы исследовать возможность описания процесса адекватной моделью АРСС. Практическое использование его для прогнозирования осложнено, во-первых, необходимостью задания процесса в зоне локальной близости, во-вторых, понижением точности представления процесса вне этой зоны. Надежда на сохранение повышенной точности за зоной локальной близости оправдалась пока лишь частично. По-видимому, имеет смысл проверить и критерии с более плавным перераспределением веса, например вида

$$S_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i p_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} p_i, \tag{27}$$

где p_i — веса в виде элементов арифметической или геометрической прогрессии, или иных положительных неубывающих функций.

Для построения адекватной модели можно последовать рекомендации работы [5] и представить моделью АРСС последовательность a_t, отличную от белого шума. Для этого вновь потребуется оценить присутствующие в ней периоды сезонности. Не вдаваясь в детали структуры модели, запишем ее в общем виде:

$$\Phi_a(\mathrm{B}) a_t = \theta_a(\mathrm{B}) e_t. \tag{28}$$

Здесь $\Phi_a(\mathrm{B})$ — оператор АР, $\theta_a(\mathrm{B})$ — оператор СС, а e_t — последовательность белого шума. Операторы АР и СС могут быть аддитивными или мультипликативными. Определяя из этого уравнения a_t и подставляя его в (12), получим выражение, возможно, для адекватной модели АРСС:

$$\Phi_a(\mathrm{B})\sum_{i=0}^{np}\varphi_i^*\mathrm{B}^{l_i}W_t=\theta_a(\mathrm{B})\sum_{i=0}^{nq}\theta_i^*\mathrm{B}^{m_i}e_t. \tag{29}$$

Операции эти трудоемки, но позволяют сочетать в различных комбинациях аддитивные и мультипликативные модели.

Примеры описания и прогноза чисел Вольфа. Ключевым является вопрос о правомочности описания данных солнечной активности стохастической моделью АРСС или АРПСС, поскольку процесс может и не быть стохастическим. Окончательный ответ можно будет получить, построив адекватную процессу модель либо удостоверившись в невозможности ее построения. Пока же мы вынуждены лишь постулировать такую возможность. В обоснование этой гипотезы на рис. 3 приведен результат одношаговых прогнозов, полученных с помощью разностного уравнения АРСС процесса на фоне фактических данных чисел Вольфа за период с 1700 по 2007 годы. Неполнота описания, а следовательно, и неадекватность использованной модели не позволяют более точно отследить динамику поведения чисел Вольфа, но в общих чертах модель воспроизводит вариации амплитуд и периодов различных циклов.

При построении была использована мультипликативная модель со следующей структурой: $k = 4$ — количество интервалов сезонности, включая единичный; $S_z = (1;8;11;53)$ — массив значений периодов сезонности; $N_{ps} = (2;1;1;2)$ — массив количества параметров АР для каждого периода сезонности; $N_{qs} = (2;1;1;1)$ — массив количества параметров СС для каждого периода сезонности.

Количество избыточных параметров для приведенного оператора АР согласно (10), включая базовые, отвечающие основным периодам сезонности, равно 35. Им соответствуют сдвиги в прошлое относительно прогнозируемой точки в годах: 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13,

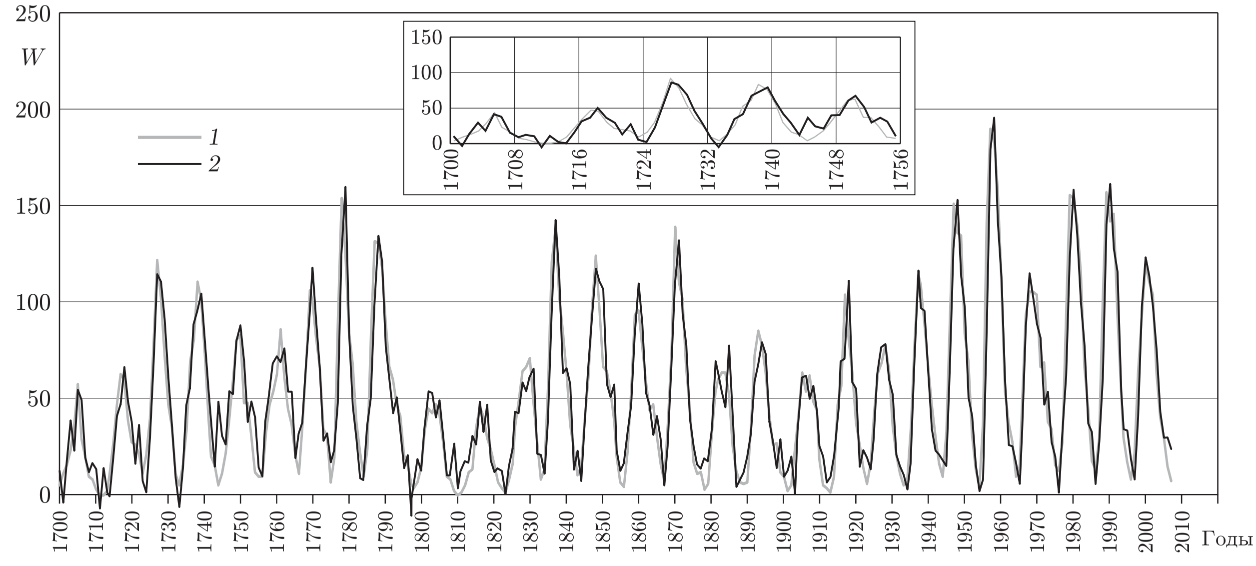

Рис. 3

19, 20, 21, 53, 54, 55, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 72, 73, 74, 106, 107, 108, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 125, 126, 127.

Количество избыточных параметров, включая базовые, для приведенного оператора СС согласно (11) равно 23. Им соответствуют сдвиги в прошлое относительно прогнозируемой точки в годах: 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 52, 53, 54, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 71, 72, 73.

Таким образом, каждая точка одношагового прогноза последовательности чисел Вольфа получается с использованием 35 ее предшествующих значений и 23 предшествующих значений последовательности a_t, полученной в процессе идентификации модели.

Параметры модели определялись с использованием в качестве критерия $\mathrm{Cr}(\boldsymbol{\beta}) = S_2$, т. е. путем минимизации среднего квадрата последовательности a_t.

Для вектора $\boldsymbol{\beta}$ была получена оценка $\hat{\boldsymbol{\beta}}^T = (1{,}326\ -0{,}654\ -0{,}690\ 0{,}712\ -0{,}633\ -0{,}226\ 0{,}164\ -0{,}158\ -0{,}663\ 0{,}475\ -0{,}927)$. Соответствующая этой модели последовательность a_t обладала средним значением 0,04 и средним квадратом 189,2.

В верхней части рис. 3 (кривая *1* — исходные данные, *2* — одношаговый прогноз) воспроизведен в несколько увеличенном по времени и уменьшенном по уровню масштабе начальный фрагмент графика. Обратим внимание на то, что при прогнозировании начальных значений процесса для 1700 года и далее привлекались данные из предшествующего периода, полученные с помощью искусственной процедуры «складного ножа», или бутстрепа, описанной в [7].

Модель АРСС обладает свойством обратимости и позволяет осуществлять прогноз как в будущее, так и в прошлое. Поэтому, если удастся построить адекватную для чисел Вольфа модель, можно будет попробовать спрогнозировать данные солнечной активности на некоторый интервал, предшествующий 1700 году.

Результаты проверки белизны последовательности a_t иллюстрируют рис. 4–6. На рис. 4 приведены гистограммы нормированной последовательности a_t (кривая *1*) и нормально распределенной случайной величины (кривая *2*). Однако объем выборки мал, поэтому при увеличении количества градаций гистограммы она утрачивает унимодальность и в ней появляются провалы. Есть предположение, что распределение a_t достаточно близко к нормальному и при построении адекватной модели эта близость возрастет. Хотя для белизны шума его нормальность вовсе не обязательна.

Рис. 4

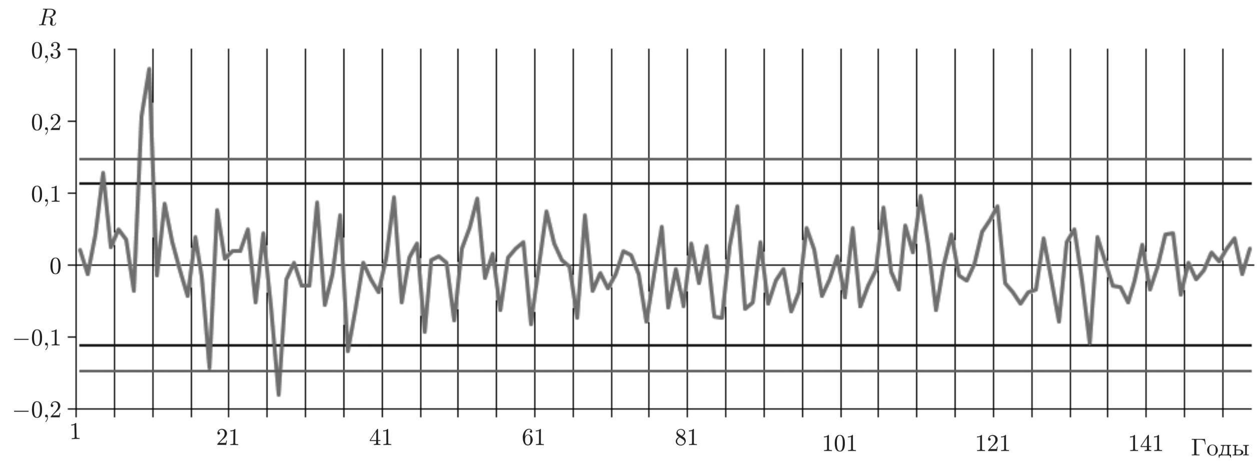

Рис. 5

Автокорреляционная функция R белого шума a_t на рис. 5 свидетельствует о неполноте и неадекватности модели. В трех точках она выходит за пределы 99 %-ного доверительного интервала и еще в трех — за пределы 95 %-ного интервала. Остальная ее часть сосредоточена практически в 90 %-ном доверительном интервале.

Наилучшую близость к белому шуму проявляет последовательность a_t по критерию кумулятивной периодограммы $C(f)$ (рис. 6). Ее отклонение от кумулятивной периодограммы идеального белого шума $C_0(f)$ не выходит за пределы 75 %-ного доверительного интервала.

По нашему мнению, можно считать правомочной гипотезу о допустимости представления последовательности чисел Вольфа стохастической моделью АРСС.

Фрагмент представления чисел Вольфа траекторией локальной близости приведен на рис. 7 (кривая *1* — исходные данные, *2* — прогноз, *3* — $a(t)$). При использовании этой траектории преследовалась цель выявить возможную точность описания данных солнечной активности с помощью адекватной модели АРСС, ориентируясь на точность, достигаемую в зоне локальной близости. При построении траектории использовалась прогнозная база с 1700 по 2007 годы. Структура модели сохранилась та же, что и при оценке траектории, приведенной на рис. 3. Изменился критерий выбора траектории из пространства парамет-

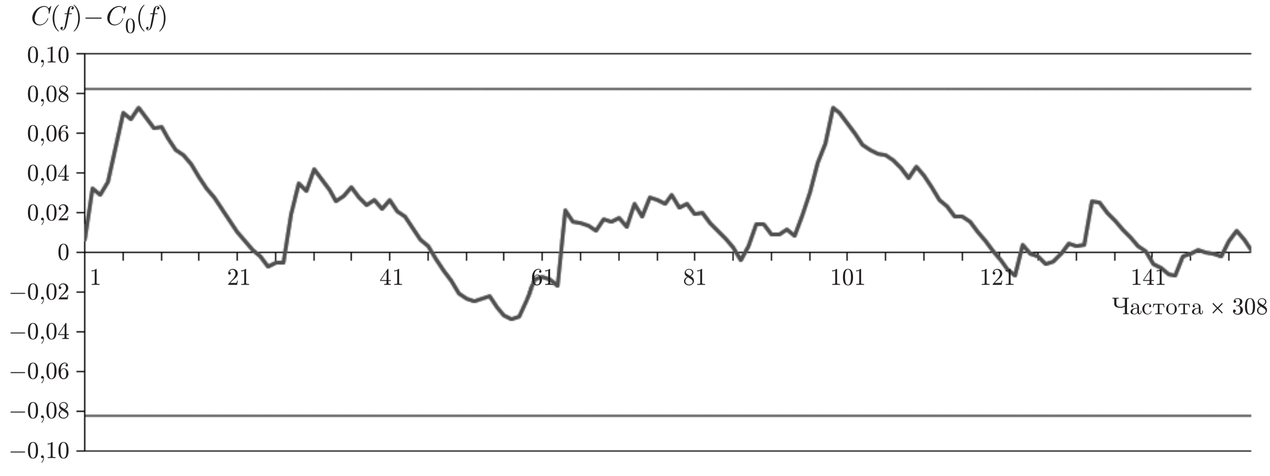

Рис. 6

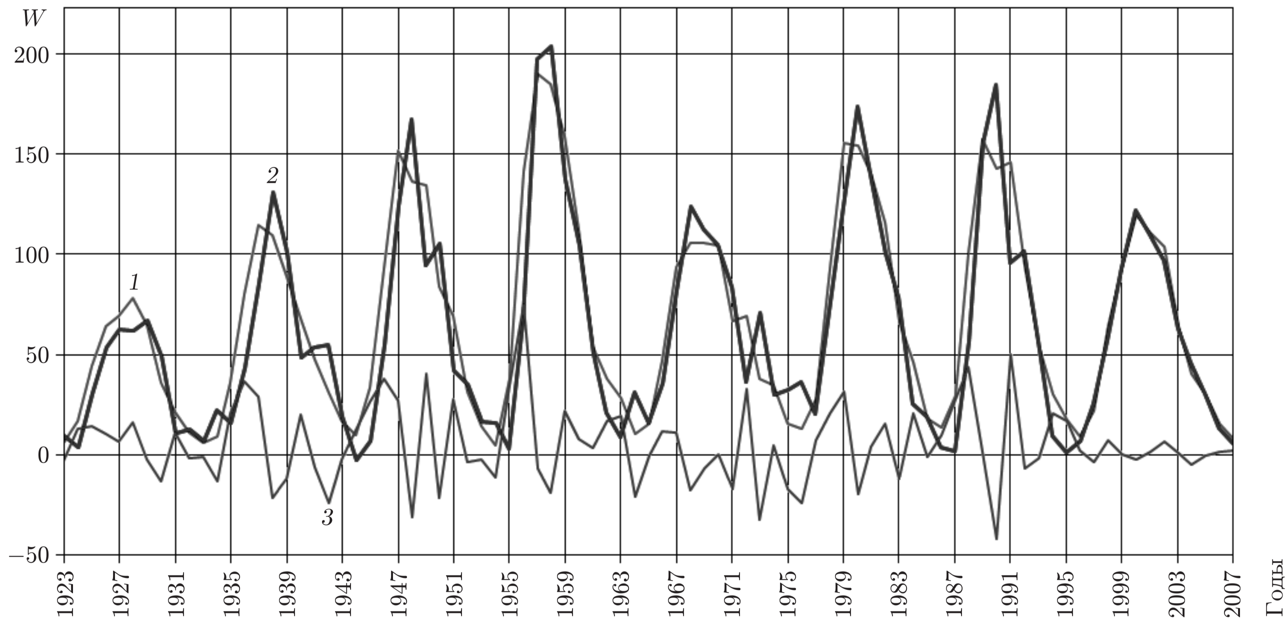

Рис. 7

ров. В первом случае использовался критерий S_2, во втором — $S_L(25, 26)$ при $N = 308$, $L = 11$, $T_c = 308$, $\alpha = 0{,}3$. Полученная траектория соответствует вектору параметров $\hat{\boldsymbol{\beta}}^T = (1{,}469\ -0{,}769\ 0{,}587\ 0{,}745\ -0{,}499\ 0{,}477\ 0{,}295\ -0{,}041\ 0{,}631\ 0{,}501\ -0{,}647)$. Последовательность a_t обладает средним значением 0,772, и $S_2 = 239{,}2$.

На рисунке на интервале с 1923 по 1996 гг. приведены результаты одношагового прогноза чисел Вольфа, а на интервале с 1997 по 2007 годы, т. е. в зоне локальной близости, — интервальный прогноз с использованием полученного $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ по данным до 1996 года, т. е. без привлечения данных с 1997 по 2007 годы.

Средний квадрат отклонений прогноза S_{LT_c}, полученного в зоне локальной близости, от фактических данных равен 14,2, что примерно в 16 раз меньше значения S_2. По-видимому, значение S_{LT_c} — это примерно тот уровень для S_2, на который можно рассчитывать при построении адекватной модели. Конечно, размер зоны локальной близости слишком мал, чтобы делать на его основании строгие выводы, скорее, приведенный пример дает повод к более углубленному рассмотрению вопроса использования различных критериев локальной близости. Как уже отмечалось, повышенная точность представления исходных данных в зоне локальной близости сопровождается пониженной точностью вне ее, что и иллюстрирует рис. 7.

Приведем прогноз солнечной активности на следующий цикл, используя параметры модели траектории локальной близости, полученные на предыдущем шаге (рис. 8, кривая *1* — исходные данные, *2* — прогноз на 1997–2020 годы). Эта модель еще не полна, не адекватна прогнозируемой последовательности, но полагаем, что в общих чертах она правильно передаст тенденцию развития процесса и позволит сопоставить впоследствии полученный с ее помощью прогноз с прогнозом, предложенным в [10]. На рисунке воспроизведен фрагмент вспомогательного прогноза локальной близости на период 1997–2007 гг. по данным вплоть до 1996 г. и далее прогноз на период 2008–2020 гг. с использованием той же траектории локальной близости, но уже по данным вплоть до 2007 года.

Пока рано давать строгую оценку точности прогноза на период 2008–2020 гг. Формулы для вычисления дисперсий прогноза в [7] привели бы к завышенной оценке дисперсии, а использование в этих формулах вместо S_2 оценки S_{LT_c} — к заниженной.

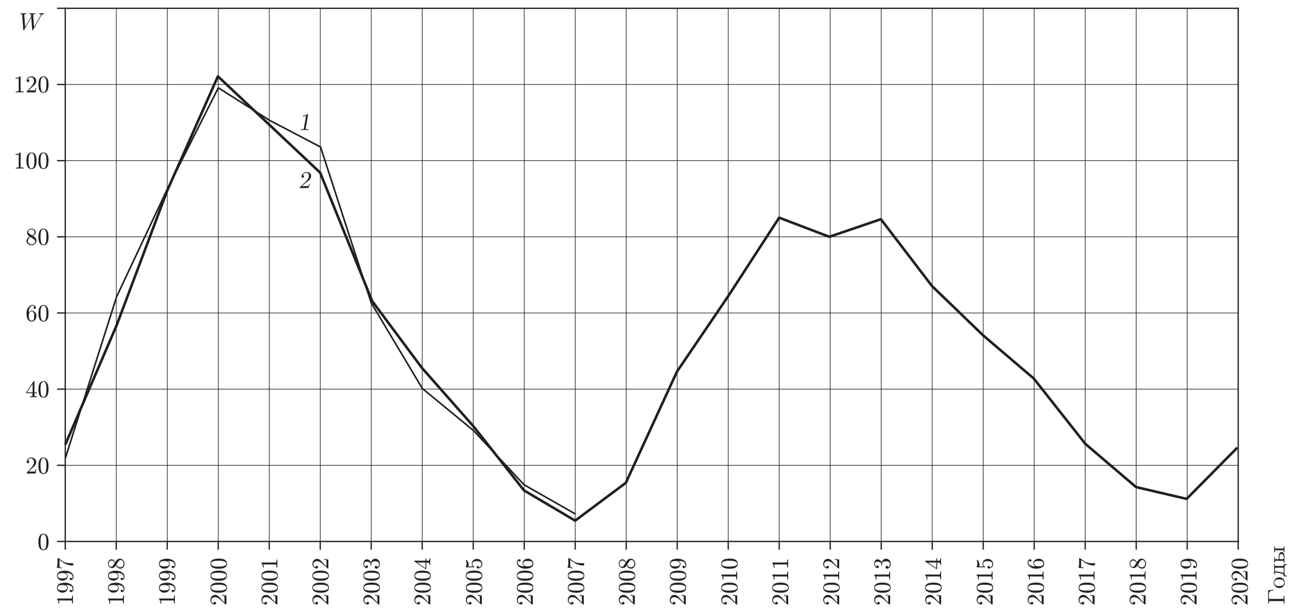

Рис. 8

Заключение. В данной работе рассмотрен способ оценки некратных периодов сезонности для процесса с циклическими колебаниями на примере годичных данных солнечной активности в виде чисел Вольфа. Полученные значения периодов были использованы при построении мультипликативной модели АРСС.

Выяснено, что в мультипликативной модели практически можно использовать не более пяти периодов сезонности, что не позволяет за один этап построить с ее помощью адекватную числам Вольфа модель.

Данные солнечной активности представляют собой богатый возможностями, сложный объект для исследования, проверки и отлаживания алгоритмов.

В работе представлено дальнейшее развитие алгоритмов получения начальных приближений для параметров модели с привлечением датчиков псевдослучайных чисел. Предложено два варианта алгоритмов: с совместной обработкой и отбором перспективных параметров и с раздельной обработкой.

Модификации подвергся двухтактный алгоритм скорейшего спуска, используемый при уточнении параметров модели. Это повысило устойчивость и быстродействие его работы, позволив исключить этап первоначального уточнения параметров способом дихотомического зондирования.

При работе с неполными, неадекватными исследуемому процессу моделями предложено использовать дополнительный критерий локальной близости описываемого моделью процесса к фактическим данным, что может повысить точность прогноза.

Автор выражает благодарность Н. П. Копыловой за выполненные вычисления и рисунки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **http:**//www.wdcb.ru/stp/index.ru.html (Мировой Центр данных по солнечно-земной физике, Москва).
2. **http:**//www.kosmofizika.ru/ucheba/sun_act.htm (Проект Э. В. Кононовича, Жизнь Земли в атмосфере Солнца).

3. **http:**//www.wdcb.ru/stp/data/solar.act/sunspot/ (Солнечные пятна).
4. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 756 с.
5. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов (Прогноз и управление). Вып. 1. М.: Мир, 1974. 406 с.
6. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976. 736 с.
7. **Ахметьянов Р. Р., Делегодина Л. А., Копылова Н. П. и др.** Использование нестационарных сезонных моделей авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего в задачах ресурсосбережения // Автометрия. 2008. **44**, № 4. С. 28–41.
8. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
9. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 548 с.
10. **http:**//www.wdcb.ru/stp/data/solar.act/sunspot/sunspot.predict (sunspot predict).

Поступила в редакцию 20 мая 2008 г.