

**АЛГОРИТМ ПОПОЛНЕНИЯ ПРОЕКЦИОННЫХ ДАННЫХ  
В ЗАДАЧАХ ТОМОГРАФИИ  
С ОГРАНИЧЕННЫМ ДИАПАЗОНОМ УГЛОВ ОБЗОРА****А. В. Лихачев**

*Институт автоматки и электрометрии СО РАН,  
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1  
E-mail: ipm1@iae.nsk.su*

Предложен новый итерационный алгоритм томографической реконструкции объектов по проекционным данным, известным только в ограниченном диапазоне углов. Алгоритм основан на вычислении искусственных проекций в тех направлениях, где проекционных данных нет. Путем численного моделирования подтверждено, что разработанный алгоритм обеспечивает высокое качество реконструкции вплоть до размера углового интервала 45 – 60°.

*Ключевые слова:* томография с ограниченным углом обзора, генерация проекций, итерационные алгоритмы реконструкции.

**Введение.** Для изучения внутренней структуры объектов различной природы в настоящее время широко применяются методы томографии, в частности зондирование объектов проникающим излучением [1, 2]. Многие томографические установки, предназначенные для решения этой задачи, реализуют следующий подход. Измерения производятся в одной плоскости, и по этим данным реконструируется слой объекта. Система регистрации смещается вдоль некоторой оси, что позволяет последовательно восстанавливать перпендикулярные ей слои. Таким образом, с математической точки зрения в основе этого подхода лежит решение обратной двумерной задачи. Одна из ее постановок представлена в данной работе.

Обычно предполагается, что в рассматриваемом случае диагностики твердых тел показания отдельного детектора связаны с параметрами, характеризующими объект, посредством уравнения

$$f = I_0 \exp\left(-\int_a^b g(p) dp\right). \quad (1)$$

Здесь  $I_0$  – интенсивность источника рентгеновского излучения;  $f$  – сигнал, зарегистрированный детектором;  $g$  – распределение коэффициента ослабления рентгеновского излучения. Интегрирование в (1) ведется по отрезку, соединяющему источник и детектор.

Поделив (1) на  $I_0$  и прологарифмировав полученное выражение, приходим к задаче определения функции двух переменных по набору ее интегралов вдоль прямых – известной в интегральной геометрии задаче обращения двумерного преобразования Радона [3], которое записывается как

$$f(\varphi, l) \equiv (\mathbf{R}g)(\varphi, l) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\sqrt{l^2 + p^2}, \varphi + \arctan(p/l)\right) dp, \quad (2)$$

где  $l, p \in R^1$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi[$ . При фиксированном угловом параметре  $\varphi$  выражение (2) обычно называют одномерной проекцией, далее она будет обозначаться как  $f_\varphi(l)$ . Значения проекции  $f_\varphi(l)$  представляют собой интегралы от функции  $g(\psi, r)$  вдоль семейства параллельных прямых, заданного углом наклона  $\varphi$ , при этом переменная  $l$  является расстоянием от прямой до начала координат.

Для двумерного преобразования Радона (2) имеет место формула обращения [1]

$$g(\psi, r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r \cos(\varphi - \psi) - l} \frac{\partial}{\partial l} f_\varphi(l) dl \right) d\varphi. \quad (3)$$

Внешний интеграл по углу в выражении (3) называется обратным проецированием, внутренний – представляет собой фильтрацию одномерных проекций. В современной литературе эта операция называется гагр-фильтрацией. Разные способы ее реализации описаны в [1, 3–7].

Как видно из уравнения (3), для того чтобы корректно провести обратное проецирование, нужно знать проекции при всех углах  $\varphi$ . На практике часто встречаются ситуации, когда доступ к исследуемому объекту ограничен, тем не менее необходимо провести его томографическое исследование, например определить степень изношенности конструкций, находящихся в эксплуатации. В [8, 9], в частности, была разработана томографическая методика инспектирования сварных швов трубопроводов для поиска внутренних трещин. При этом угол с известными проекционными данными составлял 20–60°. В результате реконструкции получены изображения, существенно растянутые вдоль прямых, для которых измерены величины (1).

В данной работе предлагается алгоритм, предназначенный для реконструкции функции двух переменных по данным, в которых отсутствует некоторый диапазон углов обзора. Применение этого алгоритма позволяет значительно повысить качество томографической реконструкции, в том числе уменьшить указанные артефакты.

**Алгоритм генерации проекций.** Суть метода генерации проекций состоит в следующем. Пусть проекции измерены в диапазоне углов  $[0, \varphi_0]$ , соответственно в интервале  $]\varphi_0, 2\pi[$  они не известны. По имеющимся данным одним из алгоритмов, реализующих формулу обращения (3), реконструируется начальное приближение, причем верхним пределом внешнего интеграла берется величина  $\varphi_0$ . В начальное приближение вносится априорная информация об исследуемом объекте, при этом получается функция, обозначенная далее как  $g^{(0)}$ . От  $g^{(0)}$  по формуле (2) насчитываются проекции в тех направлениях, где они отсутствуют. Таким образом, происходит пополнение

данных. На следующем шаге производится реконструкция по составному набору: известным проекциям и проекциям, вычисленным от функции  $g^{(0)}$ . В реконструированное решение вновь вносится априорная информация, после чего получается функция  $g^{(1)}$ . От нее вновь вычисляются отсутствующие проекции, и описанные выше действия повторяются. Таким образом получается итерационный процесс

$$g^{(i+1)} = \Phi^{(i+1)}(\mathbf{R}^{-1}(f + \mathbf{P}_{] \varphi_0, 2\pi[} g^{(i)})), \quad g^{(0)} = \Phi^{(0)} \mathbf{R}^{-1} f, \quad i=0,1,2,\dots \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{R}^{-1}$  – алгоритм решения задачи двумерной томографии;  $\Phi$  – оператор, вносящий априорную информацию (см., например, [10]), верхний индекс которого указывает, что он может зависеть от номера итерации;  $\mathbf{P}_{] \varphi_0, 2\pi[}$  – оператор, вычисляющий проекции от функции  $g^{(i)}$  в интервале углов  $] \varphi_0, 2\pi[$ ;  $f$  – имеющиеся проекционные данные. Выражение  $f + \mathbf{P}_{] \varphi_0, 2\pi[} g^{(i)}$  означает полный набор данных, включающий существующие и искусственно полученные проекции.

Следует отметить, что идея пополнения проекционных данных в итерационном процессе, подобном (4), использовалась ранее в связи с другой томографической задачей. В работе [11] рассматривалась проблема реконструкции сечения объекта, содержащего непрозрачные для зондирующего излучения включения. В этом случае часть носителя каждой из проекций попадает в тень непрозрачного тела, в результате чего данные в таких областях отсутствуют. Метод, предложенный в [11], был обобщен на трехмерный случай в работе [12].

Для реализации итерационного процесса (4) в данной работе в качестве оператора  $\mathbf{R}^{-1}$  был выбран один из наиболее часто применяемых в томографии алгоритмов, который был предложен Шеппом и Логаном [5]. В алгоритме Шеппа – Логана фильтрация проекций в формуле обращения двумерного преобразования Радона осуществляется как свертка с ядром

$$K(ih) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 h^2} \frac{1}{1 - 4i^2}, & i=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 0, & |i| > N/2, \end{cases} \quad (5)$$

где  $N$  – число узлов равномерной сетки, в которых задана проекция, а  $h$  – шаг этой сетки. Процедура обратного проецирования осуществлялась стандартным образом [1]. При реализации проецирующего оператора  $\mathbf{P}_{] \varphi_0, 2\pi[}$  интегралы вдоль прямых вычислялись методом трапеций. Значения функции  $g^{(i)}$  в узлах на прямой находились по четырем ближайшим узлам квадратной сетки путем билинейной интерполяции.

**Вычислительный эксперимент.** Разработанный алгоритм генерации проекций исследовался посредством вычислительного эксперимента. Реконструировался следующий математический фантом:

$$g_M(\psi, r) = \sum_{i=1}^{20} g_i(\psi, r);$$

$$g_i(\psi, r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x_i^2}{a_i^2} - \frac{y_i^2}{b_i^2}\right), & \frac{x_i^2}{a_i^2} + \frac{y_i^2}{b_i^2} \leq 1, \\ 0, & \frac{x_i^2}{a_i^2} + \frac{y_i^2}{b_i^2} > 1, \end{cases} \quad (6)$$

$$x_i = x_{0i} - r \cos \psi, \quad y_i = y_{0i} - r \sin \psi.$$

Параметры  $a_i, b_i, x_{0i}, y_{0i}, i=1, 2, \dots, 20$ , в (6) были подобраны так, чтобы эллипсы, имеющие полуоси  $a_i, b_i$  с центрами в точках  $(x_{0i}, y_{0i})$ , не пересекались. Изображение фантома представлено на рис. 1.

Расчеты производились на квадратной сетке размером  $1025 \times 1025$  узлов. Проекционные данные моделировались как набор одномерных проекций, которые были распределены равномерно по углу в интервале от 0 до  $\varphi_0$ . На каждой проекции задавалась сетка в 1025 узлов. Реконструкция проводилась как при отсутствии случайного шума в проекционных данных, так и при его наличии. Шум предполагался гауссовым со средним, равным 0, и переменной дисперсией, составляющей в каждой точке  $l_0$ , принадлежащей носителю проекции, величину  $\xi f_\varphi(l_0)$ , где  $\xi$  – положительное число,  $f_\varphi(l_0)$  – значение проекции в этой точке. Отметим, что при таком виде шума нормированное среднеквадратичное отклонение  $\delta$  зашумленных проекций от истинных, определяемое выражением

$$\delta = \frac{\sum_{m=1}^M \|f_{\varphi_m} - f_{\varphi_m}^\xi\|}{\sum_{m=1}^M \|f_{\varphi_m}\|}, \quad (7)$$

близко к величине  $\xi$ . В формуле (7)  $f_{\varphi_m}$  и  $f_{\varphi_m}^\xi$  – истинная и зашумленная проекции соответственно;  $\|\cdot\|$  – евклидова норма в конечномерном векторном пространстве; суммирование в числителе и знаменателе ведется по всем проекциям.

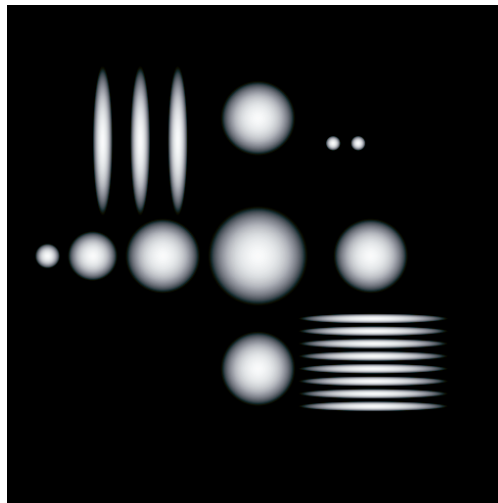


Рис. 1

В расчетах варьировались величина угла  $\varphi_0$ , число проекций  $M$ , значение параметра  $\xi$ , определяющего уровень шума. Для контроля точности реконструкции использовалось нормированное среднеквадратичное отклонение  $\Delta$ , величина которого вычислялась по формуле

$$\Delta = \frac{\|g_M - g\|}{\|g_M\|}, \quad (8)$$

где  $g_M$  – точная модель (математический фантом),  $g$  – результат реконструкции.

Посредством вычислительного эксперимента было показано, что алгоритм генерации проекций позволяет повысить качество томографической реконструкции в случае, когда проекционные данные известны в ограниченном диапазоне углов. При этом оказалось, что важную роль в сходимости итерационного процесса (4) играют операторы априорной информации  $\Phi^{(i)}$ . В частности, в них должны быть включены сглаживающие процедуры даже тогда, когда реконструкция производится по данным, не содержащим шума.

Для сходимости алгоритма генерации проекций были получены следующие результаты. Во всех проведенных расчетах зависимости ошибки  $\Delta$  от числа итераций  $n$  имели минимум. При заданной последовательности операторов  $\Phi^{(i)}$  для проекционных данных, свободных от шумов, положение минимума на кривой  $\Delta(n)$  зависит от числа проекций  $M$  и величины угла  $\varphi_0$ . При малом количестве ракурсов наблюдения ( $M \leq 25$ ) алгоритм начинает расходиться после первой же итерации независимо от значения  $\varphi_0$ . Таким образом, его применение в этих условиях оказалось нецелесообразным. Однако при увеличении  $M$  минимум начинает сдвигаться в сторону больших  $n$ . Так, для  $M = 100$  минимальная ошибка достигается на 8–12-й итерациях, а для  $M = 500$  – на итерациях 50–60. От величины углового интервала, в котором известны проекционные данные, место минимума  $\Delta(n)$  зависит более слабо, чем от числа проекций. Он перемещается к началу кривой при уменьшении  $\varphi_0$ .

Зависимости ошибки  $\Delta$  от величины угла  $\varphi_0$  для различного числа проекций  $M$  представлены на рис. 2. Здесь и далее для алгоритма генерации проекций величина  $\Delta$  приводится в минимуме кривой  $\Delta(n)$ . Вычисления произво-

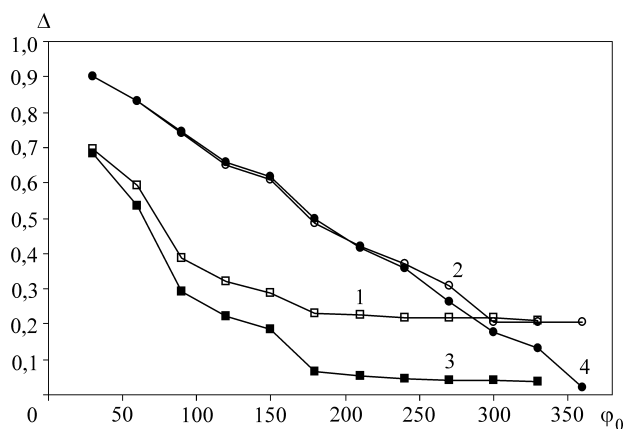


Рис. 2

дились в отсутствие шума. Кривые 1 и 2 относятся к  $M = 100$ , а кривые 3 и 4 соответствуют  $M = 500$ . К алгоритму генерации проекций относятся кривые 1, 3. Оператор априорной информации  $\Phi$  был одинаковым для всех итераций и включал в себя процедуру зануления отрицательных значений, процедуру зануления томограммы вне круга, вписанного в квадратную область реконструкции, а также медианную фильтрацию в скользящем окне размером  $5 \times 5$ . Кривые 2 и 4 иллюстрируют результаты, полученные алгоритмом Шеппа – Логана, т. е. непосредственно оператором  $\mathbf{R}^{-1}$ , входящим в выражение (4). При этом томограммы обрабатывались тем же оператором  $\Phi$ , который входил в итерационный процесс (4). Крайние правые точки на кривых 2 и 4 соответствуют реконструкции алгоритмом Шеппа – Логана по набору проекционных данных в полном диапазоне углов. Видно, что для 100 проекций предлагаемый алгоритм дает примерно такую же ошибку при угле потерь до  $150^\circ$ , что и стандартный томографический алгоритм для полного набора данных. При 500 проекциях эта ошибка несколько выше, тем не менее остается достаточно близкой к той, которая получается при реконструкции по полным данным.

Как видно из рис. 2, предлагаемый алгоритм генерации проекций в условиях ограниченного диапазона углов, в котором известны проекционные данные, обеспечивает более высокое качество реконструкции, нежели обычные томографические алгоритмы. Наиболее ощутимо его преимущество проявляется при  $\varphi_0 \in [90^\circ; 180^\circ]$ . Также следует отметить поведение кривых 1 и 3 на интервале  $\varphi_0 \in [180^\circ; 360^\circ]$ . Здесь они идут почти параллельно оси абсцисс, т. е. ошибка реконструкции алгоритмом генерации проекций практически не увеличивается. Это объясняется тем, что преобразование Радона (2) обладает свойством симметрии:  $f(\varphi, l) = f(-\varphi, -l)$ . Таким образом, информация, необходимая для реконструкции, содержится в проекционных данных, полученных только в половине полного углового диапазона. В алгоритме генерации проекций это обстоятельство учитывается автоматически посредством оператора проецирования  $\mathbf{P}_{\varphi_0, 2\pi}$ .

Также путем численного моделирования было исследовано влияние случайного шума в проекционных данных на качество томографической реконструкции предлагаемым алгоритмом. Полученные результаты показали, что при наличии шумов зависимости  $\Delta(n)$  также имеют минимум, как и в случае их отсутствия. При фиксированном числе проекций этот минимум сдвигается в сторону меньших номеров итераций с ростом уровня шума.

Зависимости погрешности реконструкции от величины  $\delta$ , характеризующей уровень шума, приведены на рис. 3. Количество проекций равно 100. Кривые 1–4 относятся к предлагаемому алгоритму реконструкции по данным, содержащимся в ограниченном угловом диапазоне, при этом величина угла  $\varphi_0$  составляет  $120^\circ$ . Кривая 5 представляет результаты, полученные с помощью алгоритма Шеппа – Логана по полному набору проекционных данных. Каждая кривая на рис. 3 соответствует различным процедурам сглаживания, входящим в оператор  $\Phi$ . Кривая 1 была получена при том же  $\Phi$ , что и кривые 1, 3 на рис. 2. В остальных случаях в оператор  $\Phi$  дополнительно входил фильтр низких частот

$$\Omega_\alpha(v_x, v_y) = \begin{cases} 1/(1 + \alpha(v_x^2 + v_y^2)), & \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \leq v_{\max}, \\ 0, & \sqrt{v_x^2 + v_y^2} > v_{\max}, \end{cases} \quad (9)$$

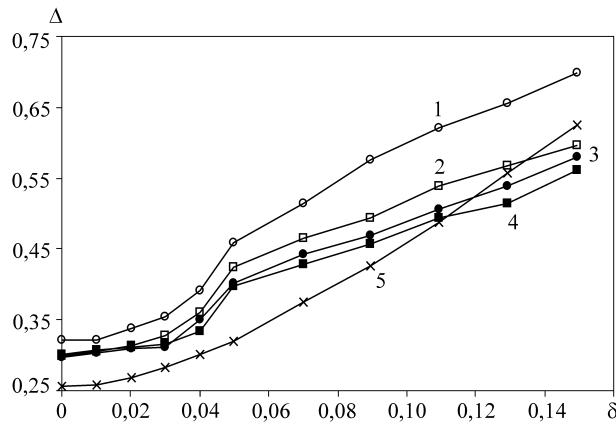


Рис. 3

где  $\nu_{\max}$  – некоторая частота, ограничивающая ширину фильтра. В выражении (9) величина  $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-4}$  (кривая 2),  $\alpha = 5,0 \cdot 10^{-4}$  (кривая 3) и  $\alpha = 10^{-3}$  (кривая 4). Томограмма, полученная с помощью алгоритма Шеппа – Логана (кривая 5), обрабатывалась оператором  $\Phi$ , в который входил фильтр (9) с  $\alpha = 10^{-3}$ .

Фильтрация томограммы посредством  $\Omega_{\alpha}(\nu_x, \nu_y)$  производилась путем умножения ее фурье-образа на фурье-образ фильтра. При этом двумерный фурье-образ томограммы  $\tilde{g}(\nu_x, \nu_y)$  вычислялся на сетке размером  $2049 \times 2049$  узлов с одинаковым шагом по частоте  $h_{\nu}$  по обеим координатам. Для того чтобы была возможность использовать алгоритм БПФ, томограмма по краям дополнялась соответствующим количеством точек, в которых ее значение равнялось 0. Поскольку разрешение томограммы одинаково в обоих направлениях, частоты Найквиста для них равны:  $\nu_{xN} = \nu_{yN} = \nu_N$ . Таким образом, фурье-преобразование томограммы вычислялось в квадратной области  $\nu_x \in [-\nu_N; \nu_N]$ ,  $\nu_y \in [-\nu_N; \nu_N]$ . Величина  $\nu_{\max}$  в (9) была взята равной  $\nu_N$ . Значения фильтра  $\Omega_{\alpha}(\nu_x, \nu_y)$  вычислялись в тех же точках, что и значения функции  $\tilde{g}(\nu_x, \nu_y)$ .

Из рис. 3 следует, что применение процедур сглаживания, в частности низкочастотной фильтрации, позволяет повысить устойчивость алгоритма генерации проекций по отношению к случайному шуму. Отметим также, что реконструкция алгоритмом Шеппа – Логана по полному набору проекционных данных оказалась при наличии тех же процедур сглаживания менее устойчивой, чем реконструкция предлагаемым алгоритмом по данным в ограниченном диапазоне углов. Это объясняется тем, что томограмма, полученная алгоритмом генерации проекций, сглаживается после каждой итерации, что обеспечивает большее подавление шума.

Томограммы, по которым можно визуально судить о качестве реконструкции и сходимости итерационного процесса (4), приведены на рис. 4. Результаты, полученные после 15-, 30- и 45-й итераций алгоритма генерации проекций, показаны на рис. 4, а – с. Восстановление велось по 500 проекциям, величина угла  $\varphi_0$  составляла  $90^\circ$ . Оператор  $\Phi$  не зависел от номера итерации и состоял из процедур зануления отрицательных значений, зануления томограммы вне круга и медианной фильтрации в скользящем окне размером

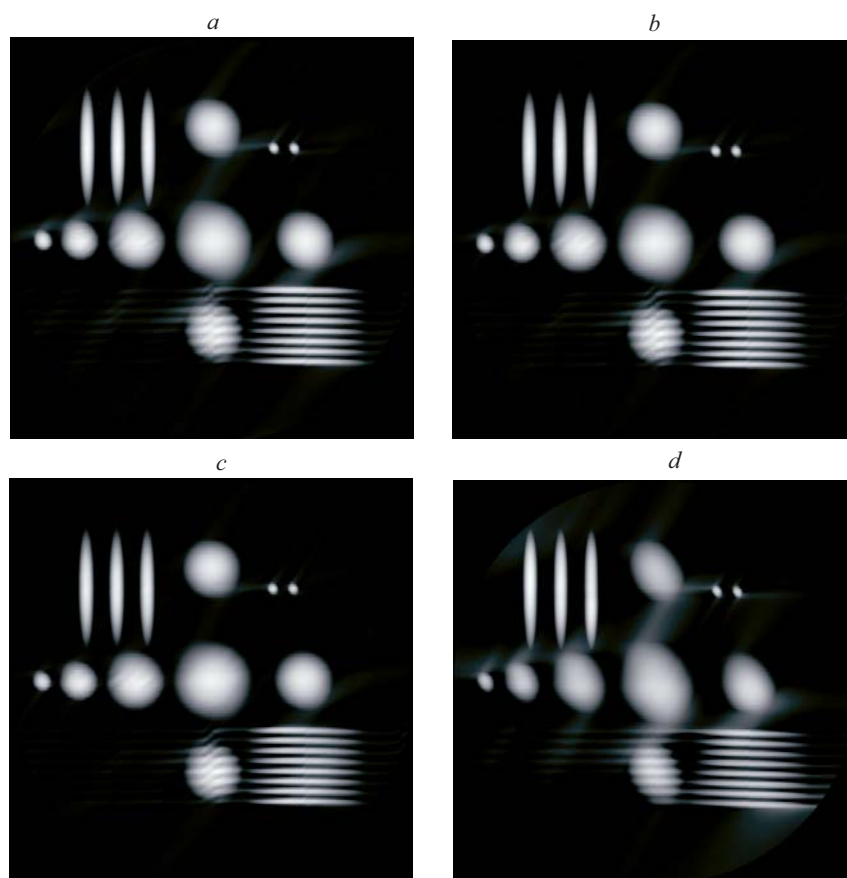


Рис. 4

$5 \times 5$ . Решение, полученное алгоритмом Шеппа – Логана, приведено для сравнения на рис. 4, *d*.

**Заключение.** В представленной работе предложен и исследован новый алгоритм томографической реконструкции, ориентированный на проекционные данные, заключенные в ограниченном диапазоне углов. В его основе лежит вычисление искусственных проекций от очередного итерационного решения в тех направлениях, где они отсутствуют. Путем численного моделирования было показано, что если имеется достаточное количество ракурсов наблюдения (порядка нескольких сотен), то разработанный метод обеспечивает высокое качество реконструкции, вплоть до размера интервала углов  $45-60^\circ$ , в котором известны проекционные данные. При этом стандартные томографические алгоритмы, в частности алгоритм Шеппа – Логана, дают значительно более худшие результаты. Расчеты, произведенные при наличии случайного шума в данных, показали, что можно добиться повышения устойчивости алгоритма путем проведения дополнительного сглаживания итерационных решений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хермен Г. Т.** Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.



2. **Barrett H. H., Swindell W.** Radiological Imaging: The Theory of Image Formation, Detection and Processing. N. Y.: Academic Press, 1981.
3. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
4. **Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е.** Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999.
5. **Shepp L. A., Logan B. F.** The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. **21**, N 3. P. 21–43.
6. **Лихачев А. В.** Исследование  $1/z^2$ -фильтрации в алгоритмах томографии // Автометрия. 2007. **43**, № 3. С. 57–64.
7. **Лихачев А. В.** Регуляризирующая фильтрация проекций в алгоритмах двумерной томографии // Сибирский журнал вычислительной математики. 2008. **11**, № 2. С. 187–200.
8. **Redmer B., Weise F., Ewert U., Likhatchev A.** Location of reinforcement in structures by different methods of gamma-radiography // Proc. of the Intern. Symp. Non-Destructive Testing in Civil Engineering. Berlin: BAM, 2003. Vol. 020. P. 1–6.
9. **Redmer B., Ewert U., Radel Ch. et al.** Planar tomography under limited view conditions for crack detection in austenitic welds // Proc. of the 2nd Workshop “NDT in Progress”. Intern. Meeting of NDT Experts. Brno: Brno Univ. Technol., 2003. P. 321.
10. **Лихачев А. В., Пикалов В. В.** Новый метод определения неизвестного аддитивного фона в проекционных данных в задаче трехмерной томографии // ЖВММФ. 2002. **42**, № 3. С. 85–97.
11. **Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.** Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.
12. **Лихачев А. В., Пикалов В. В.** Трехмерная томография в диагностике газовых потоков при наличии непрозрачного тела // ПМТФ. 1998. **39**, № 1. С. 174–180.

*Поступила в редакцию 6 мая 2008 г.*