

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2008, том 44, № 1

УДК 550.834 + 519.64

**ТОМОГРАФИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА
СКОРОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В СЕЙСМИЧЕСКИХ СРЕДАХ***

С. М. Зеркаль

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

E-mail: zerkal@ngs.ru

Предлагается итерационный подход к решению обратной кинематической задачи с оптимизированным выбором начального приближения. Исследования имеют значение для акустической, оптической и сейсмической томографии в условиях приближения геометрической оптики.

Введение. Физические задачи, имеющие обоснованные математические модели (из них классические суть уравнения математической физики), могут эффективно исследоваться с использованием аппарата современной математики, ЭВМ и достижений информационно-вычислительных технологий, в частности вычислительной диагностики – междисциплинарного научного направления, связанного с обработкой значительных объемов числовых данных. Вычислительная (компьютерная) томография (ВТ) является одним из самых информативных методов вычислительной диагностики. ВТ позволяет по результатам измерений зондирующего излучения судить о внутреннем строении, физическом состоянии, химическом составе и других параметрах исследуемого объекта. Выделяют трансмиссионную (с внешним источником зондирующего излучения) и эмиссионную томографию (зондирующее излучение генерирует сам объект исследования). По области применения или используемому излучению выделяют медицинскую (успехи здесь отмечены Нобелевской премией), промышленную, геотомографию, рентгеновскую, акустическую, сейсмическую, оптическую томографию и т. д. В математическом отношении томографические задачи делятся на сравнительно более полно изученные линейные и менее исследованные нелинейные [1], к которым относится и рассматриваемая в данной работе обратная задача, связанная с геометрической оптикой. Задача геометрической оптики в пространстве является классической задачей вариационного исчисления [2], а задача,

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-01-8100_Бел., № 06-05-08014) и междисциплинарного интеграционного проекта № 10 СО РАН.

обратная к ней, – классической для интегральной геометрии [1]. Математическая модель этой физической ситуации описывается функционалом Ферма

$$\tau(x^0, x^1) = \int_{\Gamma(x^0, x^1)} n ds, \quad (1)$$

где $\tau(x^0, x^1)$ – время пробега рефрагированной волны вдоль геодезической (лучевой траектории) $\Gamma(x^0, x^1)$; x^0 и x^1 – местоположение источника и приемника сигнала соответственно; ds – элемент длины этой геодезической; n – показатель преломления (медленность).

Одной из задач геометрической оптики является следующая: при фиксированных точках x^0 и x^1 найти кривую $\Gamma(x^0, x^1)$, которая могла бы доставить минимум функционалу (1). Известно, что эта кривая – лучевая траектория и находится как решение соответствующей системы уравнений Эйлера для функционала Ферма. Если точки местоположений источника и приемника излучения «пробегают» некоторое множество значений, порождая тем самым семейство геодезических и вектор значений функционала на этих геодезических, то становится возможной постановка задачи определения по этой информации скорости, стоящей под знаком интеграла. Такая задача представляет собой задачу интегральной геометрии и называется обратной кинематической задачей (ОКЗ). Использование представлений геометрической оптики в сейсмических исследованиях дало основу для формирования важного раздела – геометрической сейсмологии, где одной из основных задач является ОКЗ, возникающая в различных постановках в зависимости от разновидности сигнала, геометрии системы наблюдений и т. д. ОКЗ – одна из первых рассмотренных обратных задач для дифференциальных уравнений (уравнение эйконала, связывающее величины, входящие в функционал Ферма) и имеет уже столетнюю историю [3].

Первый результат по неодномерной постановке был получен в двумерном случае с использованием линеаризации искомой скорости [4], затем в работах [5, 6] с применением метода ВТ теоретически обосновано, получено и численно исследовано решение трехмерной ОКЗ. Причем двумерный случай оказался «сильно» некорректным, а «слабо» некорректная трехмерная томографическая постановка требует специальной (круговой) системы наблюдений. Традиционные томографические алгоритмы, основанные на обращении интегральных преобразований, в глобальных и региональных исследованиях атмосферы, океана и земли мало пригодны (в частности, из-за характерной неполноты проекционных данных), в то время как итерационные методики алгебраической реконструкции позволяют реализовывать в кинематических исследованиях метод ВТ.

В представленной работе излагается итерационный подход к решению ОКЗ в линеаризованной постановке, основанный на алгебраической реконструкции распределения скорости в исследуемой среде при томографической системе наблюдений. Для линеаризации задачи первоначально используется скоростное распределение, основная составляющая которого представляется в виде линейной функции глубины. Для используемого в данной работе класса сред в численных исследованиях границы применимости линеаризации составили порядка 15 % относительного размера восстанавливаемой функции (малая неизвестная составляющая искомой скорости) от известной линейной функции (априорно известная основная составляющая

искомой скорости) [1]. Современные вычислительные технологии создали возможности для построения алгоритма, позволяющего значительно расширить класс восстанавливаемых скоростей и повысить точность решения. Существенным является последовательное решение «вложенных» задач, образующее итерационный процесс, в котором решение предыдущей задачи служит базой для решения последующей, что дает возможность изменять, уточнять основную известную составляющую распределения скорости (референтную среду) на каждой итерации. При организации итерационных процедур ключевым моментом является выбор начального приближения. В данной работе предложен новый подход к определению референтного скоростного распределения (начального приближения) для итеративной кинематической томографии, основанный на оптимизации параметров этого распределения, в соответствии с информацией об элементах проекционной матрицы (результатах измерений). В отличие от методик, строящих референтный скоростной разрез по априорной информации, что с вычислительной точки зрения далеко не всегда дает наилучшее разделение искомой скорости на референтную (известную) и аномальную (подлежащую определению) составляющие, разработанный алгоритм, использующий возможности метода ВТ, такое разделение оптимизирует. Это позволяет существенно повысить эффективность реализации итеративного решения ОКЗ в томографической постановке.

Постановка задачи и вычислительный алгоритм выбора начального приближения. Как уже отмечалось в данной работе, при решении ОКЗ в линеаризованной постановке требуется априорное знание референтного скоростного распределения, т. е. основной составляющей скорости, относительно которой выполняется линеаризация. От удачного выбора этой составляющей зависит успешное решение задачи. Для итерационной вычислительной технологии «улучшения» решения ОКЗ в томографической постановке, заключающейся в решении системы «вложенных» линеаризованных обратных задач, такое референтное скоростное распределение является начальным приближением, а наилучшее выполнение условий линеаризации обеспечивает сходимость итерационного процесса. Запишем основное интегральное соотношение кинематической сейсмологии (функционал Ферма) в операторном виде:

$$\tau = A(n).$$

Представим показатель преломления в виде бесконечной суммы:

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + \dots, \quad (2)$$

где $n_0 \gg |n_1| \gg |n_2| \gg \dots$, причем сумма последующих членов данного ряда – величина, малая по сравнению с предыдущим членом.

Относительно n_0 предполагается, что оно известно, тогда

$$\tau \approx A(n_0 + n_1), \quad \tau \approx A(n_0) + A'(n_0)n_1.$$

Последнее соотношение составляет основу для построения ньютонова итерационного процесса численного решения ОКЗ. Однако, как известно, сходимость метода Ньютона существенно зависит от выбора начального приближения показателя преломления n , которое при решении обратной задачи,

как правило, заранее неизвестно и выбирается в соответствии с априорной информацией об искомом скоростном распределении довольно грубо, что, естественно, негативно отражается на решении.

Будем рассматривать среды с квазилинейным законом роста скорости с глубиной $V(\mathbf{x}) = A + Bz + V_1(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x, y, z)$, A и B – положительные константы, а значения V_1 по модулю малы по отношению к линейной составляющей. Такой выбор неслучаен, поскольку этому условию удовлетворяет акустика океана и атмосферы. Он позволяет учесть общую тенденцию возрастания скорости сейсмического сигнала вглубь Земли и хорошо согласуется с профилем скорости в глубоких осадочных бассейнах. Кроме того, линейная зависимость скорости от глубины (в одномерном случае) обеспечивает явные формулы для луча (геодезической) и времени пробега рефрагированной волны вдоль него. Если постоянные A и B известны, то начальное приближение определено, но на практике могут быть известны лишь их грубые оценки, которые необходимо уточнить с оптимальным удовлетворением требований линеаризации.

Построим функционал

$$F(A, B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\tau_{ij} - \tau_{0ij}^{(A, B)})^2, \quad (3)$$

где m – количество томографических проекций; k – число элементов в каждой проекции; τ_{ij} – данные прямой кинематической задачи (времена пробега), измеренные с использованием томографического подхода; $\tau_{0ij}^{(A, B)}$ – соответствующие τ_{ij} времена, вычисляемые по явной формуле (зависящей от A и B) для среды с показателем преломления n . Минимизируя этот функционал в пространстве искомых параметров A и B , найдем их оптимальные значения.

Итак, пусть в полупространстве $z > 0$ показатель преломления $n(\mathbf{x})$ представлен выражением (2), где $n_0(z) = 1/(A^* + B^*z)$ – функция с неизвестными коэффициентами A^* и B^* , а $n_1(\mathbf{x})$ – функция аномальной добавки, при которой выполняется

$$\|n_0(z)\|_{L_1} \gg \|n_1(\mathbf{x})\|_{L_1}.$$

С учетом малости аномальной добавки для функционала (3) могут быть получены ограничения сверху и снизу с использованием формулы (1):

$$F^-(A, B) \leq F(A, B) \leq F^+(A, B),$$

где

$$F^-(A, B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \left(\int_{\Gamma_{0ij}} |n_0^{(A^*, B^*)} - n_0^{(A, B)}| ds \right)^2,$$

$$F^+(A, B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \left(\int_{\Gamma_{0ij}} |n_0^{(A^*, B^*)} - n_0^{(A, B)}| ds + \int_{\Gamma_{ij}} n_1 ds \right)^2.$$

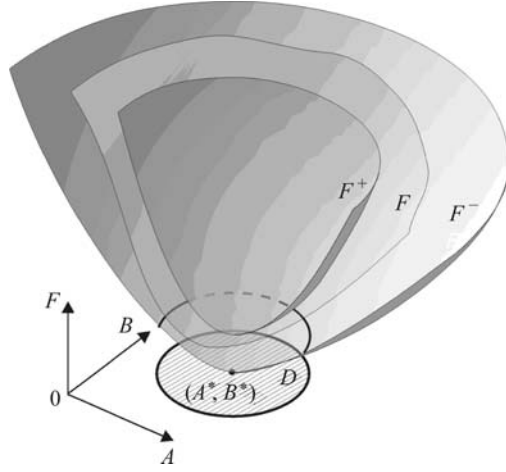


Рис. 1. Изображение поверхностей F^+ , F^- , $F(A, B)$ и области D . Область D ограничена эллипсом, который является проекцией на плоскость $F = 0$ пересечения поверхности F^- с плоскостью, параллельной плоскости $F = 0$, проходящей через точку минимума функционала F^+

Из этих выражений видно, что функции, ограничивающие рассматриваемый функционал, являются выпуклыми вниз (рис. 1) и имеют минимумы в точках $A = A^*$, $B = B^*$. Таким образом, можно сделать вывод о существовании минимума исследуемого функционала. Область D допустимых значений параметров, внутри которой достигается минимум функционала, определяется неравенствами

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \left(\int_{\Gamma_{0ij}} |n_0^{(A^*, B^*)} - n_0^{(A, B)}| ds \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \left(\int_{\Gamma_{ij}} n_1 ds \right)^2, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Рассмотрим численный эксперимент. Пусть $A^* = 0,5$ км/с, $B^* = 0,002$, функция аномальной добавки финитна, ее носитель – эллипсоид с полуосями $R_x = 200$ м, $R_y = 300$ м, $R_z = 100$ м и центром в точке $(0, 0, Z = 700)$ м определен неравенством

$$\frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} + \frac{(z - Z)^2}{R_z^2} \leq 1.$$

Внутри носителя функция аномалии имеет вид

$$n_1(\mathbf{x}) = \frac{5}{1 + \cos(\pi S)}, \quad S = \frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} + \frac{(z - Z)^2}{R_z^2}.$$

В качестве системы наблюдения выбрана поверхностная система приемников сейсмического сигнала, расположенных на поверхности $z = 0$ с регулярным шагом, равным 50 м, в области $\{-1450 \leq x \leq 1450, -1450 \leq y \leq 1450\}$; источник сейсмических колебаний расположен в точке $(-1450, 0, 10)$.

Для этой модели и системы наблюдения рассчитана прямая задача с помощью алгоритма, предложенного в [7]. Таким образом, получены экспериментальные значения τ_{ij} . Значения $\tau_{0ij}^{(A,B)}$ для показателя преломления $n_0^{(A,B)}(z)$ рассчитываются по явной формуле

$$\tau(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^g) = \frac{1}{B} \left[\operatorname{arcth} \left(\frac{C}{R} \right) + \operatorname{arcth} \left(\frac{r_g - C}{R} \right) \right],$$

где $\mathbf{x}^s = (x_s, y_s, z_s)$ – точка источника; $\mathbf{x}^g = (x_g, y_g, z_g)$ – точка приемника; $r_g = \sqrt{(x_s - x_g)^2 + (y_s - y_g)^2}$, а коэффициенты C и R определяются из выражений

$$C = \frac{r_g}{2} + \frac{(z_g - z_s)(2A + Bz_g + Bz_s)}{2Br_g}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{A}{B} + z_s \right) + C^2}.$$

Минимум функционала (3) отыскивался с помощью ньютонова метода, который в общей форме имеет вид

$$p_{k+1} = p_k - [\nabla^2 F(p_k)]^{-1} \nabla F(p_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $p_k = (A_k, B_k)$ – значение параметров на k -й итерации; $p_0 = (A_0, B_0)$ – начальное приближение. При начальном приближении $A = 0,1$, $B = 0,0001$ итерационный процесс отыскания минимума сошелся на 44-й итерации при параметрах $A = 0,49539$ и $B = 0,00198929$.

З а м е ч а н и е. Устойчивость определения искомым параметров для сложных сред может существенно зависеть от шага системы наблюдений, количества источников и приемников, а также их заглубления и размера проекционной матрицы.

«Поля времен» на поверхности $z = 0$ для показателей преломления $n(\mathbf{x})$ и $n_0(z)$ при найденных параметрах показаны на рис. 2. Разница этих полей (рис. 3) послужит для дальнейшего определения показателя преломления $n(\mathbf{x})$ методами сейсмической томографии.

Итерационный алгоритм решения обратной задачи. Построим следующий итерационный процесс:

нулевая итерация – синтез функции $n_0(z)$ или вычисление ее значений в требуемых точках;

первая итерация – синтез функции $n_1(\mathbf{x})$ (возможно при наличии полных проекционных данных с использованием явной формулы обращения [5]) и вычисление значений суммы $n_0(z) + n_1(\mathbf{x})$;

вторая итерация – вычисление n_2 и выполнение уточнения полученного на первой итерации приближения показателя преломления в соответствии со знанием проекционной матрицы $\|\tau_{ij}\|_{m \times n}$ с использованием метода вычислительной томографии, а именно алгебраической реконструкции [6], при этом в качестве референтной среды принимается среда с показателем преломления, полученным на предыдущей итерации (в данном случае первой).

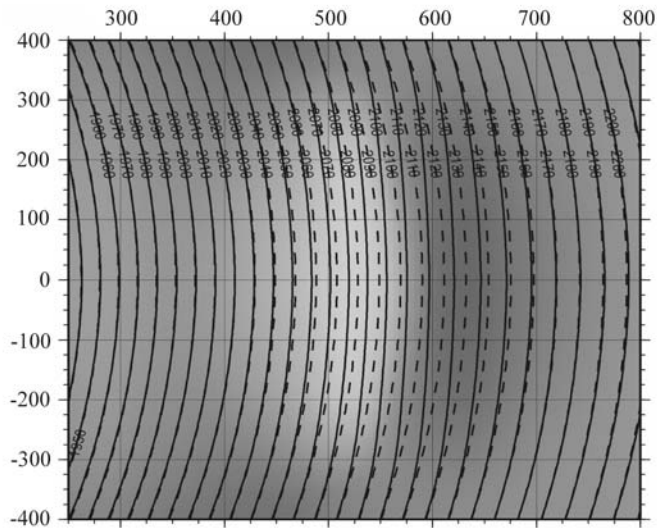


Рис. 2. Изображение фрагментов поверхностных «полей времен» для модели, включающей аномалию, (сплошные изолинии) и для модели среды без аномалии (пунктирные изолинии)

Далее итерации повторяются. Критерием прекращения процесса служит малость изменения сеточной нормы отклонения результата последующей итерации от результата предыдущей.

Отметим, что при осуществлении данной технологии необходимо, начиная со второй итерации, решать прямую кинематическую задачу для среды с дискретно заданной скоростью [8].

Погрешности результатов измерений могут оказать существенное негативное влияние на точность определения искомого скоростного распределе-

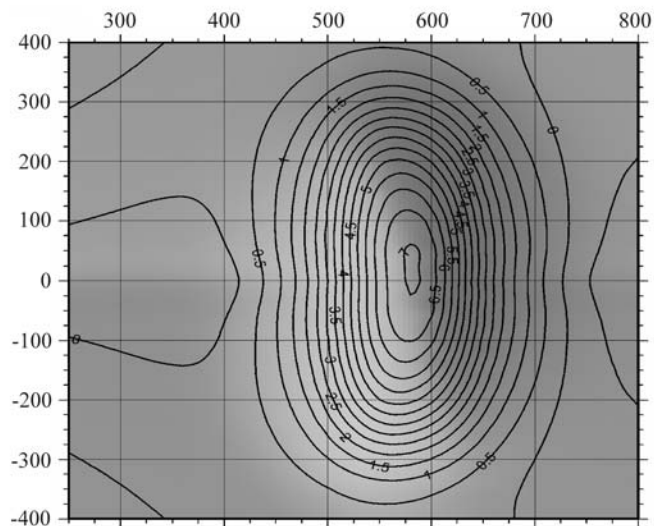


Рис. 3. Изображение фрагмента разницы поверхностных «полей времен» для модели, включающей аномалию, и для модели среды без нее

ния и при значительном уровне помех привести к расхождению итерационного процесса. Следует также отметить, что решаемая на каждой итерации обратная задача некорректная и для ее решения требуется применение регуляризации. Общие сведения об искомом скоростном распределении при использовании метода линеаризации в ОКЗ считаются известными. Предварительная априорная информация, например, при решении геофизических задач может быть получена по данным бурения либо по косвенной информации; кроме этого обычно известны оценки уровня помех. Таким образом, при построении соответствующей математической модели можно задать свойства функций, описывающих эту модель, и с учетом гладкости данных функций выполнять сглаживающие процедуры там, где они необходимы (начиная с исходной информации $\tau(x^0, x^1)$ и заканчивая представлением искомой скорости $V(x, y, z)$). Для сходимости ньютоновых итераций необходимо сглаживать результат каждой итерации в соответствии с информацией о гладкости искомого решения, если этого не делать, то численное решение задачи невозможно – накапливающиеся погрешности приводят к расходимости итераций.

Используемой регуляризирующей процедурой является нелинейная фильтрация, основанная на медианной фильтрации с последующим усреднением фильтром скользящего среднего. Относительно медианной фильтрации известно, что она хорошо подавляет импульсные шумы, но плохо удаляет квазибелый шум. В то же время оценка фильтра скользящего среднего характеризуется обратными свойствами. Поэтому процедура фильтрации выполняется в два этапа. На первом этапе строится оценка медианного фильтра, на втором – оценка скользящего среднего. Заданием управляющих параметров двухэтапный фильтр может трансформироваться в одноэтапный: в медианный или фильтр скользящего среднего.

В представленной работе не приводятся исследования алгоритма в зависимости от параметров системы наблюдения, а также помех. Это объясняется тем, что на каждой итерации решается обратная задача, близкая к задаче, для которой данные исследования выполнены в [1, 5] и могут быть распространены на рассматриваемый случай. Отличительной особенностью результатов, опубликованных в [1, 5], является применение для решения ОКЗ в линеаризованной трехмерной томографической постановке явной формулы обращения, основанной на интегральном преобразовании Радона, что накладывает ограничения на геометрию системы наблюдений и класс рассматриваемых скоростных распределений. Использование алгебраической реконструкции снимает эти ограничения и, как отмечалось во введении, позволяет построить итерационное решение ОКЗ.

Численно проиллюстрируем работу данного алгоритма.

Модель среды. Известная составляющая скорости имеет вид

$$V_0 = A(1 + \alpha z),$$

$\alpha = 0,5 \text{ км}^{-1}$, $A = 1 \text{ км/с}$. Аномальная составляющая скорости описывается гауссианом

$$V_1(x, z) = W \exp(-w_x(x - X_a)^2 - w_z(z - Z_a)^2).$$

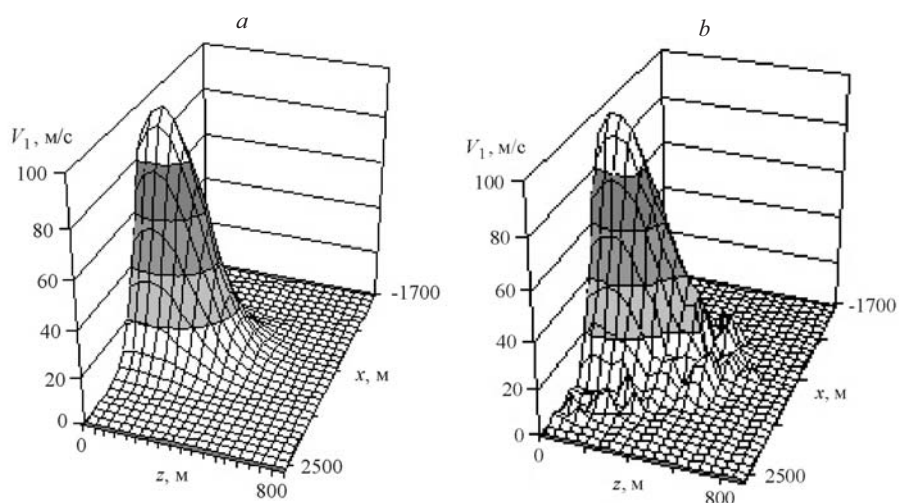


Рис. 4. Результаты численного эксперимента: распределение аномальной скорости, точное решение (а) и результат решения обратной задачи после трех итераций (б). Профиль расположен на оси x , а глубина – по оси z

Значения параметров: $w_x = 3$, $w_z = 20$, $X_a = 0,4$, $Z_a = 0,1$. Амплитуда аномалии W изменялась в диапазоне от $-0,15V_0$ до $0,30V_0$. Аномалия представляет собой близко расположенную к поверхности наблюдений неоднородность со значительным градиентом скорости по глубине, которая может быть как положительной, так и отрицательной (рис. 4, а). Выбор V_1 в таком варианте обусловлен характером возможных скоростных неоднородностей в условиях сейсморазведки.

Методика измерений и результат их томографической обработки. Система наблюдения представляет собой профиль с расположенными вдоль него источниками и сейсмоприемниками. Источники расположены в точках с координатами $X_{ист}(i) = -250 - 50(i - 1)$, $i = 1 - 30$, приемники – в точках с координатами $X_{пр}(j) = 250 + 50(j - 1)$, $j = 1 - 30$. Шаг системы наблюдений 50 м. Минимальное удаление источника от приемника 0,5 км, максимальное 3,4 км. После вычисления времени прибытия сигнала вся система наблюдения смещается на 100 м вдоль профиля (всего девять положений). Реконструкция неоднородности при трех итерациях представлена на рис. 4, б ($W = 0,1$) [8].

Заключение. Полученные в данной работе результаты представляют собой численную модель, развивающую томографический подход в сейсмике и акустике, а также в геометрической оптике. Область применения результатов работы определяется сейсмотомографическими задачами телесеймики, сейсморазведки, инженерной геофизики, сейсмического, акустического и оптического мониторинга и при исследовании сред с квазилинейной зависимостью скорости распространения зондирующего сигнала от глубины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lavrent'ev M. M., Zercal S. M., Trofimov O. E. Computer Modeling in Tomography and Ill-Posed Problems. Utrecht – Boston – Köln – Tokyo: VSP, 2001.

2. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Главиздат, 1953. Т. 4.
3. **Herglotz G.** Uber das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen // Phys. Zeitschr. 1907. **8**. S. 145.
4. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г.** О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // ДАН СССР. 1966. **171**, № 6. С. 1279.
5. **Зеркаль С. М.** Численное решение обратной трехмерной кинематической задачи сейсмики в линеаризованной постановке // Геология и геофизика. 1988. № 11. С. 126.
6. **Зеркаль С. М.** Определение непрозрачных зон в Земле методом компьютерной томографии в кинематической постановке // ДАН СССР. 1991. **317**, № 2. С. 330.
7. **Podvin P., Lecomte I.** Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity models: a massively parallel approach and its associated tools // Geophys. Journ. Intern. 1991. **105**. P. 271.
8. **Зеркаль С. М., Хогоев Е. А.** Итерационная технология сейсмотомографической диагностики на основе кинематики рефрагированных волн // Доклады РАН. 2005. № 4(401). С. 526.

Поступила в редакцию 29 ноября 2006 г.
