

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ  
КОНВЕЙЕРНОГО АЛГОРИТМА ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ****В. П. Карих***Федеральный научно-производственный центр «Алтай», г. Бийск  
E-mail: kar@frpc.secna.ru*

Проведен анализ объемов вычислений, направленных на реализацию различных алгоритмов трехмерной томографической реконструкции по конусным проекциям. Рассмотрен технологически простой способ спирального сканирования, удовлетворяющий условию полноты. Предложены методы сокращения объема вычислений путем учета только необходимой части проекционных данных для реконструкции объекта в конкретной точке, а также ускорения расчета индекса луча в обратной проекции. Продемонстрирован метод моделирования процесса конусной томографии на примере предложенного алгоритма.

**Введение.** Рентгеновская томография на основе конусного пучка излучения является трехмерным обобщением двумерной томографии, реализуемой с помощью веерного пучка, и обладает очевидным преимуществом – более высокой производительностью сбора данных. Однако в настоящее время как в медицинской диагностике, так и в неразрушающем контроле конусная томография применяется менее интенсивно, чем плоская. Это связано с высокой стоимостью оборудования и большой трудоемкостью алгоритмов. Тем не менее еще в 1983 году создана уникальная установка высокоскоростной трехмерной томографической реконструкции для диагностики сердца [1]. Сравнительно недавно томографы с двумерными детекторами стали выпускаться серийно, например медицинский томограф Aquilion Multi 16 фирмы “Toshiba” с 16-рядной матрицей детекторов [2], предназначенный для спирального сканирования всего тела. Для трехмерной реконструкции по существенно конусным проекциям применяется приближенный алгоритм Фельдкампа. Использование точных алгоритмов в практической трехмерной томографии пока затруднительно из-за их значительной трудоемкости. В данной работе рассматриваются методы повышения скорости реконструкции и предлагается быстрый приближенный алгоритм, применяемый для неразрушающего контроля.

**Точные алгоритмы реконструкции.** В первой основополагающей работе [3] в теории реконструкции многомерных функций по конусным данным представлена формула обращения для  $n$ -мерных комплексных функций. Редукция формулы на действительные функции была реализована значи-

тельно позже. Лишь в 1983 году в работе [4] была представлена формула реконструкции трехмерных действительных функций по конусным данным, которые получены от источника, движущегося по некоторой пространственной кривой.

Вычислительная процедура по формуле Туя затруднительна, поскольку содержит преобразование Фурье от обратной проекции, которое в обычном смысле не существует. Для численной реализации алгоритма Туя желательно иметь формулу, включающую регулярные функции. Такое выражение получено в [5].

Другой оригинальный метод точной реконструкции по конусным проекциям предложен в работах [6, 7].

Анализ вычислительных затрат на реализацию какого-либо точного алгоритма показывает, что для реконструкции объекта в  $N \times N \times N$  точках требуется не менее  $kN^5$  операций типа умножения, где  $k$  – некоторая константа, зависящая от алгоритма, вида траектории источника, способа программирования и не зависящая от  $N$ . Здесь предполагается, что число конусных проекций сравнимо с  $N$ .

**Приближенные алгоритмы.** Из приближенных алгоритмов, позволяющих сократить объем вычислений, часто применяются алгоритмы обратного проецирования фильтрованных проекций. Среди них наиболее популярен алгоритм Фельдкамп, который достаточно подробно проанализирован в [8]. В упомянутой работе качество реконструкции и вычислительная эффективность рассмотрены для траектории источника в виде окружности. К сожалению, такая траектория не удовлетворяет условию полноты для всех точек объекта. В ряде приложений, например в неразрушающем контроле, условие полноты траектории является существенным. Для обнаружения дефектов в виде произвольно ориентированных трещин или отслоений необходимо просвечивать объект так, чтобы излучение распространялось вдоль плоскости дефекта, иначе сигнал от дефекта на проекции будет очень слабым или вообще невидимым на фоне шумов. Поскольку пространственная ориентация плоскости дефекта может быть произвольной, то мы получаем требование, совпадающее с условием Туя: любая плоскость, пересекающая объект, должна пересекать траекторию источника. Если в неразрушающем контроле это условие не выполнить, то информация о дефектах будет утеряна на самом первом этапе – сборе радиометрических данных. Так как алгоритм Фельдкамп предназначен для круговой траектории, то его следует доработать для какой-либо другой траектории, удовлетворяющей условию полноты.

Рассмотрим приближенный алгоритм обратной проекции, предлагаемый в [7]. Формула реконструкции выглядит следующим образом:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^4} \int_{\lambda} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \Phi(\lambda)\|^2} \times \\ \times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} g(\varphi_{\perp}, \lambda) H_{\varepsilon}(\cos(\varphi' - \varphi)) \frac{|\cos \varphi| d\varphi}{M(\beta(\theta, \varphi), \Phi(\lambda)\beta(\theta, \varphi))} \|\Phi'(\lambda)\| d\lambda. \quad (1)$$

Здесь  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$  – распределение плотности томографируемого объекта;  $\Phi(\lambda)$  – траектория источника, расположенная вне объекта и завися-

щая от одного параметра  $\lambda$ ;  $g(\beta, \lambda)$  – конусная проекция, обусловленная положением на траектории и направлением  $\beta$  ( $\beta$  определяется сферическими углами  $\varphi$  и  $\theta$ );  $H_\varepsilon(t)$  – гамп-фильтр, вычисляемый с помощью выражения

$$H_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon^2 & \text{для } |t| < \varepsilon, \\ -1/t^2 & \text{для } |t| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Формула (1) представлена в локальных координатах, привязанных к точкам траектории и зависящих от направления на точку реконструкции (рис. 1).

Локальная координатная система вводится для удобства интегрирования по угловым переменным и определяется для каждой точки траектории источника следующим образом: единичный вектор  $\mathbf{E}_1$  направлен по касательной к траектории и находится из выражения  $\mathbf{E}_1 = \phi'(\lambda) / \|\phi'(\lambda)\|$ ; вектор  $\mathbf{E}_2$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{E}_1$ , лежит в плоскости, содержащей точку реконструкции  $x$  объекта и вектор  $\phi'$ ; вектор  $\mathbf{E}_3$  перпендикулярен двум предыдущим и равен их произведению:  $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ . Кроме того, в локальной системе введены сферические координаты  $\theta$  и  $\varphi$  (см. рис. 1), которые определяют направление произвольного вектора. Как видим, локальная система зависит от положения реконструируемой точки объекта, но она одинакова для целой плоскости объекта, включающей в себя данную точку и единичный вектор  $\mathbf{E}_1$ . В каждой точке траектории можно построить различные локальные системы координат, соответствующие различным точкам объекта, но отличаться они будут лишь углом поворота вокруг орта  $\mathbf{E}_1$ , который всегда касателен к траектории. В выражении (1)  $\varphi'$  – угол между ортом  $\mathbf{E}_1$  и направлением на точку реконструкции  $x$ ;  $\varphi_\perp = \varphi + \pi/2$ ;  $M(\beta(\theta, \varphi), \phi(\lambda)\beta(\theta, \varphi))$  – число пересечений траектории источника плоскостью, перпендикулярной направлению  $\beta(\theta, \varphi)$  и проходящей через точку  $\phi(\lambda)$ .

Алгоритм (1) точен, если почти каждая плоскость, проходящая через объект, пересекает траекторию источника точно  $M$  раз, т. е.

$$M(\beta(\theta, \varphi), \phi(\lambda)\beta(\theta, \varphi)) = \text{const.} \quad (2)$$

Этому условию удовлетворяет единственная геометрия – траектория в виде бесконечной прямой. Подобную траекторию можно применить на прак-

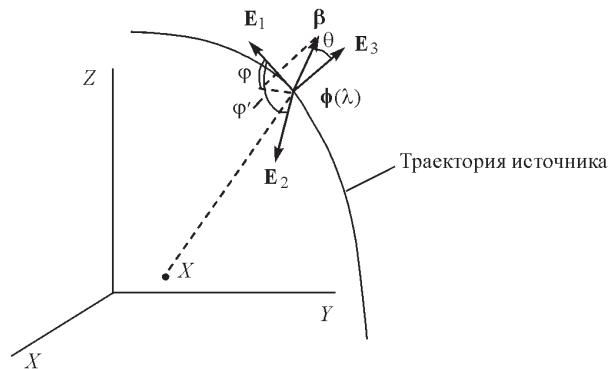


Рис. 1. Локальная система координат  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$

тике, если ограничить прямую до разумных пределов, но в этом случае геометрия становится существенно неполной. Использование алгоритма (1) в сочетании с полной геометрией источника, но не удовлетворяющей условию (2), согласно сообщению автора алгоритма, позволяет получить приближенную реконструкцию практически без артефактов.

Проведем оценку вычислительных затрат при реализации данного алгоритма. Формула (1) представляет собой операцию обратного проецирования с множителем  $\|\phi'(\lambda)\|/\|\mathbf{x} - \phi\|^2$ . Подробный анализ показывает, что расчет всех обратных проекций и обратное проецирование составят приблизительно  $30N^4$  операций, причем две трети расчетов ( $20N^4$ ) приходится на обратное проецирование и одна треть ( $10N^4$ ) – на расчет обратных проекций. Для значительного ускорения счета требуется сокращение количества значимых операций для обеих составляющих.

**Методы оптимизации вычислений.** Рассмотрим возможности ускорения расчетов в операции обратного проецирования. Допустим, что траектория источника удовлетворяет условию полноты для всего объекта. Для реконструкции части объекта в общем случае достаточно части траектории. Одним из резервов сокращения счета является суммирование не всех обратных проекций в конкретной реконструируемой точке, а лишь минимальной части траектории, удовлетворяющей условию полноты для данной точки. Очевидно, что условию полноты для выделенной точки объекта соответствует отрезок траектории, концы которого расположены на прямой, проходящей через эту точку. Действительно, любая плоскость, проходящая через выделенную точку, пересекает этот отрезок траектории.

Экономичный учет обратных проекций можно продемонстрировать на примере спиральной траектории источника. Предположим, что объект вписывается в цилиндр единичного радиуса, а траектория представляет собой винтовую спираль с шагом  $h$  и радиусом  $R$ , большим единицы, причем оси спирали и цилиндра совпадают. Для реконструкции какой-либо точки внутри цилиндра можно использовать отрезки спирали как меньшие, чем длина одного витка, так и большие. Рассмотрим произвольную точку внутри цилиндра и виток спирали, расположенный симметрично относительно этой точки. Если радиус спирали  $R$  в 1,43 раза больше, чем радиус цилиндра, то для реконструкции любой точки внутри цилиндра достаточно отрезка спирали меньшего, чем длина этого витка, т. е. такой отрезок удовлетворяет условию полноты Туя для выделенной точки объекта. Этот результат получен компьютерным моделированием.

Рассмотрим внутри цилиндра круг, плоскость которого перпендикулярна оси цилиндра, и виток спирали, расположенный симметрично относительно этого круга. Всякая точка, принадлежащая кругу, находится симметрично относительно витка, следовательно, этого витка траектории достаточно для реконструкции любой точки круга. В общем случае для реконструкции точек круга необходимо данных меньше, чем от одного витка. Так, с увеличением радиуса спирали  $R$  до бесконечности достаточным отрезком траектории будет половина витка спирали.

В рассматриваемом случае реконструкцию объекта можно проводить последовательно плоскость за плоскостью, которые помещены перпендикулярно оси цилиндра. Если для реконструкции первой плоскости потребуются данные одного витка спирали, то для второй, расположенной близко к первой, потребуются данные почти того же витка. Необходимо лишь добавить

небольшой отрезок спирали с одной стороны витка и такой же отрезок убрать с другой стороны. Подобная последовательность реконструкции напоминает работу конвейера.

Согласно приведенной выше оценке процедура обратного проецирования при реконструкции всего объекта в  $N^3$  точках содержит  $20N^4$  значимых операций или 20 операций на одну точку от одной проекции. При этом из 20 операций 14 требуется на определение индекса в массиве двумерной обратной проекции, соответствующего реконструируемой точке. Эти  $14N^4$  операций можно не производить при каждой реконструкции, если заранее вычислить и запомнить индексы лучей  $N$  обратных проекций для  $N^3$  точек объекта. Для этого потребуется  $N^4$  элементов памяти. При  $N = 1000$  объем памяти составит  $4 \cdot 10^{12}$  байт. Для современных персональных компьютеров такой объем памяти нереален ни для оперативного запоминающего устройства, ни для жесткого диска.

В случае спиральной траектории и реконструкции по плоскостям достаточно запомнить индексы обратных проекций для  $N^2$  точек одной плоскости. При реконструкции следующей плоскости можно использовать те же индексы. Точки реконструкции будут расположены так же, как и на предыдущей плоскости, но повернуты вокруг оси спирали на угол смещения нового витка относительно предыдущего. Таким образом, для запоминания индексов обратных проекций потребуется  $4N^3$  байт, что уже может поместиться в оперативной памяти современного компьютера.

Исключив вычисление индексов лучей и приняв во внимание, что величина  $\|\phi'(\lambda)\|$  одинакова для всех точек спиральной траектории, получим  $4N^4$  операций на всю процедуру обратного проецирования, а на всю реконструкцию –  $14N^4$ .

Рассмотрим теперь возможность экономного вычисления самих обратных проекций. Выигрыш в скорости счета обратной проекции получим, если обратим внимание на опыт применения алгоритмов обратного проецирования с фильтрацией двойным дифференцированием (ОПФДД) в плоской томографии. Такие алгоритмы успешно используются в неразрушающем контроле промышленных объектов [9]. Переход от алгоритма Смита (1) к алгоритму ОПФДД для трехмерной реконструкции логично осуществить заменой функции гаусс-фильтра  $H_c(t)$  оператором двойного дифференцирования, как это сделано в плоской томографии. Результат такого преобразования для плоского случая хорошо известен. В реконструированном объекте усилены высокочастотные составляющие его фурье-спектра, что приводит к искажению плавно меняющейся компоненты плотности объекта, но усиливает резкие перепады плотности на границах между разнородными элементами. Иначе говоря, этот алгоритм позволяет точно реконструировать расположение границ. Подобная реконструкция, являясь в оговоренном смысле неточной, предоставляет значительный объем полезной информации об исследуемом объекте и может быть применена как в неразрушающем контроле для обнаружения раковин, произвольно ориентированных трещин, так и в медицинской диагностике для визуализации расположения или смещения твердых тканей.

Замена фильтрации двойным дифференцированием приводит к радикальному сокращению времени на расчет обратных проекций, поскольку в данном случае вместо одномерного интеграла типа свертки выполняется

сложение трех чисел и одно умножение. Выражение для обратной проекции в результате такой замены преобразуется следующим образом:

$$\int_0^{\pi} g(\varphi_{\perp}, \lambda) H_{\varepsilon}(\cos(\varphi' - \varphi)) |\cos \varphi| d\varphi \rightarrow \frac{\partial^2 g(\varphi'; \lambda)}{\partial \varphi'^2} |\sin(\varphi')|,$$

а формула реконструкции приобретает вид

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^4} \int_{\lambda} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\phi}(\lambda)\|^2} \frac{\partial^2 g(\varphi'; \lambda)}{\partial \varphi'^2} |\sin(\varphi')| \|\boldsymbol{\phi}'(\lambda)\| d\lambda, \quad (3)$$

где вторая производная от конусной проекции вычисляется в локальной системе координат по угловой переменной  $\varphi$  при значении  $\varphi = \varphi'$ , соответствующем направлению на точку реконструкции  $\mathbf{x}$ .

В случае спиральной траектории величина  $\|\boldsymbol{\phi}'(\lambda)\|$  постоянна и может быть вынесена из-под знака интеграла в (3). Численное выражение обратной проекции представляется в виде

$$\tilde{g}(\varphi, \lambda) = (g(\varphi, \lambda) - g(\varphi + \Delta\varphi, \lambda) + g(\varphi, \lambda) - g(\varphi - \Delta\varphi, \lambda)) |\sin \varphi|. \quad (4)$$

Согласно (4) расчет обратной проекции для одного направления и одной точки траектории содержит одну операцию умножения, а всего  $N^3$  операций для  $N^2$  направлений и  $N$  точек траектории. Таким образом, пренебрегая меньшими степенями  $N$ , получим  $4N^4$  операций на реконструкцию методом обратного проецирования дважды дифференцированных проекций.

**Вычислительный эксперимент.** Для практического определения скорости счета при реконструкции по формуле (3) и для спиральной траектории, а также для анализа получаемых при этом томографических изображений была разработана программа, позволяющая выполнять определенную последовательность операций:

- моделирование трехмерного объекта,
- визуализацию его внутренней структуры на экране монитора,
- моделирование конусных проекций,
- расчет последовательности поперечных сечений по данным спирального сканирования,
- визуализацию реконструированного объекта.

В данной работе моделью трехмерного объекта является цилиндр, заполненный неоднородностями в виде эллипсоидов (рис. 2).

Количество эллипсоидов, размеры их полуосей, пространственную ориентацию и плотность материала можно задать произвольно, конфигурируя тем самым подходящий для исследования объект. Прохож-

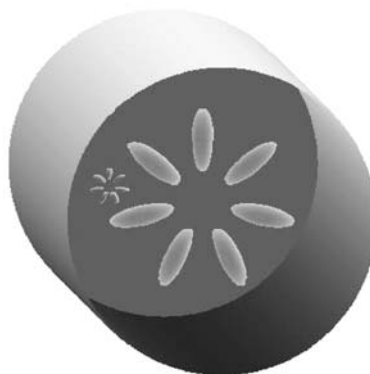


Рис. 2. Модель объекта для трехмерной томографии – цилиндр из однородного материала, содержащий набор эллипсоидов из материалов различной плотности



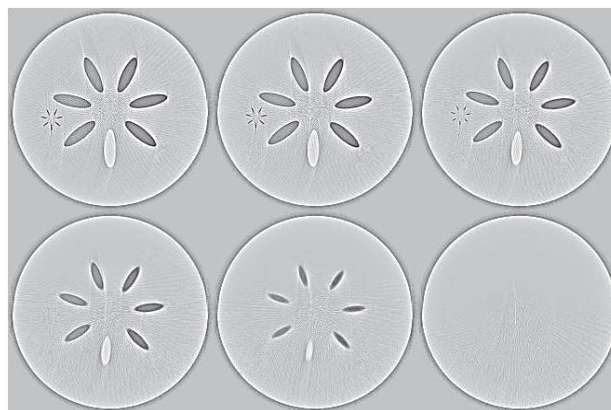


Рис. 3. Последовательность реконструированных сечений модельного объекта по конусным проекциям

дение излучения моделируется нахождением координат пересечения поверхностей объекта с лучом распространения гамма-квантов. Моделируя таким образом просвечивание объекта множеством лучей точечного источника или источника определенных размеров, получим теневую картину этого объекта.

По смоделированным данным спирального сканирования конусным пучком были вычислены томограммы. Последовательность восстановленных поперечных сечений смоделированного объекта представлена на рис. 3.

Результаты моделирования показали, что метод позволяет восстанавливать произвольно ориентированные границы трехмерного объекта. Алгоритм предельно экономичен для трехмерной реконструкции. Одно сечение размером  $512 \times 512$  пикселей рассчитывается приблизительно за 1 с на компьютере с тактовой частотой процессора 3,3 ГГц и оперативной памятью 2 Гбайт. На одном витке спирали моделировалось 360 конусных проекций. Время реконструкции одного сечения по конусным проекциям практически совпадает с временем расчета плоской томограммы методом ОПФДД. Совпадают также и характеристики томограмм [9, 10].

**Заключение.** В данной работе предложены методы сокращения количества вычислений в трехмерной реконструкции по конусным проекциям для спиральной траектории источника, удовлетворяющей условию полноты. В результате устранения расчетов индексов лучей в обратных проекциях производительность обратного проецирования может быть повышена приблизительно в 5 раз. Очевидно, что число вычислений также сокращает учет лишь минимального количества проекционных данных для каждой точки реконструкции объекта. Замена гаур-фильтра оператором двойного дифференцирования в алгоритме Смита позволяет получить трехмерный аналог известного алгоритма ОПФДД и сократить объем расчетов обратных проекций приблизительно в  $N$  раз.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Робб Р. А., Хоффман Э. А., Сайнак Л. Дж. и др. Высокоскоростная трехмерная рентгеновская реконструктивная томография: Динамический пространственный реконструктор // ТИИЭР. 1983. 71, № 3. С. 27.

2. <http://www.toshiba-medical.co.jp/tmd/english/> (сайт медицинской техники компании "Toshiba", Япония).
3. **Кириллов А. А.** Об одной задаче И. М. Гельфанда // ДАН СССР. 1961. **137**, № 2. С. 276.
4. **Туу Н. К.** An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM Journ. Appl. Math. 1983. **43**, N 3. P. 546.
5. **Трофимов О. Е.** К задаче восстановления функции трех переменных по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Автометрия. 1991. № 5. С. 57.
6. **Smith B. D.** Image reconstruction from cone-beam projections: Necessary and sufficient conditions and reconstruction methods // IEEE Trans. Med. Image. 1985. **MI-4**. P. 14.
7. **Smith B. D.** Cone-beam tomography: recent advances and tutorial review // Opt. Eng. 1990. **29**, N 5. P. 524.
8. **Лихачев А. В.** Сравнение алгоритма Фельдкампса с алгоритмом синтеза Фурье для трехмерной томографии // Автометрия. 2006. **42**, № 1. С. 88.
9. **Вайнберг Э. И., Казак И. А., Файнгойз М. Л.** Рентгеновская вычислительная томография по методу обратного проецирования с фильтрацией двойным дифференцированием // Дефектоскопия. 1985. № 2. С. 31.
10. **Вайнберг Э. И., Файнгойз М. Л.** О повышении пространственного разрешения рентгеновской вычислительной томографии // ДАН СССР. 1986. **286**, № 4. С. 875.

*Поступила в редакцию 13 декабря 2006 г.*

---