Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2007, том 43, № 6

УДК 519.234

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ. L_2-ПОДХОД

В. Г. Алексеев

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Москва

В рамках L_2-подхода рассмотрены непараметрические оценки плотности вероятности и ее производных. Предложены новые наборы весовых функций с ограниченным носителем, позволяющие строить допустимые (неулучшаемые в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$) оценки как самой плотности вероятности, так и ее производных до третьего порядка включительно.

Введение. Непараметрическому оцениванию плотности вероятности в рамках L_2-подхода была посвящена краткая заметка [1]. Сегодня, располагая основным результатом работы [2] (разложением в интеграл Фурье функции $\varphi(\omega) = [2\sin(\omega/2)/\omega]^{14}$), можно предложить существенно более содержательное обсуждение вопросов, связанных с непараметрическим оцениванием плотности вероятности и ее производных в рамках L_2-подхода. Что же касается практических применений оценок плотности вероятности, то здесь можно привести обзор [3], в котором (со ссылкой на десятки работ зарубежных авторов) указан ряд задач, где статистическое оценивание плотности вероятности и ее производных имеет первостепенное значение. В их число входят: построение обучающихся систем, способных с течением времени улучшать свое функционирование; разработка непараметрических алгоритмов идентификации и классификации многомерных наблюдений; разработка адаптивных алгоритмов фильтрации, а также приближенных алгоритмов нелинейной фильтрации (см. [3, с. 3, 30]). В монографии [4] в качестве одного из применений оценок плотности вероятности снова приведена задача классификации (распознавания образов).

Все предложенные в данной работе непараметрические (ядерные) оценки плотности вероятности и ее производных первых трех порядков строятся с помощью B-сплайнов Шенберга, точные формулы для которых были найдены относительно недавно.

1. Некоторые предварительные сведения. Говоря о B-сплайнах Шенберга, имеем в виду функции $M_L(x)$, определяемые соотношением

$$M_L(x) = (2\pi)^{-1} \int \left[\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^L \exp(itx)\,dt, \qquad L = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Здесь (и далее по тексту) интеграл без указания пределов обозначает интегрирование в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Все функции $M_L(x)$ финитны (имеют ограниченный носитель), каждая из них является сплайном порядка $L-1$. Последнее означает, что функция $M_L(x)$ «склеена» из многочленов степени $L-1$.

Если говорить о применении B-сплайнов Шенберга, то на практике чаще всего используются сплайны не выше третьего порядка, точные формулы для которых известны. Что же касается сплайнов более высоких порядков, то для них, например, в работе [5, разд. IVB] приводится следующая формула:

$$M_L(x) = \frac{1}{(L-1)!}\,\delta^L x_+^{L-1}, \tag{2}$$

где δ^p – центральный разностный оператор p-го порядка, а x_+^n обозначает усеченную степенну́ю функцию, определяемую соотношением

$$x_+^n = \begin{cases} x^n, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Даже беглый взгляд на формулы (2) и (3) убеждает нас в том, что вычисление функции $M_L(x)$ по этим формулам – отнюдь не тривиальная задача. По-видимому, именно это обстоятельство и явилось причиной того, что B-сплайны выше третьего порядка до сих пор не находят широкого применения.

В качестве альтернативы формулам (2) и (3) можно предложить точные формулы для всех функций $M_{2l}(x)$, $l=1,2,\ldots,7$. Для $l=1,2,\ldots,6$ функции $a_l(x)=M_{2l}(x)$ могут быть найдены в [6], а для $l=7$ – в работе [2]. Тем самым снимаются все трудности, стоявшие ранее на пути практического использования B-сплайнов Шенберга до 13-го порядка включительно.

Формулы для функций $a_l(x)$, $l=1,2$, занимают одну и две строки соответственно. Однако с каждым переходом от l к $l+1$ формулы, описывающие функции $a_l(x)$, становятся все более объемными и здесь не воспроизводятся. Далее в работе функции $a_l(x)$ будут использоваться без повторных ссылок на [2, 6].

2. Допустимые оценки плотности вероятности. Пусть

$$X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n \tag{4}$$

– выборка из n независимых наблюдений случайной величины X с неизвестной плотностью вероятности $p(x)$. В данной работе, как и в [7, 8], ограничимся L_2-подходом к изучению оценок функции $p(x)$ и ее производных. Критерием качества рассматриваемых нами статистических оценок в рамках L_2-подхода является интегральная среднеквадратичная ошибка (ИСКО). В частности, если речь идет об оценке самой плотности вероятности, то имеется в виду величина

$$J(p_n) = \left\langle \int [p_n(x) - p(x)]^2 dx \right\rangle,$$

где $p_n(x)$ – конструируемая оценка функции $p(x)$.

ИСКО оценок плотности вероятности изучалась и обсуждалась во многих работах, например [4, 9–27].

Классическая ядерная оценка (оценка Розенблатта – Парзена) плотности вероятности $p(x)$ по выборке (4) строится в виде

$$p_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h} \right), \tag{5}$$

где $h = h(n)$ – некоторая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю (но не слишком быстро!) при $n \to \infty$, а $K(x)$ – некоторая четная ограниченная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int K(x)\,dx = 1, \qquad \int K^2(x)\,dx < \infty.$$

Далее будет полезно понятие порядка весовой функции $K(x)$. Как и в работах [7, 8, 1], порядком весовой функции $K(x)$ будем называть наименьшее четное число $r \geq 2$, для которого $\int x^r K(x)\,dx \neq 0$. Как было отмечено в [1], при достаточно больших n применение весовых функций высших порядков (т. е. порядков $r > 2$) позволяет существенно (иногда даже многократно) уменьшить ошибку оценивания, если только оцениваемая плотность вероятности $p(x)$ является достаточно гладкой (многократно дифференцируемой) функцией. С учетом этого обстоятельства предлагаемый набор весовых функций $K(x)$ будет содержать в себе весовые функции не только минимального (второго) порядка, но и порядков $r > 2$. Носителем каждой из предлагаемых нами весовых функций является конечный интервал, что существенно ускоряет вычисление оценки (5) плотности вероятности: при достаточно больших n правая часть этой формулы будет реально зависеть лишь от небольшой доли исходных наблюдений X_i.

В цитируемой выше литературе могут быть найдены различные формулы для ИСКО $J(p_n)$ оценки плотности вероятности (5). Для нас наиболее удобной будет формула

$$J(p_n) = (2\pi n)^{-1} \int |\Psi(ht)|^2 (1 - |\Phi(t)|^2)\,dt + (2\pi)^{-1} \int |\Phi(t)|^2 |1 - \Psi(ht)|^2\,dt,$$

где $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ – преобразования Фурье функций $p(x)$ и $K(x)$ соответственно: $\Phi(t) = \int \exp(itx) p(x)\,dx$ и $\Psi(t) = \int \exp(itx) K(x)\,dx$ (см. работу [13]).

В силу четности функции $K(x)$ ее преобразование Фурье $\Psi(t)$ вещественно. Если кроме этого

$$0 \leq \Psi(t) \leq 1, \tag{6}$$

то не найдется другой весовой функции $K_*(x)$, которая была бы (с точки зрения избранного нами критерия) не хуже функции $K(x)$ одновременно для всех плотностей вероятности $p(x)$ и для всех n и h из области их значений. Если же условия (6) для функции $\Psi(t)$ не выполняются, то, полагая $\Psi_*(t) = \max\{0, \min[1, \Psi(t)]\}$ и $K_*(x) = (2\pi)^{-1} \int \exp(-itx) \Psi_*(t)\,dt$, определим, что замена весовой функции $K(x)$ функцией $K_*(x)$ может лишь уменьшить ошибку оценивания $J(p_n)$, каковы бы ни были плотность вероятности $p(x)$ и натуральное число n. В силу этих причин весовые функции $K(x)$, преобразования Фурье которых удовлетворяют условиям (6), были названы в работе [18] допустимыми. Если весовая функция $K(x)$ допустима в смысле [18], то и оценку плотности вероятности (5), построенную с ее помощью, будем также называть допустимой.

Как отмечено в работе [8], далеко не все из реально используемых весовых функций $K(x)$ допустимы в смысле [18]. Например, не являются допустимыми параболическая весовая функция (функция Епанечникова)

$$K(x)=\begin{cases} 3(1-x^2)/4, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases} \tag{7}$$

и косинусоидальная весовая функция

$$K(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases} \tag{8}$$

Преобразования Фурье весовых функций (7) и (8) знакопеременны и, следовательно, не удовлетворяют условиям (6).

Предлагаемые нами весовые функции $K_r(x)$ порядков $r=2,4,\ldots,12$ определяются формулами:

$$\begin{aligned}
&K_2(x)=a_2(x),\\
&K_4(x)=3a_2(x)-2a_3(x),\\
&K_6(x)=6a_2(x)-8a_3(x)+3a_4(x),\\
&K_8(x)=10a_2(x)-20a_3(x)+15a_4(x)-4a_5(x),\\
&K_{10}(x)=15a_2(x)-40a_3(x)+45a_4(x)-24a_5(x)+5a_6(x),\\
&K_{12}(x)=21a_2(x)-70a_3(x)+105a_4(x)-84a_5(x)+35a_6(x)-6a_7(x).
\end{aligned}$$

В силу формулы (1) и принятого определения $a_l(x)=M_{2l}(x)$

$$\int \exp(itx)a_l(x)\,dx = y^l, \quad l=1,2,\ldots,7, \tag{9}$$

где

$$y=y(t)=\left[\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2. \tag{10}$$

Чтобы доказать допустимость каждой из функций $K_r(x)$, следует показать, что ее преобразование Фурье

$$\Psi_r(t)=\int \exp(itx)K_r(x)\,dx \tag{11}$$

неотрицательно и не превосходит единицу. Пользуясь формулой (9), находим без труда, что для всех $r = 2, 4, \ldots, 12$

$$\Psi_r(t) = g_r(y) = 1 - \frac{r+2}{2}(1-y)^{r/2} + \frac{r}{2}(1-y)^{1+r/2}, \tag{12}$$

где $y = y(t)$ определяется формулой (10).

Дифференцируя по y каждую из функций $g_r(y)$ и замечая, что $y \in [0,1]$, приходим к неравенству

$$g_r'(y) = \frac{r(r+2)}{4} y(1-y)^{r/2-1} \geq 0.$$

Кроме того, так как $g_r(0) = 0$ и $g_r(1) = 1$, то отсюда следует $0 \leq g_r(y) = \Psi_r(t) \leq 1$, что и требовалось.

Осталось показать, что для всех $r = 2, 4, \ldots, 12$

$$\int x^l K_r(x)\,dx = 0, \quad l = 1, \ldots, r-1. \tag{13}$$

Тем самым будет доказано, что функция $K_r(x)$ является весовой функцией r-го порядка.

В соответствии с формулой (11) условия (13) равносильны условиям

$$\left.\frac{d^l \Psi_r(t)}{dt^l}\right|_{t=0} = 0, \quad l = 1, \ldots, r-1. \tag{14}$$

Обратимся снова к формуле (12). Так как $1 - y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ и $y''(0) \neq 0$, то лишь r-кратное дифференцирование функции $\Psi_r(t)$ по t приводит к величине, которая отлична от нуля в точке $t = 0$. Таким образом, условия (14) и (13) удовлетворяются.

В заключение заметим, что все предлагаемые здесь весовые функции $K_r(x)$ дифференцируемы. В этом случае, как и в [1], при надлежащем выборе последовательности $h = h(n)$ в формуле (5) оценка $p_n(x)$ будет при $n \to \infty$ сходиться к функции $p(x)$ не только в метрике $L_2(-\infty, \infty)$, но и в метрике пространства непрерывных функций $C(-\infty, \infty)$ (если только функция $p(x)$ непрерывна). Доказательство последнего утверждения можно найти в работе [28].

3. Допустимые оценки производной плотности вероятности. Оценку величины $p'(x)$ по выборке (4) будем, как и в работе [8], искать в виде

$$Dp_n(x) = \frac{1}{nh^2} \sum_{i=1}^{n} N\left(\frac{X_i - x}{h}\right),$$

где $h > 0$, а $N(x)$ – некоторая нечетная ограниченная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int x N(x)\,dx = 1, \qquad \int N^2(x)\,dx < \infty.$$

Порядком весовой функции $N(x)$ назовем наименьшее нечетное число $r \geq 3,$ для которого $\int x^r N(x)\,dx \neq 0.$

Согласно результатам работы [8, разд. 3] ошибка оценивания функции $p'(x)$ в метрике пространства $L_2(-\infty,\infty)$ описывается соотношением

$$J(Dp_n) \equiv \left\langle \int [Dp_n(x) - p'(x)]^2 dx \right\rangle =$$

$$= (2\pi n)^{-1} \int \left| \frac{\Lambda(ht)}{ht} \right|^2 [1 - |\Phi(t)|^2] t^2 dt + (2\pi)^{-1} \int |\Phi(t)|^2 \left| 1 - \frac{\Lambda(ht)}{iht} \right|^2 t^2 dt, \quad (15)$$

где $\Lambda(t)$ – преобразование Фурье функции $N(x),$ а функция $\Phi(t)$ такая, как в разд. 2 данной работы.

Назовем функцию $N(x)$ допустимой, если не существует другая весовая функция $N_*(x)$, которая была бы не хуже функции $N(x)$ одновременно для всех плотностей вероятности $p(x)$ и для всех n и h из области их значений. Формула (15) позволяет утверждать, что весовая функция $N(x)$ будет допустимой, если ее преобразование Фурье $\Lambda(t)$ удовлетворяет соотношению

$$0 \leq (it)^{-1} \Lambda(t) \leq 1 \quad (t \neq 0).$$

Полагая $N_r(x) = -K'_{r-1}(x),$ где функции $K_{r-1}(x)$ определены в разд. 2, получим допустимые весовые функции порядков $r = 3, 5, \ldots, 13.$ Легко видеть, что каждая из функций $N_r(x)$ дифференцируема, а ее носитель ограничен.

4. Допустимые оценки второй производной плотности вероятности. Как и в работе [8], оценку величины $p''(x)$ по выборке (4) будем искать в виде

$$D^2 p_n(x) = \frac{2!}{nh^3} \sum_{i=1}^{n} T\left(\frac{X_i - x}{h} \right), \quad (16)$$

где $h > 0,$ а функция $T(x)$ четна, ограничена и удовлетворяет условиям

$$\int x^k T(x)\,dx = k/2, \quad k = 0,\ 2; \qquad \int T^2(x)\,dx < \infty.$$

Порядком весовой функции $T(x)$ назовем наименьшее четное число $r \geq 4,$ для которого $\int x^r T(x)\,dx \neq 0.$

Согласно результатам работы [8, разд. 4] ошибка оценивания функции $p''(x)$ в метрике пространства $L_2(-\infty,\infty)$ описывается соотношением

$$J(D^2 p_n) \equiv \left\langle \int [D^2 p_n(x) - p''(x)]^2 dx \right\rangle =$$

$$= (2\pi n)^{-1} \int \left| \frac{2\Theta(ht)}{(ht)^2} \right|^2 [1 - |\Phi(t)|^2] t^4 dt + (2\pi)^{-1} \int |\Phi(t)|^2 \left| 1 - \frac{2\Theta(ht)}{(iht)^2} \right| t^4 dt, \quad (17)$$

где $\Theta(t)$ – преобразование Фурье функции $T(x)$, а функция $\Phi(t)$ такая же, как в разд. 2.

Формула (17) позволяет утверждать, что весовая функция $T(x)$ будет допустимой (в том смысле, что получаемая с ее помощью оценка (16) будет неулучшаемой в рамках избранного нами критерия), если ее преобразование Фурье $\Theta(t)$ удовлетворяет условию

$$0 \le 2!(it)^{-2}\,\Theta(t) \le 1 \qquad (t \ne 0).$$

Полагая

$$T_4(x) = a_3''(x)/2,$$
$$T_6(x) = [4a_3''(x) - 3a_4''(x)]/2,$$
$$T_8(x) = [10a_3''(x) - 15a_4''(x) + 6a_5''(x)]/2,$$
$$T_{10}(x) = [20a_3''(x) - 45a_4''(x) + 36a_5''(x) - 10a_6''(x)]/2,$$
$$T_{12}(x) = [35a_3''(x) - 105a_4''(x) + 126a_5''(x) - 70a_6''(x) + 15a_7''(x)]/2,$$

получим допустимые весовые функции $T_r(x)$ порядков $r = 4, 6, 8, 10, 12.$

5. Допустимые оценки третьей производной плотности вероятности. Как и в работе [7], оценку величины $p'''(x)$ по выборке (4) будем искать в виде

$$D^3 p_n(x) = \frac{3!}{nh^4}\sum_{i=1}^{n} S\left(\frac{X_i - x}{h}\right),$$

где $h > 0$, а функция $S(x)$ нечетна, ограничена и удовлетворяет условиям

$$\int x^k S(x)\,dx = \frac{k-1}{2}, \quad k = 1,\ 3; \qquad \int S^2(x)\,dx < \infty.$$

Порядком весовой функции $S(x)$ назовем наименьшее нечетное число $r \ge 5,$ для которого $\int x^r S(x)\,dx \ne 0.$

Согласно результатам работы [7, разд. 5] ошибка оценивания функции $p'''(x)$ описывается соотношением

$$J(D^3 p_n) \equiv \left\langle \int [D^3 p_n(x) - p'''(x)]^2\,dx \right\rangle =$$

$$= (2\pi n)^{-1}\int \left|\frac{3!\,\Xi(ht)}{(ht)^3}\right|^2 [1 - |\Phi(t)|^2]\,t^6 dt + (2\pi)^{-1}\int |\Phi(t)|^2 \left|1 - \frac{3!\,\Xi(ht)}{(iht)^3}\right|^2 t^6 dt, \quad (18)$$

где $\Xi(t)$ – преобразование Фурье функции $S(x)$.

Формула (18) позволяет утверждать, что весовая функция $S(x)$ будет допустимой, если ее преобразование Фурье $\Xi(t)$ удовлетворяет соотношению

$$0 \le 3!(it)^{-3}\,\Xi(t) \le 1 \qquad (t \ne 0).$$

Полагая $S_r(x) = -T'_{r-1}(x)/3,$ где функции $T_{r-1}(x)$ определены в разд. 4, получим допустимые весовые функции порядков $r = 5, 7, 9, 11, 13.$

Заключение. Располагая приведенным в разд. 2 набором допустимых весовых функций, можно утверждать, что во всех случаях, когда избранным нами критерием качества оценки плотности вероятности является ИСКО, следует использовать только допустимые весовые функции. Что же касается весовых функций, не являющихся допустимыми, то их применение неизбежно приведет к возрастанию ошибки оценивания, которое ничем более не может быть оправдано.

Аналогичное утверждение имеет место и в том случае, когда нас интересуют производные плотности вероятности $p(x)$. Допустимые оценки первой, второй и третьей производных функции $p(x)$ могут быть построены с помощью весовых функций, приведенных в разд. 3–5 соответственно. Располагая точными формулами для B-сплайнов $a_l(x)$, $l=4,5,6,7$, можно построить также допустимые оценки для производных $p^{(\nu)}(x)$ вплоть до $\nu=11$.

Особого внимания заслуживает то обстоятельство, что B-сплайны $a_l(x)$, $l=1,2,\ldots,7$, могут найти полезное применение не только в непараметрической статистике. В число задач, решаемых с помощью B-сплайнов Шенберга, входят: интерполирование функций по их значениям в узлах равномерной сетки [5, 29], построение высококачественных аналоговых фильтров нижних частот [2, 6], непараметрический спектральный анализ стационарных случайных процессов с непрерывным временем (оценка типа Уэлча) [30] и непараметрический спектральный анализ периодически коррелированных случайных процессов [31]. Благоприятные свойства B-сплайнов Шенберга отмечаются также в работах [32–34].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В. Г.** О допустимых непараметрических оценках плотности вероятности // Автометрия. 2005. **41**, № 3. С. 118.
2. **Алексеев В. Г.** Новый аналоговый линейный фильтр нижних частот // Радиотехника. 2005. № 10. С. 143.
3. **Шапиро Е. И.** Непараметрические оценки плотности вероятности в задачах обработки результатов наблюдений // Зарубеж. радиоэлектрон. 1976. № 2. С. 3.
4. **Абсава Р. М., Надарая Э. А.** Некоторые задачи теории непараметрического оценивания функциональных характеристик закона распределения наблюдений. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 2005.
5. **Meijering E.** A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing // Proc. IEEE. 2002. **90**, N 3. P. 319.
6. **Алексеев В. Г.** Новые непрерывные фильтры нижних частот // Радиотехника. 1998. № 4. С. 34.
7. **Алексеев В. Г.** О непараметрических оценках плотности вероятности и ее производных // Проблемы передачи информации. 1982. **18**, № 2. С. 22.
8. **Алексеев В. Г.** О допустимых непараметрических оценках плотности вероятности и ее производных // Проблемы передачи информации. 1994. **30**, № 2. С. 36.
9. **Надарая Э. А.** Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1983.
10. **Prakasa Rao B. L. S.** Nonparametric Functional Estimation. Orlando: Academic Press, 1983.
11. **Silverman B. W.** Density Estimation for Statistics and Data Analysis. London – New York: Chapman and Hall, 1986.
12. **Лапко А. В., Лапко В. А., Соколов М. Я., Ченцов С. В.** Непараметрические системы классификации. Новосибирск: Наука, 2000.
13. **Davis K. B.** Mean integrated squared error properties of density estimates // Ann. Statist. 1977. **5**, N 3. P. 530.

14. **Казбарас А.** Адаптивная ядерная оценка квадратично-интегрируемой плотности распределения // Литовский мат. сб. 1986. **26**, № 4. С. 673.

15. **Елисеенко И. Л.** Об оценке плотности распределения сплайн-функциями // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1986. **153**. С. 27.

16. **Singh R. S.** MISE of kernel estimates of a density and its derivatives // Statist. Probab. Lett. 1987. **5**, N 2. P. 153.

17. **Hall P., Marron J. S.** Choice of kernel order in density estimation // Ann. Statist. 1988. **16**, N 1. P. 161.

18. **Cline D. B. H.** Admissible kernel estimators of a multivariate density // Ibid. N 4. P. 1421.

19. **Izenman A. J.** Recent developments in nonparametric density estimation // Journ. Amer. Statist. Assoc. 1991. **86**, N 413. P. 205.

20. **Голубев Г. К.** Непараметрическое оценивание гладких плотностей распределения в L_2 // Проблемы передачи информации. 1992. **28**, № 1. С. 52.

21. **Fan J., Marron J. S.** Best possible constant for bandwidth selection // Ann. Statist. 1992. **20**, N 4. P. 2057.

22. **Pensky M., Vidakovic B.** Adaptive wavelet estimator for nonparametric density deconvolution // Ann. Statist. 1999. **27**, N 6. P. 2033.

23. **Loader C. R.** Bandwidth selection: classical or plug-in? // Ibid. N 2. P. 415.

24. **Prakasa Rao B. L. S.** Nonparametric functional estimation: an overview // Asymptotics, Nonparametrics, and Time Series. Statistics Textbooks and Monographs. **158**. N. Y.: Marcel Dekker, 1999. P. 461.

25. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н., Французов А. В.** К применению непараметрических критериев согласия для проверки адекватности непараметрических моделей // Автометрия. 2002. № 2. С. 3.

26. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Непараметрические методики анализа множеств случайных величин // Автометрия. 2003. **39**, № 1. С. 54.

27. **Sheather S. J.** Density estimation // Statist. Sci. 2004. **19**, N 4. P. 588.

28. **Алексеев В. Г.** Об оценке плотности вероятности и ее производных // Мат. заметки. 1972. **12**, № 5. С. 621.

29. **Unser M.** Sampling – 50 years after Shannon // Proc. IEEE. 2000. **88**, N 4. P. 569.

30. **Алексеев В. Г.** Непараметрический спектральный анализ стационарных случайных процессов // Автометрия. 2000. № 4. С. 131.

31. **Алексеев В. Г.** Эмпирический спектральный анализ периодически коррелированных случайных процессов // Проблемы передачи информации. 1997. **33**, № 4. С. 61.

32. **Kano H., Egerstedt M., Nakata H., Martin C. F.** *B*-splines and control theory // Appl. Math. and. Comput. 2003. **145**, N 2, 25. P. 263.

33. **Свиньин С. Ф.** Базисные сплайны в теории отсчетов сигналов. С.-Пб.: Наука, 2003.

34. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.

Поступила в редакцию 17 октября 2006 г.