

**ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ
В УСЛОВИЯХ МУЛЬТИСТРУКТУРНЫХ ПОМЕХ****Ю. Г. Булычев, А. В. Елисеев***Ростовский военный институт ракетных войск, г. Ростов-на-Дону*

Решается задача обработки измерений, содержащих динамические помехи наблюдения. Полученный метод обладает свойством инвариантности к кусочно-непрерывным помехам детерминированной структуры с неизвестными параметрами. Метод не требует расширения пространства состояния и обеспечивает повышение оперативности решения задачи оценивания.

Введение. Эффективность управления объектами различного рода во многом определяется точностью и оперативностью определения вектора состояния. Когда известна динамическая модель объекта, на практике часто используются алгоритмы оптимальной и квазиоптимальной фильтрации [1, 2]. В отсутствие моделей динамики или при их низкой адекватности для решения задач оценивания и идентификации используются алгоритмы на основе метода наименьших квадратов (МНК) [3].

Данные алгоритмы эффективны, когда в канале измерения присутствует только флуктуационная ошибка. Однако реальные измерения могут сопровождаться и другими типами ошибок, например динамическими ошибками с известной структурой их математической модели и неизвестными параметрами (сингулярные ошибки) [3–7]. Примером источника возникновения таких ошибок является измерительный комплекс полигона, содержащий разнородные измерители параметров движения с различными тактико-техническими характеристиками. Другим примером является бортовой навигационный комплекс (БНК) летательного аппарата (ЛА), построенный на основе комплексирования разнородных измерителей. В этом случае БНК представляет собой сложный объект, структура которого может меняться в зависимости от помеховой обстановки и режимов полета ЛА [8, 9], что приводит к изменению структуры сингулярной помехи. Погрешности подобного рода возникают и при работе аппаратуры потребителей спутниковой навигационной системы в случае перехода от оптимального созвездия навигационных космических аппаратов к неоптимальному [1].

В [3–6] рассмотрены алгоритмы обработки измерений, содержащих сингулярные ошибки. Однако следует отметить, что применение в этом случае расширенного МНК [3, 6] приводит к значительному увеличению размерности задачи, пропорциональному количеству структур помехи, и эффекту «размазывания» точности. Применение алгоритмов, описанных в работах [4,

5], целесообразно в случае, когда структура помехи не меняется в течение сеанса измерения.

Таким образом, задача синтеза метода обработки измерений, содержащих динамические помехи наблюдения с известной структурой, но неизвестными параметрами, является актуальной. Примером помех такого рода являются кусочно-непрерывные (мультиструктурные) помехи, характеризующиеся на интервалах непрерывности произвольными обобщенными многочленами со случайными коэффициентами.

Постановка задачи. Пусть на отрезке $[t_0, T]$ наблюдается скалярная смесь $y^{(l)}(t) \in W_y$ полезного сигнала $x(t) \in W_x$, кусочно-непрерывной помехи $h^{(l)}(t) \in W_h$ (соответствующей l -му неизвестному варианту построения, $l \in \overline{1, D}$) и флуктуационного шума $\xi(t) \in W_\xi$:

$$y_n^{(l)} = x_n + h_n^{(l)} + \xi_n, \quad n = \overline{0, N}, \quad l \in \overline{1, D}, \quad (1)$$

где $y_n^{(l)} = y^{(l)}(t_n)$; $x_n = x(t_n)$; $h_n^{(l)} = h^{(l)}(t_n)$; $\xi_n = \xi(t_n)$; $t_n \in [t_0, T] \subset R^1$; $t_N = T$; W_y, W_x, W_h и W_ξ – линейные подпространства одного и того же линейного пространства W .

Сигнал $x(t)$ задается в конечно-аналитическом виде:

$$x(t) = A^T q(t) = q^T(t) A, \quad (2)$$

где $A = [a_j, j = \overline{1, M_x}]^T$ – вектор неизвестных коэффициентов; $q(t) = [q_j(t), j = \overline{1, M_x}]^T$ – вектор линейно независимых функций (базис сигнала).

Помеха $h^{(l)}(t)$ имеет на отрезке $[t_0, T]$ конечное число фиксированных точек разрыва первого рода и на i -м интервале непрерывности $[t_{i-1}^*, t_i^*)$ описывается следующим образом:

$$h^{(l)}(t) = [B^{(l)}]^T \Theta^{(l)}(t) = [\Theta^{(l)}(t)]^T B^{(l)}, \quad i \in \overline{1, L}, \quad l_i \in \overline{1, G}, \quad t_0^* = t_0, \quad t_L^* = t_N = T,$$

где $\Theta^{(l)}(t) = [\theta_p^{(l)}(t), p = \overline{1, M_{h_i}}]^T$ – l_i -й базис помехи, принадлежащий возможному множеству базисов $\{\Theta^{(g)}(t)\}_{g=1}^G$, т. е. $\Theta^{(l)}(t) \in \{\Theta^{(g)}(t)\}_{g=1}^G$; $B^{(l)} = [b_p^{(l)}, p = \overline{1, M_{h_i}}]^T$ – вектор неизвестных коэффициентов, $l_i \in \overline{1, G}$.

На всем отрезке наблюдения $[t_0, T]$ помеха $h^{(l)}(t)$ задается выражением

$$h^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^L [\delta(t - t_{i-1}^*) - \delta(t - t_i^*)] [\Theta^{(l)}(t)]^T B^{(l)}, \quad t \in [t_0, T], \quad (3)$$

где $l \in \overline{1, D}$ ($D = LG$) – номер варианта построения кусочно-непрерывной помехи $h^{(l)}(t)$, соответствующей L интервалам непрерывности и G возможным базисам; $\delta(t - \tau) = 1$ при $t \geq \tau$; $\delta(t - \tau) = 0$ при $t < \tau$.

Полагается, что точки разрыва t_i^* известны заранее или определяются с помощью критериев и процедур оптимального обнаружения.

Флуктуационный шум $\xi(t)$ характеризуется в точках $\{t_n\}_{n=0}^N$ нулевым математическим ожиданием и соответствующей корреляционной матрицей K_{Ξ} (здесь $\Xi = [\xi_n, n=0, N]^T$).

Введем над сигналом $x(t) \in W_x$ ($t \in [t_0, T]$) линейный ограниченный оператор $Z: W_x \rightarrow R^{M_{\zeta}}$ такой, что $Z\{x(t)\} = [\zeta_r \{x(t)\}, r=1, M_{\zeta}]^T = [\zeta_r, r=1, M_{\zeta}]^T$, где $\zeta_r \in R^1$, т. е. рассматривается линейный оператор со значениями в вещественном пространстве $R^{M_{\zeta}}$. Поставим задачу оптимального (в среднеквадратическом смысле) оценивания значений данного оператора на основе выборки $\{y_n^{(l)}\}_{n=0}^N$. Другими словами, требуется найти оптимальный линейный ограниченный оператор $Z^*: R^{N+1} \rightarrow R^{M_{\zeta}}$ такой, что его значения $Z^*\{y_0^{(l)}, y_1^{(l)}, \dots, y_N^{(l)}\}$ близки к значениям $Z\{x(t)\}$ исходного оператора $Z: W_x \rightarrow R^{M_{\zeta}}$. При этом потребуем, чтобы оператор $Z^*\{\cdot\}$ был инвариантен к помехе типа (3), т. е. $Z^*\{h_0^{(l)}, h_1^{(l)}, \dots, h_N^{(l)}\} = [0]_{M_{\zeta} \times 1}$, $l \in \overline{1, D}$, где $[0]_{M_{\zeta} \times 1}$ – нулевой вектор-столбец размером $M_{\zeta} \times 1$.

Решение задачи. Для дальнейшего изложения введем следующие обозначения:

$$Y^{(l)} = \begin{bmatrix} y_0^{(l)} \\ y_1^{(l)} \\ \vdots \\ y_N^{(l)} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T q(t_0) \\ A^T q(t_1) \\ \vdots \\ A^T q(t_N) \end{bmatrix}, \quad H^{(l)} = \begin{bmatrix} h_0^{(l)} \\ h_1^{(l)} \\ \vdots \\ h_N^{(l)} \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}.$$

Кроме того, введем набор матриц, соответствующих всем возможным вариантам построения помехи:

$$\Theta^{(d)} = \begin{bmatrix} [\Theta^{(d_1)}]_{N_1 \times M_{h_1}} & \vdots & [0]_{N_1 \times M_{h_2}} & \vdots & \dots & \vdots & [0]_{N_1 \times M_{h_L}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0]_{N_2 \times M_{h_1}} & \vdots & [\Theta^{(d_2)}]_{N_2 \times M_{h_2}} & \vdots & \dots & \vdots & [0]_{N_2 \times M_{h_L}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0]_{N_L \times M_{h_1}} & \vdots & [0]_{N_L \times M_{h_2}} & \vdots & \dots & \vdots & [\Theta^{(d_L)}]_{N_L \times M_{h_L}} \end{bmatrix}_{\overline{N} \times M_{h_{\Sigma}}}, \quad (4)$$

где

$$M_{h_{\Sigma}} = \sum_{i=1}^L M_{h_i}; \quad \Theta^{(d_i)} = [\theta_p^{(d_i)}(t_{ij}), j = \overline{0, N_i - 1}, p = \overline{1, M_{h_i}}]; \quad t_{ij} \in \{t_n\}_{n=0}^N;$$

$$t_{i-1}^* \leq t_{ij} < t_i^*; \quad i = \overline{1, L}; \quad t_{i0} = t_{i-1}^*; \quad t_{L0} = t_{L-1}^*; \quad t_{L, N_L - 1} = t_L^* = t_N = T; \quad \overline{N} = N + 1;$$

$$\sum_{i=1}^L N_i = N+1; \quad B^{(d)} = [b_p^{(d)}, p=\overline{1, M_{h_i}}]^T.$$

С учетом данных обозначений вместо (1) можно воспользоваться векторным представлением

$$Y^{(l)} = X + H^{(l)} + \Xi, \quad l \in \overline{1, D}, \quad Y^{(l)}, X, H^{(l)}, \Xi \in R^{N+1}. \quad (5)$$

Сформируем теперь набор линейных операторов $Z^{(d)} \{ \cdot \} = P_\zeta^{(d)}$, зависящих от параметра $d \in \overline{1, D}$, таких, что

$$Z^{(d)} \{ Y^{(l)} \} = P_\zeta^{(d)} Y^{(l)}, \quad Z^{(d)}: R^{N+1} \rightarrow R^{M_\zeta}, \quad (6)$$

где $P_\zeta^{(d)} = [p_{\zeta rn}^{(d)}, r=\overline{1, M_\zeta}, n=\overline{0, N}]$ – матрица неизвестных коэффициентов; $Z^{(d)} \{ Y^{(l)} \} = [\zeta_r^{(d)}, r=\overline{1, M_\zeta}]^T$, $\zeta_r^{(d)} \in R^1$.

Формула (6) задает D оценок $Z^{(d)} \{ Y^{(l)} \}$ значений $Z \{ x(t) \}$ исходного оператора $Z \{ \cdot \}$, при этом в силу линейности задачи корреляционные матрицы данных оценок находятся по правилу [3]

$$K_\zeta^{(d)} = P_\zeta^{(d)} K_\Xi [P_\zeta^{(d)}]^T, \quad d = \overline{1, D}. \quad (7)$$

При выборе матриц $P_\zeta^{(d)}$ потребуем выполнения:

1) условия минимизации следа $\text{tr}(K_\zeta^{(d)}) = \sum_{r=1}^{M_\zeta} [\sigma_{\zeta r}^{(d)}]^2$ (где $[\sigma_{\zeta r}^{(d)}]^2$ – диагональные члены матрицы $K_\zeta^{(d)}$);

2) условия несмещенности оценок значений оператора $Z \{ \cdot \}$:

$$Z^{(d)} \{ X \} - Z \{ x(t) \} = [0]_{M_\zeta \times 1}, \quad d = \overline{1, D}; \quad (8)$$

3) условия инвариантности оператора $Z^{(d)} \{ \cdot \}$ к помехе $H^{(d)}$:

$$Z^{(d)} \{ H^{(d)} \} = [0]_{M_\zeta \times 1}, \quad d = \overline{1, D}. \quad (9)$$

Если принять во внимание, что $X = QA$ ($Q = [q_j(t_n), n=\overline{0, N}, j=\overline{1, M_x}]$), то с учетом (2), (6) и (8) имеем

$$Z^{(d)} \{ X \} = Z \{ x(t) \} = Z \{ q^T(t)A \} = P_\zeta^{(d)} X = P_\zeta^{(d)} QA. \quad (10)$$

Непосредственно из (10) вытекает следующее условие несмещенности оценки, эквивалентное (8):

$$Z \{ q^T(t) \} - P_\zeta^{(d)} Q = [0]_{M_\zeta \times M_x}, \quad (11)$$

где $Z \{ q^T(t) \} = [\zeta_r \{ q_j(t) \}, r=\overline{1, M_\zeta}, j=\overline{1, M_x}]$; $[0]_{M_\zeta \times M_x}$ – нулевая матрица размера $M_\zeta \times M_x$.

Отмечая, что $H^{(d)} = \Theta^{(d)} B^{(d)}$, аналогично получаем

$$Z^{(d)} \{H^{(d)}\} = Z^{(d)} \{\Theta^{(d)} B^{(d)}\} = P_{\zeta}^{(d)} \Theta^{(d)} B^{(d)} = [0]_{M_{\zeta} \times 1}. \quad (12)$$

Непосредственно из (9) и (12) вытекает следующее условие инвариантности:

$$P_{\zeta}^{(d)} \Theta^{(d)} = [0]_{M_{\zeta} \times M_{h_{\Sigma}}}. \quad (13)$$

В дальнейшем полагаем, что системы уравнений (11), (13) совместны, а расширенная матрица $[Q \ : \ \Theta^{(d)}]$ имеет ранг $M_x + M_{h_{\Sigma}} < N + 1$.

Задача нахождения матрицы $P_{\zeta}^{(d)}$ решается методом условной оптимизации Лагранжа, при этом ищется минимум следа матрицы (7) с учетом ограничений (11) и (13).

Несложный анализ показывает, что сформулированная задача распадается на M_{ζ} подзадач вида

$$\begin{cases} \min_{P_{\zeta_r}^{(d)}} [\sigma_{\zeta_r}^{(d)}]^2 = \min_{P_{\zeta_r}^{(d)}} [P_{\zeta_r}^{(d)}]^T K_{\Xi} P_{\zeta_r}^{(d)}, \\ \zeta_r \{q(t)\} - Q^T P_{\zeta_r}^{(d)} = [0]_{M_x \times 1}, \quad r \in \overline{1, M_{\zeta}}, \\ [\Theta^{(d)}]^T P_{\zeta_r}^{(d)} = [0]_{M_{h_{\Sigma}} \times 1}. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $P_{\zeta_r}^{(d)} = [P_{\zeta_r n}^{(d)}, n = \overline{0, N}]^T$ – r -й столбец матрицы $[P_{\zeta}^{(d)}]^T$; $\zeta_r \{q(t)\} = [\zeta_r \{q_j(t)\}, j = \overline{1, M_x}]^T = [\zeta_{rj}, j = \overline{1, M_x}]^T$, $\zeta_{rj} \in R^1$, $r = \overline{1, M_{\zeta}}$.

С учетом (14) условная оптимизация сводится к нахождению минимума функции

$$\begin{aligned} F(P_{\zeta_r}^{(d)}, \gamma_r^{(d)}, \eta_r^{(d)}) &= [P_{\zeta_r}^{(d)}]^T K_{\Xi} P_{\zeta_r}^{(d)} + [\gamma_r^{(d)}]^T [\Theta^{(d)}]^T P_{\zeta_r}^{(d)} + \\ &+ (\zeta_r \{q^T(t)\} - [P_{\zeta_r}^{(d)}]^T Q) \eta_r^{(d)}, \end{aligned}$$

где $\gamma_r^{(d)} = [\gamma_{rp}^{(d)}, p = \overline{1, M_{h_{\Sigma}}}]^T$ и $\eta_r^{(d)} = [\eta_{rj}^{(d)}, j = \overline{1, M_x}]^T$ – векторные множители Лагранжа.

Опуская несложные, но достаточно громоздкие выкладки, получаем следующее решение:

$$P_{\zeta_r}^{(d)} = \Psi_{\Theta}^{(d)} \Gamma_Q (Q^T \Psi_{\Theta}^{(d)} \Gamma_Q)^{-1} \zeta_r \{q(t)\}, \quad (15)$$

где $\Psi_{\Theta}^{(d)} = E_{N+1} - \Gamma_{\Theta}^{(d)} [\Phi_{\Theta}^{(d)}]^{-1} [\Theta^{(d)}]^T$, E_{N+1} – единичная матрица размера $(N+1) \times (N+1)$; $\Phi_{\Theta}^{(d)} = [\Theta^{(d)}]^T K_{\Xi}^{-1} \Theta^{(d)}$; $\Gamma_Q = K_{\Xi}^{-1} Q$; $\Gamma_{\Theta}^{(d)} = K_{\Xi}^{-1} \Theta^{(d)}$.

Соответственно для матрицы $P_{\zeta}^{(d)}$ линейного оператора $Z^{(d)} \{\cdot\}$ с учетом (15) имеем

$$P_{\zeta}^{(d)} = [\Psi_{\Theta}^{(d)} \Gamma_Q (Q^T \Psi_{\Theta}^{(d)} \Gamma_Q)^{-1} Z \{q(t)\}]^T, \quad (16)$$

где

$$Z\{q(t)\} = [Z\{q^T(t)\}]^T = [\zeta_r\{q(t)\}, r = \overline{1, M_\zeta}] = [\zeta_r\{q_j(t)\}, j = \overline{1, M_x}, r = \overline{1, M_\zeta}].$$

Для оценки структуры помехи (т. е. определения оптимального номера $\overline{d} \in \overline{1, D}$ структуры реализации помехи в уравнении наблюдения (1)) введем два дополнительных линейных оператора: $Z_X\{\cdot\}$ и $Z_H\{\cdot\}$.

Первый оператор $Z_X: x(t) \rightarrow X$ ставит в соответствие непрерывному процессу $x(t)$, заданному на отрезке $[t_0, T]$, его дискретный аналог $X = [x_n, n = \overline{0, N}]^T$.

В данном случае

$$Z_X\{q^T(t)\} = Q, \quad (17)$$

тогда непосредственно из (16) с учетом (17) получаем набор промежуточных оценок вектора X :

$$X^{(d, l)} = Z_X^{(d)}\{Y^{(l)}\} = P_X^{(d)} Y^{(l)}, \quad l \in \overline{1, D}, d = \overline{1, D}, \quad (18)$$

где $Z_X^{(d)}\{\cdot\} = P_X^{(d)}$; $P_X^{(d)}$ – матрица вида

$$P_X^{(d)} = [\Psi_\Theta^{(d)} \Gamma_Q (Q^T \Psi_\Theta^{(d)} \Gamma_Q)^{-1} Q^T]^T. \quad (19)$$

Очевидно, что при $d \neq l$ оценки $X^{(d, l)}$ являются смещенными, так как $M\{Y^{(l)}\} \neq X$ и, следовательно, $M\{X^{(d, l)}\} \neq X$. И только при $d = l$ указанные оценки являются несмещенными ($M\{X^{(l, l)}\} = X$), поскольку $P_X^{(d)} H^{(l)} = [0]_{(N+1) \times 1}$.

Второй оператор $Z_H^{(d)}: h^{(d)}(t) \rightarrow H^{(d)}$ ставит в соответствие процессу $h^{(d)}(t)$, заданному на отрезке $[t_0, T]$, его дискретный аналог $H^{(d)} = [h_n^{(d)}, n = \overline{0, N}]^T$.

По аналогии с (17)–(19) можно получить набор оценок помехи $H^{(l)}$, содержащейся в уравнении наблюдения (5):

$$H^{(d, l)} = Z_H^{(d)}\{Y^{(l)}\} = P_H^{(d)} Y^{(l)}, \quad l \in \overline{1, D}, d = \overline{1, D}, \quad (20)$$

где

$$P_H^{(d)} = [\Psi_Q \Gamma_\Theta^{(d)} ([\Theta^{(d)}]^T \Psi_Q \Gamma_\Theta^{(d)})^{-1} [\Theta^{(d)}]^T]^T. \quad (21)$$

В формулах (20) и (21) приняты обозначения: $\Psi_Q = E_{N+1} - \Gamma_Q (\Phi_Q)^{-1} Q^T$; $\Phi_Q = Q^T K_\Xi^{-1} Q$; $\Gamma_\Theta^{(d)} = K_\Xi^{-1} \Theta^{(d)}$; $\Gamma_Q = K_\Xi^{-1} Q$.

В этом случае выполняется условие

$$P_H^{(d)} X = [0]_{(N+1) \times 1}, \quad d = \overline{1, D},$$

т. е. оператор $Z_H^{(d)}\{\cdot\} = P_H^{(d)}$ инвариантен к сигналу X .

Очевидно, что при $d = l$ оценка $H^{(l, l)}$ помехи $H^{(l)}$ также является несмещенной, а при $d \neq l$ имеется смещение.

Для выбора оптимальной оценки $\overline{d}^* \in \overline{1, D}$ номера l (номера варианта помехи $H^{(l)}$ в уравнении наблюдения (5)) сформируем набор невязок

$$\Delta Y^{(l, d)} = Y^{(l)} - X^{(l, d)} - H^{(l, d)} = \Delta X^{(l, d)} + \Delta H^{(l, d)} + \Xi, \quad (22)$$

где $\Delta X^{(l, d)} = X - X^{(l, d)}$; $\Delta H^{(l, d)} = H^{(l)} - H^{(l, d)}$.

Оценка \overline{d}^* номера l структуры помехи, действующей на интервале $[t_0, T]$, находится на основе критерия вида

$$\overline{d}^* = \arg \min_{d \in \overline{1, D}} [\Delta Y^{(l, d)}]^T K_{\Xi}^{-1} \Delta Y^{(l, d)}. \quad (23)$$

Если \overline{d}^* совпадет с l , то минимальная дисперсия скалярной оценки $\zeta_r \{Y^{(l)}\}$ ($r \in \overline{1, M_{\zeta}}$) равна

$$[\sigma_{\zeta_r}^{(l)}]^2 = \zeta_r \{q^T(t)\} (\Gamma_Q^T [\Psi_{\Theta}^{(l)}]^T Q)^{-1} \Psi_{\Theta}^{(l)} (Q^T \Psi_{\Theta}^{(l)} \Gamma_Q)^{-1} \zeta_r \{q(t)\}, \quad (24)$$

где $\Psi_{\Theta}^{(l)} = \Gamma_Q^T [\Psi_{\Theta}^{(l)}]^T K_{\Xi} \Psi_{\Theta}^{(l)} \Gamma_Q$.

Соответственно для векторной оценки $Z\{Y^{(l)}\}$ минимальный след матрицы $K_{\zeta}^{(l)}$ находится с учетом (24) по правилу

$$\text{tr}(K_{\zeta}^{(l)}) = \sum_{r=1}^{M_{\zeta}} [\sigma_{\zeta_r}^{(l)}]^2. \quad (25)$$

Алгоритм вычислений. С учетом (21)–(25) алгоритм идентификации номера варианта построения помехи $h^{(l)}(t)$ и оценивания значения оператора $Z\{x(t)\}$ сводится к следующему.

1. По формуле (19) строится семейство дополнительных операторов $Z_X^{(d)} \{\cdot\}$ вида $\{P_X^{(d)}\}_{d=1}^D$.

2. По формуле (18) находится набор промежуточных оценок $\{X^{(d, l)}\}_{d=1}^D$.

3. По формуле (21) строится семейство дополнительных операторов $Z_H^{(d)} \{\cdot\}$ вида $\{P_H^{(d)}\}_{d=1}^D$.

4. По формуле (20) находится набор промежуточных оценок $\{H^{(d, l)}\}_{d=1}^D$.

5. По формуле (22) строится семейство невязок $\{\Delta Y^{(d, l)}\}_{d=1}^D$.

6. По формуле (23) выбирается оптимальный номер $\overline{d}^* \in \overline{1, D}$ варианта построения кусочно-непрерывной помехи в модели (1).

7. По формулам (15) и (16), принимая $d = \overline{d}^*$, строится искомым оптимальный оператор $Z^{(\overline{d}^*)} \{\cdot\} = P^{(\overline{d}^*)}$.

8. По формуле (6) для $d = d^*$ находится искомая оптимальная оценка линейного оператора $Z\{x(t)\}$.

9. По формулам (24) и (25) находятся минимальные дисперсии и след корреляционной матрицы ошибок оценивания.

Рассмотрим частный случай при $L=1, D=1, h^{(1)}(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$. Тогда с учетом (18) оценка $X^{(1,1)} = Q(Q^T K_{\Xi}^{-1} Q)^{-1} Q^T K_{\Xi}^{-1} Y^{(1)}$ совпадает с классической МНК-оценкой для случая, когда в измерениях помимо сигнала $x(t)$ присутствует только флуктуационный шум $\xi(t)$.

Сравнительная оценка вычислительной эффективности. Полагаем, что вычислительный комплекс, реализующий разработанный метод оценивания, состоит из $\tilde{D}_{(1)}$ однотипных ЭВМ (процессоров). При этом $\tilde{D}_{(1)} \geq 2D$ (D – количество возможных структур помехи), т. е. имеется $\tilde{D}_{(1)}$ каналов обработки данных.

В качестве показателя вычислительной эффективности метода удобно использовать время, затраченное на получение искомой оценки. Это время будет определяться как быстроедействие ЭВМ, так и общим числом операций, необходимых при реализации метода (19)–(25). Известно [9], что при сравнении различных способов организации вычислительного процесса достаточно хорошим приближением для времени вычислений может служить требуемое число операций умножения и сложения. Следует отметить, что операции умножения выполняются медленнее, чем операции сложения, примерно в 8–10 раз при использовании для их реализации аппаратных методов и в 100–150 раз медленнее при использовании программных методов [10].

Таким образом, в качестве показателя вычислительной эффективности примем число операций умножения и сложения, выполняемых в одном канале обработки данных. Определим общее число этих операций согласно основным правилам матричной алгебры на основе анализа формул (19)–(25):

$$O_{(1)}^{(\times)} = \bar{N}^3 + \bar{N}^2(2M_{h_x} + 3M_x + 1) + 2\bar{N}(M_{h_x}^2 + M_x^2) + M_{h_x}^3 + M_x^3, \quad (26)$$

$$O_{(1)}^{(+)} = \bar{N}^3 + \bar{N}^2(2M_{h_x} + 3M_x) + \bar{N}(2M_{h_x}^2 + 2M_x^2 - 2M_{h_x} - 3M_x - 1) - M_{h_x}^2 + M_{h_x}^3 - M_x^2 + M_x^3. \quad (27)$$

Здесь $\bar{N} = N + 1$, а подстрочный индекс (1) соответствует разработанному методу.

Проведем сравнительный анализ эффективности разработанного метода с расширенным МНК (РМНК), часто используемым при обработке измерений с систематическими погрешностями.

Алгоритм оценивания с применением РМНК (для которого вводится подстрочный индекс (2)) имеет следующий вид:

Шаг 1. Вычисление набора промежуточных оценок $\{X_{(2)}^{(d,l)}\}_{d=1}^D$ с использованием формулы

$$X_{(2)}^{(d,l)} = Q_{(2)}^{(d)} ((Q_{(2)}^{(d)})^T K_{\Xi}^{-1} Q_{(2)}^{(d)})^{-1} (Q_{(2)}^{(d)})^T K_{\Xi}^{-1} Y^{(l)}, \quad l \in \overline{1, D}, \quad (28)$$

где

$$Q_{(2)}^{(d)} = \begin{bmatrix} [Q^{(1)}]_{N_1 \times M_x} & \vdots & [\Theta^{(1)}]_{N_1 \times M_{h_1}} & \vdots & [0]_{N_1 \times M_{h_2}} & \vdots & \cdots & \vdots & [0]_{N_1 \times M_{h_L}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [Q^{(2)}]_{N_2 \times M_x} & \vdots & [0]_{N_2 \times M_{h_1}} & \vdots & [\Theta^{(2)}]_{N_2 \times M_{h_2}} & \vdots & \cdots & \vdots & [0]_{N_2 \times M_{h_L}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [Q^{(L)}]_{N_L \times M_x} & \vdots & [0]_{N_L \times M_{h_1}} & \vdots & [0]_{N_L \times M_{h_2}} & \vdots & \cdots & \vdots & [\Theta^{(L)}]_{N_L \times M_{h_L}} \end{bmatrix}_{\overline{N} \times \overline{M}};$$

$$d = \overline{1, D}; \quad Q^{(i)} = [q_k(t_{ij}), j = \overline{0, N_{i-1}}, k = \overline{1, M_x}];$$

$$t_{ij} \in \{t_n\}_{n=0}^N; \quad t_{i-1}^* \leq t_{ij} \leq t_i^*; \quad \overline{M} = M_x + M_{h_\Sigma}.$$

Шаг 2. Вычисление набора невязок $\{\Delta Y_{(2)}^{(d,l)}\}_{d=1}^D$ по формуле

$$\Delta Y_{(2)}^{(d,l)} = Y^{(l)} - X_{(2)}^{(d,l)}.$$

Шаг 3. Вычисление множества показателей невязки $\{\Delta J_{(2)}^{(d,l)}\}_{d=1}^D$ по формуле

$$\Delta J_{(2)}^{(d,l)} = (\Delta J_{(2)}^{(d,l)})^T K_{\Xi}^{-1} \Delta J_{(2)}^{(d,l)}.$$

Шаг 4. Определение оценки $\hat{d}_{(2)}^*$ номера l структуры помехи, действующей в канале измерения:

$$\hat{d}_{(2)}^* = \arg \min_{d \in \overline{1, D}} \Delta J_{(2)}^{(d,l)}.$$

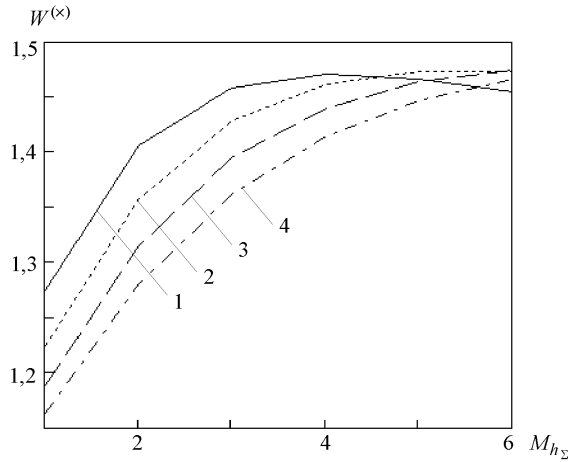
Шаг 5. Вычисление искомой оценки $X_{(2)}^{(\hat{d}_{(2)})}$ вектора X , полагая $d = \hat{d}_{(2)}$.

Для параллельной реализации данного алгоритма потребуется $\tilde{D}_{(2)}$ каналов обработки. Принимая $\overline{M} = M_{h_\Sigma} + M_x$, на основе анализа (28) найдем общее число вычислительных операций умножения и сложения в одном канале при определении $X_{(2)}^{(\hat{d}_{(2)})}$:

$$O_{(2)}^{(\times)} = \overline{N}^3 + \overline{N}^2(3\overline{M} + 1) + 2\overline{N}\overline{M}^2 + \overline{M}^3, \quad (29)$$

$$O_{(2)}^{(+)} = \overline{N}^3 + 3\overline{N}^2\overline{M} + \overline{N}(2\overline{M}^2 - 3\overline{M} - 1) - \overline{M}^2 + \overline{M}^3. \quad (30)$$

Из соотношений (26), (27), (29), (30) видно, что объем вычислений пропорционален кубу размерности задачи ($\overline{N}^3, M_x^3, M_{h_\Sigma}^3, \overline{M}^3 = (M_{h_\Sigma} + M_x)^3$). Из этого следует, что для практики и теории оценивания вообще, и РМНК в



Зависимости показателя вычислительной эффективности от размерности задачи: $M_x = 3$ (кривая 1), 4 (2), 5 (3), 6 (4)

частности, актуальна проблема разработки методов и алгоритмов, приводящих к уменьшению размерности задачи.

Для сравнения вычислительной эффективности разработанного метода и РМНК введем показатель относительного выигрыша

$$W^{(x)} = O_{(2)}^{(x)} / O_{(1)}^{(x)}. \quad (31)$$

График зависимости $W^{(x)}$ от размерности задачи (M_x, M_{h_2}) представлен на рисунке. Из рисунка следует, что разработанный метод обеспечивает сокращение вычислительных затрат до 1,47 раза по отношению к РМНК.

П р и м е р. Пусть полезный сигнал (2) имеет вид

$$x(t) = a_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, T], \quad t_0 = 1, \quad T = 4 \quad (32)$$

(в формуле (2) $M_x = 1, A = [a_1], q_1(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [t_0, T]$).

Полагаем, что $\underline{G} = 2$ и при построении всех допустимых вариантов помехи $h^{(d)}(t)$ (где $d = \overline{1, D}, D = 4$) возможны следующие базисы:

$$\Theta^{(1)} = [t], \quad \Theta^{(2)} = [t^2].$$

Допуская на основе априорной информации об условиях измерения, что $L = 2$ (т. е. помеха имеет два интервала непрерывности), получаем четыре возможных варианта построения помехи:

$$1) (d=1): \Theta^{(1_1)} = [t], \Theta^{(1_2)} = [t]; \quad 2) (d=2): \Theta^{(2_1)} = [t], \Theta^{(2_2)} = [t^2];$$

$$3) (d=3): \Theta^{(3_1)} = [t^2], \Theta^{(3_2)} = [t]; \quad 4) (d=4): \Theta^{(4_1)} = [t^2], \Theta^{(4_2)} = [t^2].$$

Таким образом, $M_{h_1} = M_{h_2} = 1; B^{(d_i)} = [b_1^{(d_i)}]; \Theta^{(d_i)}(t) = [\theta_1^{(d_i)}]; \theta_1^{(d_i)}(t) \in \{t, t^2\}; d = \overline{1, 4}; i = \overline{1, 2}; d_i = \{1, 2\}$.

Пусть реально наблюдается процесс (1), соответствующий первому варианту построения помехи ($l=1$):

$$y_n^{(1)} = a_1 + h_n^{(1)} + \xi_n, \quad n = \overline{0, N}, \quad N=3,$$

причем

$$h_n^{(1)} = \begin{cases} b_1^{(1)} t_n, & n \in \{0, 1\}, \\ b_1^{(2)} t_n, & n \in \{2, 3\}. \end{cases} \quad (33)$$

Шум ξ_n предполагался стационарным нормальным процессом $N(0, \sigma^2)$ с нулевым математическим ожиданием, некоррелированными отсчетами и дисперсией σ^2 . Для простоты все величины считаем безразмерными.

Пусть требуется найти оператор $Z: W_x \rightarrow R^{M_\zeta}$ такой, что

$$Z\{x(t)\} = [\zeta_r, r = \overline{1, M_\zeta}]^T = A.$$

В данном примере $M_\zeta = 1$, $A = [a_1]$, поэтому $Z\{x(t)\} = [\zeta_1] = a_1$, $Z\{q_1(t)\} = 1$.

С учетом введенных ранее обозначений, а также моделей сигнала и помехи (32), (33) имеем

$$Y^{(1)} = \begin{bmatrix} y_0^{(1)} \\ y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad H^{(1)} = \begin{bmatrix} h_0^{(1)} \\ h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \\ h_3^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_1^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Матрицы типа (4) принимают вид

$$\Theta^{(1)} = \begin{bmatrix} t_0 & 0 \\ t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \\ 0 & t_3 \end{bmatrix}, \quad \Theta^{(2)} = \begin{bmatrix} t_0 & 0 \\ t_1 & 0 \\ 0 & t_2^2 \\ 0 & t_3^2 \end{bmatrix}, \quad \Theta^{(3)} = \begin{bmatrix} t_0^2 & 0 \\ t_1^2 & 0 \\ 0 & t_2 \\ 0 & t_3 \end{bmatrix}, \quad \Theta^{(4)} = \begin{bmatrix} t_0^2 & 0 \\ t_1^2 & 0 \\ 0 & t_2^2 \\ 0 & t_3^2 \end{bmatrix},$$

при этом $M_{h_\Sigma} = \sum_{i=1}^2 M_{h_i} = 2$; $t_0^* = t_{10} = t_0$; $t_{11} = t_1$; $t_1^* = t_2$; $t_{20} = t_1^* = t_2$; $t_{21} = t_2^* = t_3 = T$; $N_1 = 2$; $N_2 = 2$; $\sum_{i=1}^2 N_i = N + 1 = 4$.

В данном случае матрицы $P_\zeta^{(d)}$ (16) линейных операторов $Z^{(d)}\{\cdot\}$ имеют вид

$$P_\zeta^{(d)} = [\Psi_\Theta^{(d)} \Gamma_Q (Q^T \Psi_\Theta^{(d)} \Gamma_Q)^{-1}]^T, \quad d = \overline{1, 4},$$

а соответствующие им оценки определяются как

$$\hat{a}^{(d)} = P_\zeta^{(d)} Y^{(1)}, \quad d = \overline{1, 4}, \quad (34)$$

где d – номер возможного варианта структуры помехи.

Для нахождения оптимальной оценки \hat{d}^* номера варианта структуры помехи, действующей в канале измерения, выполняется следующий алгоритм.

1. По формуле (18) определяется набор промежуточных оценок сигнала $\{X^{(d,1)}\}_{d=1}^D, D=4$:

$$X^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 10,039 \\ 10,039 \\ 10,039 \\ 10,039 \end{bmatrix}, \quad X^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 13,008 \\ 13,008 \\ 13,008 \\ 13,008 \end{bmatrix}, \quad X^{(3,1)} = \begin{bmatrix} 8,773 \\ 8,773 \\ 8,773 \\ 8,773 \end{bmatrix}, \quad X^{(4,1)} = \begin{bmatrix} 10,490 \\ 10,490 \\ 10,490 \\ 10,490 \end{bmatrix}.$$

2. По формуле (20) находится набор промежуточных оценок помехи $\{H^{(d,1)}\}_{d=1}^D, D=4$:

$$H^{(1,1)} = \begin{bmatrix} -2,004 \\ -4,007 \\ 12,085 \\ 16,133 \end{bmatrix}, \quad H^{(2,1)} = \begin{bmatrix} -3,785 \\ -7,569 \\ 7,800 \\ 13,867 \end{bmatrix}, \quad H^{(3,1)} = \begin{bmatrix} -0,685 \\ -2,742 \\ 13,149 \\ 17,532 \end{bmatrix}, \quad H^{(4,1)} = \begin{bmatrix} -1,191 \\ -4,762 \\ 9,481 \\ 16,856 \end{bmatrix}.$$

3. С использованием (22) вычисляется показатель невязки вида

$$\Delta J^{(d,1)} = [\Delta Y^{(d,1)}]^T K_{\Xi}^{-1} \Delta Y^{(d,1)}, \quad d = \overline{1,4},$$

при этом $\Delta J^{(1,1)} = 0,017, \Delta J^{(2,1)} = 4,528, \Delta J^{(3,1)} = 0,149, \Delta J^{(4,1)} = 8,480$.

4. На основе критерия (23) определяется оценка \hat{d}^* номера структуры помехи, действующей в канале измерения:

$$\hat{d}^* = \arg \min_{d \in \overline{1,4}} \Delta J^{(d,1)} = 1.$$

Таким образом, принимая в (34) номер структуры равным $d = \hat{d}^* = 1$, находим оценку $\hat{a}_1 = 10,039$ искомого коэффициента a_1 с относительной погрешностью $\delta \hat{a}_1 = 0,4 \%$.

Для сравнения вычислим оценку $\hat{a}_{1(\text{МНК})}$ на основе классического МНК:

$$\hat{a}_{1(\text{МНК})} = (Q^T K_{\Xi}^{-1} Q)^{-1} Q^T K_{\Xi}^{-1} Y^{(1)} = 15,586.$$

Здесь относительная погрешность $\delta \hat{a}_{1(\text{МНК})} = 56 \%$. Показатель вычислительной эффективности $W^{(*)}$ (31) при этом равен 1,35.

Рассмотренный пример подтверждает эффективность разработанного метода оценивания в условиях динамических помех наблюдения.

Заключение. Основное достоинство развиваемого в данной работе подхода состоит в том, что в отличие от классического МНК он не требует расширения пространства состояний, поскольку обладает свойством внутренней инвариантности к кусочно-непрерывным помехам заданного класса.

Кроме того, позволяет существенно расширить класс решаемых задач оценивания: помимо традиционной задачи сглаживания появляется возможность решать задачи оценивания значений линейных функционалов и операторов, например оценивание значений производных различных порядков в точках отрезка наблюдения, вычисление определенных интегралов и т. д.

Перебор всех вариантов построения кусочно-непрерывной помехи и выбор оптимального из них позволит на практике повысить устойчивость и точность результатов оценивания при проведении измерений на базе совокупности как однородных, так и разнородных датчиков с различными режимами переключения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Глобальная** спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС /Под ред. В. Н. Харисова, А. И. Петрова, В. А. Болдина. М.: ИПРЖР, 1999.
2. **Булычев Ю. Г., Елисеев А. В.** Проблемы жесткости уравнений приближенной нелинейной фильтрации // *АиТ*. 1999. № 1. С. 35.
3. **Жданюк Б. Ф.** Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
4. **Леонов В. А., Поплавский Б. К.** Метод линейных преобразований идентификации динамических систем // *Техническая кибернетика*. 1990. № 2. С. 63.
5. **Булычев Ю. Г., Бурлай И. В.** Автокомпенсационный метод обработки результатов измерений при наличии погрешностей регулярной структуры // *Автометрия*. 2003. **39**, № 1. С. 62.
6. **Булычев Ю. Г., Бурлай И. В.** Оптимальное оценивание параметров нормальной регрессии для случая расширенной модели наблюдений // *Проблемы передачи информации*. 1993. **29**, вып. 3. С. 31.
7. **Булычев Ю. Г., Манин А. П.** Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
8. **Лысенко Л. Н., Нгуен Танг Кыонг.** Теоретические и прикладные аспекты мультиструктурных схем рекуррентной обработки информации в навигационных системах летательных аппаратов // *Изв. АН. Сер. Теория и системы управления*. 1997. № 6. С. 38.
9. **Казаков И. В.** Стохастические системы со случайной сменой структуры // *Техническая кибернетика*. 1989. № 1. С. 58.
10. **Гришин Ю. П., Казаринов Ю. М.** Динамические системы, устойчивые к отказам. М.: Радио и связь, 1985.

Поступила в редакцию 3 июля 2006 г.