РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2007, том 43, № 5

УДК 519.216.3

# ПРЕДЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ

**С. Н. Моисеев**

*Воронежский государственный университет, г. Воронеж*
*E-mail: smoiseev@ kodofon.vrn.ru*

Показано, что для процесса авторегрессии порядка $p$ при использовании оптимального по минимуму среднеквадратической ошибки прогноза и при известных авторегрессионных коэффициентах время предсказуемости может превышать время корреляции в $p$ раз для самого лучшего сочетания авторегрессионных коэффициентов.

**Введение.** Модель линейного процесса авторегрессии $p$-го порядка ($\text{АР}(p)$) широко используется для описания реальных случайных процессов в самых различных областях исследований, в том числе при обработке сигналов и анализе временных рядов различной физической природы. Это объясняется возможностью описания процессом $\text{АР}(p)$ практически любого линейного случайного процесса с заданной точностью, развитой техникой подгонки процессов $\text{АР}(p)$ к наблюдаемым данным, простотой моделирования и легкостью прогнозирования с их помощью [1]. В работах [2, 3] показано на многочисленных примерах, что время предсказуемости $\tau_{\text{pred}}$ самых различных линейных временных рядов при использовании авторегрессионного прогноза не может превосходить время корреляции $\tau_{\text{cor}}$ более, чем в 1,1–1,4 раза. Однако в [4, 5] для линейных процессов скользящего среднего и авторегрессии–скользящего среднего было показано, что время предсказуемости может значительно превышать время корреляции для больших порядков моделей. В связи с широкой распространенностью в различных приложениях модели процесса $\text{АР}(p)$ представляет практический и теоретический интерес подробное исследование соотношения между его временем предсказуемости и временем корреляции.

В предлагаемой работе ставится цель показать, что для линейных процессов авторегрессии время предсказуемости может значительно превышать время корреляции, причем это превышение тем значительнее, чем больше порядок $p$ процесса $\text{АР}(p)$.

**Постановка задачи.** Пусть наблюдаемый случайный стационарный процесс $y_t$, $t \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, является процессом $\text{АР}(p)$:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \xi_t, \qquad (1)$$

где $\xi_t$ – произвольный белый шум с независимыми в моменты времени $t$ и $t-k,\ k\neq 0$, значениями, имеющий нулевое среднее и дисперсию $\sigma_\xi^2$. Необходимым условием стационарности процесса АР$(p)$ является следующее ограничение на авторегрессионные коэффициенты $\varphi_i,\ i=\overline{1,p}$, [1]: корни уравнения $1-\varphi_1 x-\ldots-\varphi_p x^p=0$ должны лежать вне единичного круга на комплексной плоскости.

Необходимо для каждого фиксированного порядка авторегрессии $p$ подобрать такие авторегрессионные коэффициенты $\varphi_i,\ i=\overline{1,p}$, чтобы для данного конкретного процесса наблюдалось максимальное отношение $\tau_{\text{pred}}/\tau_{\text{cor}}$, т. е. максимальное относительное время предсказуемости. Для этого введем функцию

$$g(p)=\max_{\varphi_i,\ i=\overline{1,p}}\{\tau_{\text{pred}}/\tau_{\text{cor}}\}. \qquad (2)$$

Функция $g(p)$ характеризует потенциальные возможности прогноза процесса АР$(p)$ для самого лучшего сочетания авторегрессионных коэффициентов с точки зрения отношения $\tau_{\text{pred}}/\tau_{\text{cor}}$. Задача заключается в исследовании поведения функции $g(p)$ с ростом $p$.

**Парные и множественные коэффициенты корреляции.** Вначале для определения $\tau_{\text{cor}}$ необходимо найти нормированную автокорреляционную функцию $r_k$ процесса АР$(p)$ (коэффициенты парных корреляций). Первые $p-1$ коэффициентов корреляции определяются из системы уравнений Юла – Уокера [1]

$$r_0=1;\qquad r_i=\sum_{j=1}^{p}\varphi_j r_{i-j},\quad i=\overline{1,p-1},$$

а остальные из рекуррентного соотношения

$$r_k=\sum_{j=1}^{p}\varphi_j r_{k-j},\quad k>0,$$

где $r_k=\mathbf{M}(y_t y_{t+k})\big/[\mathbf{M}(y_t^2)\mathbf{M}(y_{t+k}^2)]^{1/2}$; $\mathbf{M}(\cdot)$ – оператор усреднения.

Далее для определения $\tau_{\text{pred}}$ необходимо вычислить коэффициент множественной корреляции $\rho_k$, который еще называют сводным коэффициентом корреляции. Коэффициент множественной корреляции между отсчетом $y_{t+k}$ и $p$ отсчетами $y_t, y_{t-1},\ldots,y_{t-p+1}$ находится как коэффициент корреляции между отсчетом $y_{t+k}$ и линейной комбинацией $p$ отсчетов $y^*_{t+k}=$ $=\sum_{i=0}^{p-1}a_i y_{t-i}$, максимизированный по весам $a_i,\ i=\overline{0,p-1}$:

$$\rho_k=\max_{a_i,\ i=\overline{0,p-1}}\{\mathbf{M}(y_{t+k}y^*_{t+k})\big/[\mathbf{M}(y^2_{t+k})\mathbf{M}(y^{*2}_{t+k})]^{1/2}\}. \qquad (3)$$

Величина $p$ в (3) для процессов АР$(p)$ совпадает с их порядком авторегрессии, так как процессы АР$(p)$ являются марковскими $p$-го порядка. Марковское свойство этого процесса заключается в том, что для любых $t$ и $k$ справедливо равенство

$$W(y_{t+k} \mid y_t, \ldots, y_{t-n+1}) = W(y_{t+k} \mid y_t, \ldots, y_{t-p+1}), \quad n \geq p,$$

где $W(y_{t+k} \mid y_t, \ldots, y_{t-n+1})$ – плотность вероятностей случайной величины $y_{t+k}$ при фиксированных значениях $y_t, \ldots, y_{t-n+1}$. Из этого свойства следует, что рост числа переменных $y_t, \ldots, y_{t-p+1}$ в (3) до величины, большей $p$, не приведет к изменению функции $\rho_k$. Сокращение числа переменных $y_t, \ldots, y_{t-p+1}$ в (3) до величины, меньшей $p$, будет приводить в общем случае к уменьшению величины $\rho_k$. Иными словами, всегда справедливо неравенство $\rho_k \geq |r_k|$, так как $\rho_k = |r_k|$ при $p = 1$.

Коэффициент множественной корреляции $\rho_k$ выражается через коэффициенты парной корреляции $r_k$ [6, 7]:

$$\rho_k = \sqrt{1 - \det \mathbf{R}_k / \det \mathbf{R}}, \tag{4}$$

где $\det \mathbf{R}$ – детерминант матрицы $\mathbf{R}$, $\mathbf{R} = (r_{|i-j|})$, $i, j = \overline{1, p}$, – нормированная корреляционная матрица $p \times p$ отсчетов $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-p+1}$; $\mathbf{R}_k$ – нормированная корреляционная матрица $(p+1) \times (p+1)$ отсчетов $y_{t+k}, y_t, y_{t-1}, \ldots$ $\ldots, y_{t-p+1}$, которая получается из матрицы $\mathbf{R}$ добавлением сверху строки $(r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+p-1})$ и слева столбца $(1, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+p-1})^T$ ($T$ – символ транспонирования). Из формулы (4) следует, что $\rho_k$ полностью определяется первыми $p-1$ корреляциями $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ и $p$ корреляциями $r_k, r_{k+1}, \ldots$ $\ldots, r_{k+p-1}$, а также $\rho_k = 0$, если $r_m = 0$ для всех $k \leq m \leq k + p - 1$.

Кроме того, для процессов АР($p$) коэффициент множественной корреляции просто и наглядно выражается через корреляцию отсчета с его оптимальным прогнозом, или через дисперсию прогноза, или через дисперсию ошибки прогноза. Оптимальный по минимуму среднего квадрата ошибки (СКО) прогноз отсчета $y_{t+k}$, даваемый с момента времени $t$ на момент времени $t + k$, при известных отсчетах $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$ для процессов АР($p$) является линейным и выглядит следующим образом:

$$\hat{y}_{t+k} = \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(k) y_{t-i},$$

где функции $\psi_i(k)$ есть решения линейных рекуррентных уравнений $\psi_i(k) = \sum_{m=1}^{p} \varphi_m \psi_i(k-m)$ при начальных условиях $\psi_i(-i) = 1$ и $\psi_i(-m) = 0, m = \overline{0, p-1}$, но $m \neq i$. Веса $\psi_i(k)$ предсказывающих переменных $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-p+1}$ можно также выразить через коэффициенты корреляции [7]

$$\psi_i(k) = (-1)^i \det \mathbf{R}_{1\,i+2} \big/ \det \mathbf{R}, \quad i = \overline{0, p-1},$$

где $\mathbf{R}_{1\,i+2}$ – матрица $p \times p$, которая получается из матрицы $\mathbf{R}_k$, если из нее вычеркнуть первую строку и $i+2$-й столбец.

Кроме этого прогноза, явно выраженного через $p$ известных прошлых значений процесса $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-p+1}$, для него можно также использовать простое рекуррентное соотношение

$$\hat{y}_{t+k} = \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_i \hat{y}_{t+k-i} + \sum_{i=\nu+1}^{p} \varphi_i y_{t+k-i}, \quad \nu = \min(k-1, p).$$

В работах [8, 9] показано, что оптимальный линейный прогноз, полученный из условия минимума СКО, среди всех других линейных прогнозов максимально коррелирует с прогнозируемым отсчетом. Отсюда следует, что для такого оптимального прогноза коэффициент множественной корреляции можно рассчитать как коэффициент корреляции между отсчетом ряда $y_{t+k}$ и оптимальным прогнозом $\hat{y}_{t+k}$:

$$\rho_k = \mathbf{M}(y_{t+k}\hat{y}_{t+k}) \Big/ [\mathbf{M}(y_{t+k}^2)\mathbf{M}(\hat{y}_{t+k}^2)]^{1/2}. \tag{5}$$

Наконец, в силу того что коэффициент множественной корреляции является частным случаем множественного корреляционного отношения [8, 10], для него справедливы следующие формулы:

$$\rho_k = \sigma_{\text{pred}}(k) \big/ \sigma_y = \sqrt{1 - \sigma_{\text{error}}^2(k) \big/ \sigma_y^2}, \tag{6}$$

где

$$\sigma_y^2 = \mathbf{M}(y_{t+k}^2) = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_0^2(i) = \sigma_\xi^2 \Bigg/ \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i r_i\right)$$

– дисперсия процесса $y_t$; $\sigma_{\text{pred}}^2(k) = \mathbf{M}(\hat{y}_{t+k}^2)$ – дисперсия оптимального по минимуму СКО прогноза на $k$ шагов вперед;

$$\sigma_{\text{error}}^2(k) = \mathbf{M}[(y_{t+k} - \hat{y}_{t+k})^2] = \sigma_y^2 \det \mathbf{R}_k \big/ \det \mathbf{R} = \sigma_\xi^2 \sum_{i=1}^{k} \psi_0^2(k-1)$$

– дисперсия ошибки оптимального прогноза на $k$ шагов вперед. Из формулы (6) хорошо видно, что коэффициент множественной корреляции $\rho_k$ является наглядной и понятной мерой точности линейного прогноза на $k$ шагов вперед, так как его квадрат совпадает с относительной разностью дисперсий процесса и ошибки прогноза.

**Время корреляции и время предсказуемости.** После того как найдены удобные в вычислительном плане формулы для $r_k$ и $\rho_k$, необходимо определить $\tau_{\text{cor}}$ и $\tau_{\text{pred}}$. Время корреляции и время предсказуемости находятся как характерные времена спадания до нуля нормированной корреляционной функции и коэффициента множественной корреляции соответственно. Поскольку эти понятия качественные, то решение многих задач будет сильно зависеть от их количественного определения. В работах [9, 11, 12] приведено более десятка формул нахождения $\tau_{\text{cor}}$, собранных из разных источников. Некоторые из них не являются универсальными, так как они имеют смысл только для монотонно спадающих с ростом задержки или слабо осциллирующих нормированных корреляционных функций $R(\tau)$ и не годятся для осциллирующих в общем случае. Все остальные формулы с помощью введения параметров можно свести всего к трем видам:

$$\tau_{\text{cor}}^{(1)} = \int_0^\infty \left| R(\tau) \right|^\alpha d\tau, \ \ 0 < \alpha < \infty, \tag{7}$$

$$\tau_{\text{cor}}^{(2)} = \max \{\tau : \left| R(\tau) \right| \geq \varepsilon\}, \ \ 0 < \varepsilon < 1, \tag{8}$$

$$\tau_{\text{cor}}^{(3)} = \int_0^\infty \left| \tau R(\tau) \right|^\alpha d\tau \Bigg/ \int_0^\infty \left| R(\tau) \right|^\alpha d\tau, \ \ 0 < \alpha < \infty. \tag{9}$$

Идея, приведшая к (9), заключается в отождествлении $\tau_{\text{cor}}$ с неким «корреляционным моментом порядка $\alpha$». Однако тестирование выражения (9) по различным моделям корреляционных функций показало, что им пользоваться на практике нецелесообразно по трем причинам. Во-первых, для корреляционных функций с тяжелыми хвостами (например, для $R(\tau) = (1 + \tau^2)^{-1}$), имеющих конечное время корреляции, определение (9) при $\alpha = 1$ приводит к неадекватному результату $\tau_{\text{cor}}^{(3)} = \infty$. Во-вторых, для двух корреляционных функций $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ таких, что для всех $\tau$ справедливо $\left| R_1(\tau) \right| \geq \left| R_2(\tau) \right|$, интервал корреляции $\tau_{\text{cor}}^{(3)}$, рассчитанный по $R_2(\tau)$, может оказаться значительно (во много раз и даже порядков) больше, чем рассчитанный по $R_1(\tau)$. В-третьих, для $\delta$-образных корреляционных функций выражение (9) может давать неудовлетворительные результаты. К примеру, если в дискретном времени рассмотреть корреляционную функцию, которая при всех задержках равна нулю, кроме единственной задержки $\tau = n$, где она принимает значение $R(n) = 1/n$, то выражение (9), переписанное для дискретного времени, дает значение $\tau_{\text{cor}}^{(3)} = n^\alpha$. С ростом $n$ это приводит к увеличению $\tau_{\text{cor}}^{(3)}$, хотя для больших $n$ очевидно $\tau_{\text{cor}} \sim 0$. Таким образом, на практике целесообразно пользоваться определениями времени корреляции (7) и (8).

Отметим, что для осциллирующих корреляционных функций наиболее часто используется выражение (7) при $\alpha = 1$. Геометрически заданное $\tau_{\text{cor}}$ равно основанию прямоугольника с высотой единица, имеющего такую же площадь, как и площадь под кривой $\left| R(\tau) \right|$.

Для процессов, заданных в дискретные моменты времени $t \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, к которым относятся изучаемые нами процессы АР($p$), определения $\tau_{\text{cor}}$ и $\tau_{\text{pred}}$, аналогичные (7) и (8), будут иметь следующий вид:

$$\tau_{\text{cor}}^{(1)} = \sum_{k=1}^\infty \left| r_k \right|^\alpha; \qquad \tau_{\text{pred}}^{(1)} = \sum_{k=1}^\infty \rho_k^\alpha, \ \ 0 < \alpha < \infty, \tag{10}$$

$$\tau_{\text{cor}}^{(2)} = \max \{k : \left| r_k \right| \geq \varepsilon\}; \qquad \tau_{\text{pred}}^{(2)} = \max \{k : \rho_k \geq \varepsilon\}, \ \ 0 < \varepsilon < 1. \tag{11a}$$

Однако формулы (11а) могут приводить к вырожденным случаям, когда $\tau_{\text{cor}}^{(2)} = 0$, а $\tau_{\text{pred}}^{(2)} \neq 0$. Для этих вырожденных случаев будем использовать несколько видоизмененный вариант вычислений:

$$\tau_{\text{cor}}^{(2)} = \max\{\tau : |r(\tau)| \geq \varepsilon\}; \qquad \tau_{\text{pred}}^{(2)} = \max\{\tau : \rho(\tau) \geq \varepsilon\}, \;\; 0 < \varepsilon < 1, \quad (11б)$$

где функции $r(\tau)$ и $\rho(\tau)$ в непрерывном времени получаются соответственно из функций $r_k$ и $\rho_k$ в дискретном времени их линейной интерполяцией между соседними значениями. Для определений $\tau_{\text{cor}}$ и $\tau_{\text{pred}}$ (11) функция $g(p)$ сильно зависит от уровня $\varepsilon$: чем меньше $\varepsilon$, тем меньше $g(p)$. Поэтому уровень $\varepsilon$ необходимо зафиксировать. Можно предложить два подхода к нахождению $\varepsilon$.

Первый подход, наиболее распространенный в приложениях, заключается в выборе такого максимального $\varepsilon$, при котором еще можно пренебречь значениями $|R(\tau)| < \varepsilon$, т. е. положить их равными нулю. Во многих практических задачах можно пренебречь значениями нормированной корреляционной функции, если они по модулю меньше уровня $\sim 0{,}3$. Поэтому положим $\varepsilon_1 = \exp(-1) \approx 0{,}368$. Выбор такого «некруглого» значения $\varepsilon = \varepsilon_1$ объясняется тем, что на практике часто встречаются корреляционные функции вида $R(\tau) = \exp(-\tau/\beta)$ и $R(\tau) = \exp(-\tau^2/\beta^2)$, а для таких корреляционных функций $\tau_{\text{cor}}^{(2)} = \beta$ при $\varepsilon = \varepsilon_1$, что создает дополнительные аналитические удобства.

Второй подход, использованный в работах [2, 3, 13], исходит из противоположной идеи и заключается в выборе такого минимального $\varepsilon$, при котором еще можно считать связь между значениями случайного процесса детерминированной, т. е. значения $|R(\tau)| \geq \varepsilon$ можно положить равными единице. Поэтому будем считать, как и в [2, 3, 13], $\varepsilon_2 = 0{,}75$. Очевидно, что $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$.

**Максимальное относительное время предсказуемости.** Для определений (10) функция $g(p)$ (2) находится аналитически. Анализ формул (10) и выражений для $r_k$ и $\rho_k$ показывает, что максимальное значение отношения $\tau_{\text{pred}}^{(1)} / \tau_{\text{cor}}^{(1)}$ достигается при следующих сочетаниях авторегрессионных коэффициентов:

$$\varphi_i = 0, \;\; i = \overline{1, p-1}; \qquad \varphi_p \neq 0, \;\; |\varphi_p| < 1. \qquad (12)$$

Для такого сочетания авторегрессионных коэффициентов имеем

$$r_k = \begin{cases} \varphi_p^m, & k = mp, \\ 0, & k \neq mp; \end{cases} \qquad \rho_k = |\varphi_p|^m, \;\; (m-1)p < k \leq mp, \;\; m = 0,1,2,\ldots \qquad (13)$$

Из формул (10) и (13) получаем

$$\tau_{\text{cor}}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_p|^{\alpha k} = |\varphi_p|^{\alpha} / (1 - |\varphi_p|^{\alpha}), \qquad \tau_{\text{pred}}^{(1)} = p\tau_{\text{cor}}^{(1)}.$$

Поэтому $g(p) = p$.

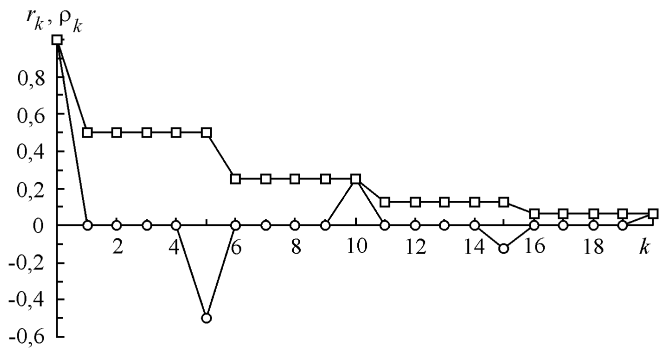


*Рис. 1.* Корреляционная функция и коэффициент множественной корреляции процесса АР(5)

Таким образом, максимальное отношение $\tau^{(1)}_{\text{pred}} / \tau^{(1)}_{\text{cor}}$ для процессов АР($p$) равно порядку авторегрессии $p$, т. е. согласно терминологии работы [13] горизонтом предсказуемости для процессов АР($p$) является величина $p\tau_{\text{cor}}$.

Этот вывод для процесса АР(5) при $\varphi_i = 0, i = \overline{1,4}, \varphi_5 = -0{,}5$ иллюстрирует рис. 1. На рисунке кружками, соединенными для наглядности прямыми линиями, показаны значения нормированной корреляционной функции $r_k$ в зависимости от задержки $k$. Квадратиками, соединенными прямыми линиями, обозначены коэффициенты множественной корреляции $\rho_k$. Для рис. 1 при любом $\alpha$ в (10) $\tau^{(1)}_{\text{cor}} = 1$, $\tau^{(1)}_{\text{pred}} = 5$, $g(5) = 5$.

Фактически выбор такого крайнего сочетания авторегрессионных коэффициентов (12) приводит к перерождению модели АР($p$) в модель АР(1), так как процесс АР($p$) последовательности (1) процесса $y_t$, набранной через единичный шаг, становится эквивалентным процессу АР(1) последовательности, набранной через шаг $p$:

$$y_t = \varphi_p y_{t-p} + \xi_t.$$

Однако это нисколько не умаляет полученного результата, так как речь идет о потенциальных возможностях прогноза процесса АР($p$). Поэтому всегда можно подобрать такой процесс АР($p$), который бы не сводился к процессу АР(1) (т. е. все $p$ авторегрессионных коэффициентов были бы отличны от нуля), и тем не менее отношение $\tau^{(1)}_{\text{pred}} / \tau^{(1)}_{\text{cor}}$ было бы как угодно близким к предельному значению $p$.

Для определений $\tau_{\text{cor}}$ и $\tau_{\text{pred}}$ (11) аналитически рассчитать функцию $g(p)$ в общем случае не удается.

Для процесса АР(1) всегда справедливы равенства

$$\rho_k = |r_k| = |r_1|^k = |\varphi_1|^k.$$

Поэтому $g(1) = 1$ при любом допустимом $\varepsilon$ в (11).

Для процесса АР(2) справедливы соотношения

$$\rho_k = \sqrt{1 - (1 - r_1^2 - r_k^2 - r_{k+1}^2 + 2 r_1 r_k r_{k+1}) / (1 - r_1^2)},$$

| $p$ | $\varepsilon$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ | $\varphi_4$ | $\tau^{(2)}_{\text{cor}}$ | $\tau^{(2)}_{\text{pred}}$ | $g(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0 < \varepsilon < 1$ | $\lvert\varphi_1\rvert < 1$ | – | – | – | $\tau^{(2)}_{\text{cor}} \geq 0$ | $\tau^{(2)}_{\text{pred}} = \tau^{(2)}_{\text{cor}}$ | 1,0 |
| 2 | 0,368 | –0,53 | –0,53 | – | – | 0,47 | 3,10 | 6,6 |
| 3 | 0,368 | –0,50 | –0,37 | –0,50 | – | 0,46 | 4,14 | 8,9 |
| 4 | 0,368 | –0,58 | –0,17 | –0,58 | –0,66 | 0,46 | 8,30 | 18,0 |
| 2 | 0,750 | –1,40 | –0,88 | – | – | 0,15 | 4,60 | 32,0 |
| 3 | 0,750 | –1,98 | –1,88 | –0,69 | – | 0,15 | 9,10 | 61,0 |
| 4 | 0,750 | –1,50 | –1,92 | –1,43 | –0,93 | 0,15 | 18,0 | 118,0 |

$$r_1 = \varphi_1 \big/ (1-\varphi_2), \qquad r_k = \varphi_1 r_{k-1} + \varphi_2 r_{k-2}, \quad k > 0.$$

Отсюда следует, что уже для процесса АР(2) $g(p) > 1$.

Чтобы уловить тенденцию роста $g(p)$ с увеличением $p$, рассмотрим четыре модели АР(1)–АР(4). Значения $g(2), g(3)$ и $g(4)$, полученные с помощью $\tau^{(2)}_{\text{cor}}$, $\tau^{(2)}_{\text{pred}}$, будем рассчитывать численно, перебирая все допустимые значения авторегрессионных коэффициентов с шагом 0,01. Результаты расчетов сведены в таблицу, где для порядков авторегрессии $p = 1, \dots, 4$ и двух различных $\varepsilon$ в выражениях (11) приведены значения авторегрессионных коэффициентов $\varphi_i$, $i = \overline{1, p}$, при которых достигается максимум отношения $\tau^{(2)}_{\text{pred}} \big/ \tau^{(2)}_{\text{cor}}$, и соответствующие им значения $\tau^{(2)}_{\text{cor}}$, $\tau^{(2)}_{\text{pred}}$, $g(p)$.

Из таблицы видно, что максимум отношения $\tau^{(2)}_{\text{pred}} \big/ \tau^{(2)}_{\text{cor}}$ для определений (11) достигается при всех отрицательных авторегрессионных коэффициентах. При этом $\tau^{(2)}_{\text{cor}}$ с увеличением $p$ практически не меняется, тогда как $\tau^{(2)}_{\text{pred}}$ быстро растет.

Для иллюстрации табличных данных на рис. 2 и 3 приведены корреляционные функции и коэффициенты множественной корреляции процесса

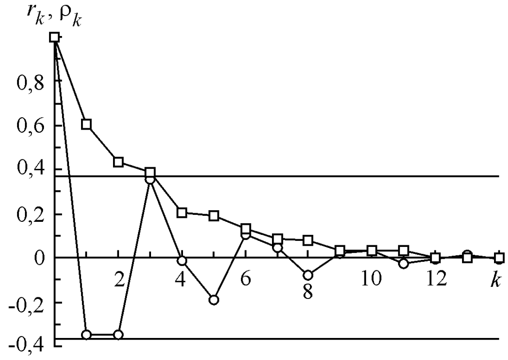


*Рис. 2*. Корреляционная функция и коэффициент множественной корреляции процесса АР(2) при $\varepsilon = \varepsilon_1$

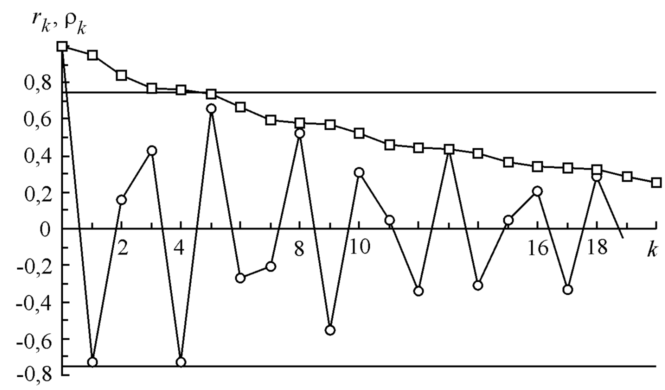


*Рис. 3.* Корреляционная функция и коэффициент множественной корреляции процесса АР(2) при $\varepsilon = \varepsilon_2$

АР(2), при которых достигается максимум отношения $\tau_{\text{pred}}^{(2)} / \tau_{\text{cor}}^{(2)}$. На этих рисунках кружками показаны значения нормированной корреляционной функции $r_k$ в зависимости от задержки $k$, а квадратиками – значения коэффициента множественной корреляции $\rho_k$. Кружки, соединенные линиями, дают функцию $r(\tau)$, а квадратики, соединенные линиями, – функцию $\rho(\tau)$. Горизонтальными линиями на рис. 2 обозначены уровни $\pm\varepsilon_1$, а на рис. 3 – уровни $\pm\varepsilon_2$. Из рисунков хорошо видно, что $\tau_{\text{pred}}^{(2)}$ значительно превосходит $\tau_{\text{cor}}^{(2)}$.

Таким образом, универсальные определения $\tau_{\text{cor}}, \tau_{\text{pred}}$ (11) приводят к заметно бо́льшим (в разы, как минимум) значениям функции $g(p)$, чем универсальные определения (10).

**Заключение.** Несмотря на то что коэффициент множественной корреляции $\rho_k$ полностью выражается через коэффициенты парной корреляции $r_k$, он содержит временной масштаб $\tau_{\text{pred}}$, отличающийся от времени корреляции в общем случае. В силу неравенства $\rho_k \geq |r_k|$ всегда будут справедливы неравенства $\tau_{\text{pred}} \geq \tau_{\text{cor}}$ и $g(p) \geq 1$. Только для случая марковских линейных процессов ($p = 1$) максимальное относительное время предсказуемости $g(p) = 1$. Для процессов АР($p$) с увеличением $p$ функция $g(p)$ растет, как минимум, по линейному закону. При этом значительное относительное время предсказуемости $\tau_{\text{pred}} / \tau_{\text{cor}}$ в большей степени присуще линейным процессам с осциллирующими, а не монотонными корреляционными функциями.

На практике часто в качестве грубой, приблизительной оценки времени предсказуемости линейных процессов берут время корреляции. Проведенное исследование показывает, что более точной приблизительной оценкой $\tau_{\text{pred}}$ служит характерное время спадания (до уровня $\sim 0{,}4$) огибающей модуля корреляционной функции. Такая оценка может также давать неудовлетворительные значения $\tau_{\text{pred}}$ (например, для сингулярных процессов [9]), но в любом случае она будет не хуже оценки $\tau_{\text{pred}} \sim \tau_{\text{cor}}$.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов, прогноз и управление. М.: Мир, 1974. Вып. 1.

2. **Аносов О. Л., Бутковский О. Я., Кравцов Ю. А.** Пределы предсказуемости для линейных авторегрессионных моделей // Радиотехника и электроника. 1995. **40**, № 12. С. 1886.
3. **Anosov O. L., Butkovskii O. Ya., Kravtsov Yu. A., Protopopescu V. A.** Predictability of linear and nonlinear autoregressive models // Phys. of Vibrations. 1999. **7**, N 2. P. 61.
4. **Моисеев С. Н.** Предельное время предсказуемости процессов авторегрессии–скользящего среднего // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 2002. **45**, № 10. С. 900.
5. **Моисеев С. Н.** Предельное время предсказуемости процессов скользящего среднего // Автометрия. 2003. **39**, № 4. С. 71.
6. **Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.** Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985.
7. **Коваленко И. Н., Филиппова А. А.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1973.
8. **Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.** Математическая статистика. М.: Высш. шк., 1984.
9. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
10. **Моисеев С. Н.** Прогноз нелинейных временных рядов через взвешенную сумму одномерных регрессий // Радиотехника и электроника. 1999. **44**, № 6. С. 715.
11. **Романенко А. Ф., Сергеев Г. А.** Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М.: Сов. радио, 1968.
12. **Мирский Г. Я.** Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982.
13. **Кравцов Ю. И.** Случайность, детерминированность, предсказуемость // УФН. 1989. **158**, вып. 1. С. 93.


*Поступила в редакцию 17 августа 2006 г.*