

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕНИЯ**

**С. И. Вяткин**

*Институт автоматки и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск  
E-mail: sivser@mail.ru*

Рассматриваются свободные формы, созданные с помощью функций возмущения. Особенностью свободных форм на основе скалярных функций возмущения и метода их визуализации является независимость времени геометрической обработки и количества данных, необходимых для моделирования поверхности, от ее геометрической формы. Свободные формы на основе аналитических функций возмущения обладают достоинством сплайнового представления поверхностей – высокой степенью гладкости, а также произвольностью формы при небольшом количестве функций возмущения.

**Введение.** В настоящее время в компьютерной графике используется несколько представлений геометрических объектов, каждый из которых в силу своих свойств используется в различных областях: от систем трехмерного моделирования и CAD-систем до систем визуализации реального времени.

Функциональное представление [1] наиболее точно описывает геометрию объекта и имеет наименьший размер данных, необходимых для этого. Недостатком является сложность геометрической обработки и визуализации в реальном времени. Рассмотренные в [2] способы функционального задания демонстрируют компактность и гибкость задания поверхностей и объектов, являющихся результатами логических операций над объемами.

Полигональное задание поверхности является кусочно-линейной интерполяцией некоторой поверхности. Его достоинство заключается в простоте представления и универсальности применения, потому что кусочно-линейное представление существует для любой поверхности. Также стоит отметить небольшие вычислительные затраты, необходимые для визуализации и геометрических преобразований. Недостаток заключается в больших размерах баз данных, требуемых для хранения информации о геометрии поверхности. Высокодетализированные модели, например античные скульптуры, после компьютерной реконструкции могут содержать сотни миллионов треугольников.

Задание поверхностей с применением сплайнового представления [3], наряду с аналитическим заданием, используется в моделирующих системах типа AutoCAD, 3D Studio. Оно отличается высокой точностью представле-

ния как двумерных, так и трехмерных объектов. В системах визуализации такое представление поверхностей пока не нашло применения, так как требует очень больших вычислительных затрат.

В данной работе предлагаются свободные формы, созданные с помощью скалярных функций возмущения. Показаны преимущества такого задания перед существующими методами. Предлагаемое представление свободных форм обладает главным достоинством сплайнового представления поверхностей – высокой степенью гладкости. Смоделированная поверхность описывается функцией третьего порядка и имеет гладкость степени  $C^2$  в рамках одного узла карты высот. Свободная форма может иметь порядок, значительно превосходящий третий, и в то же время моделироваться одной картой высот. Это эквивалентно заданию такой же поверхности большим количеством патчей (частей поверхности), что увеличивает время геометрической обработки поверхности на величину, прямо пропорциональную их количеству.

Кроме того, в работе представлены свободные формы на базе аналитических функций возмущения. Показано, что можно достичь хорошей гладкости поверхностей и компактного описания объектов, используя ограниченное число базовых и возмущающих функций. В сравнении с известными заданиями объектов и скалярным предложенное представление имеет более компактное описание.

**Свободные формы, созданные с помощью скалярных функций возмущения.** Общая теория поверхностей описана в [4]. Открытое односвязное множество точек на плоскости будем называть плоской областью. Пусть  $D$  – плоская область, а  $\bar{D}$  – ее замыкание. Введем на плоскости координатную систему  $(u, v)$ . Пусть  $x, y, z$  – прямоугольные декартовы координаты точек в трехмерном евклидовом пространстве  $E^3$ . Зададим на множестве  $\bar{D}$  три непрерывные функции:

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v); \quad z = \chi(u, v). \quad (1)$$

Предположим, что функции (1) обладают следующим свойством. Если  $(u_1, v_1)$  и  $(u_2, v_2)$  – различные точки множества  $\bar{D}$ , то точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  пространства  $E^3$ , координаты которых вычислены по формулам (1), тоже различны:

$$\begin{aligned} x_1 = \varphi(u_1, v_1); \quad y_1 = \psi(u_1, v_1); \quad z_1 = \chi(u_1, v_1); \\ x_2 = \varphi(u_2, v_2); \quad y_2 = \psi(u_2, v_2); \quad z_2 = \chi(u_2, v_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Множество  $S$  точек  $M(x, y, z)$ , координаты  $x, y, z$  которых определяются соотношениями (1), где функции  $\varphi, \psi, \chi$  в замыкании  $\bar{D}$  области  $D$  обладают вышеописанным свойством, называется простой поверхностью.

Поверхностью свободной формы  $F$  будем называть простую поверхность, являющуюся графиком функции, определенной в трехмерном пространстве  $z = f(x, y)$ .

Задание поверхности свободной формы на основе скалярного поля представляет собой совокупность некоторой базовой поверхности  $P$  (находящейся в той же системе координат, что и  $F$ ) и связанной с ней карты высот.

В качестве базовой поверхности может быть использована любая поверхность, но на практике используются простые поверхности типа плоскости, эллипсоида, цилиндра.

Карта высот представляет собой двумерный прямоугольник, который далее будет именоваться областью возмущения  $D_P$  базовой поверхности  $P$  и внутри которого задана функция возмущения  $h(u, v)$ . Карта высот, в свою очередь, определяет само возмущение. Областью определения функции  $h(u, v)$  является  $D_{h(u, v)} = \{U, V\}$ , где  $U$  и  $V$  – размеры прямоугольника.

Карта высот связана с базовой поверхностью следующим образом: существует преобразование  $G(\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^2)$  из системы координат, в которой находятся  $F$  и  $P$ , в систему координат карты высот. Как правило, таким преобразованием является параллельная проекция.

Значение функции  $h(G(d_F))$  характеризует отклонение точки  $d_F$ , лежащей на поверхности  $F$ , от точки  $d_P$ , являющейся проекцией этой точки на поверхность  $P$ . Другими словами, значение функции  $h(G(d_F))$  равно модулю вектора

$$\mathbf{v} = (\mathbf{d}_F - \mathbf{d}_P). \quad (3)$$

Следовательно, область поверхности свободной формы можно определить как множество точек в  $\mathbb{R}^3$ , определяемых векторным уравнением

$$\mathbf{F} = G(\mathbf{v}) + \mathbf{n} \cdot h(G(\mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к базовой поверхности.

Если вектор  $\mathbf{v}$  находится за пределами области возмущения, то вектор  $\mathbf{n} \cdot h(G(\mathbf{v})) = 0$ , а  $\mathbf{F}$  является вектором на базовой поверхности. Таким образом, для задания формы возмущающей поверхности можно использовать таблицу чисел, а в качестве функции  $h$  – функцию интерполяции по узловым значениям, которые берутся из таблицы (рис. 1).

В таком случае можно считать, что в области возмущения  $D_P$  задано скалярное поле.

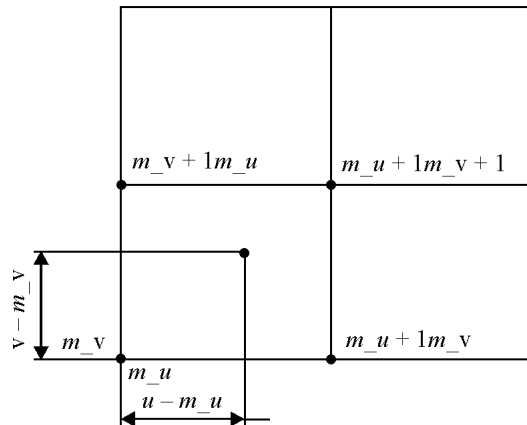


Рис. 1. Таблица чисел карты высот

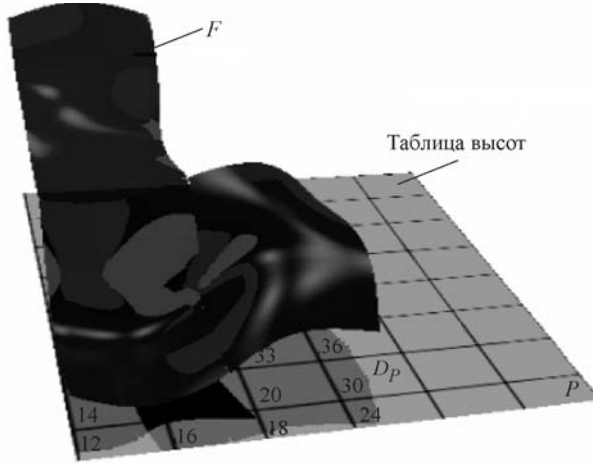


Рис. 2. Функция возмущения и базовая плоскость

Функция  $h$  имеет следующий вид:

$$h(u, v) = f_0 + (f_1 - f_0)(v - m_v), \quad (5)$$

где

$$f_0 = (1 - (u - m_u))\text{table}[m_u, m_v] + (u - m_u)\text{table}[m_u + 1][m_v];$$

$$f_1 = (1 - (u - m_u))\text{table}[m_u, m_v + 1] + (u - m_u)\text{table}[m_u + 1][m_v + 1];$$

$m_u$  – целая часть  $u$ ;  $m_v$  – целая часть  $v$ ;  $\text{table}[m_u][m_v]$  есть  $m_u$ -й и  $m_v$ -й элементы таблицы (см. рис. 1).

Поверхность свободной формы  $F$  на основе скалярного поля (рис. 2) задается с помощью базовой поверхности и функции возмущения (таблицы чисел, характеризующей отклонения поверхности  $F$  относительно базовой в контрольных точках).

В данной работе рассматривается задание поверхностей свободных форм на основе базовых плоскостей. В этом случае преобразованием  $G$  является параллельная проекция в направлении, противоположном вектору нормали базовой плоскости. Будем использовать понятие поверхности свободной формы  $F$  как комбинацию базовой плоскости и области возмущения, которая может иметь прямоугольный контур (рис. 3) или определяться векторным уравнением (4).

Исходя из этого построение поверхностей было реализовано таким образом, чтобы стало возможным отображать объекты с «нелинейной» границей. Дополнительно введено понятие порогового значения, находящегося в узле таблицы, и критерий принадлежности точки пространства [4]:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = G(\mathbf{v}) + \mathbf{n} \cdot h(G(\mathbf{v})), \\ h(G(\mathbf{v})) \geq \text{threshold}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{R}^3, \\ G(\mathbf{v}) \in D_P, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\text{threshold} = \text{const} \in R$  и означает пороговое значение.

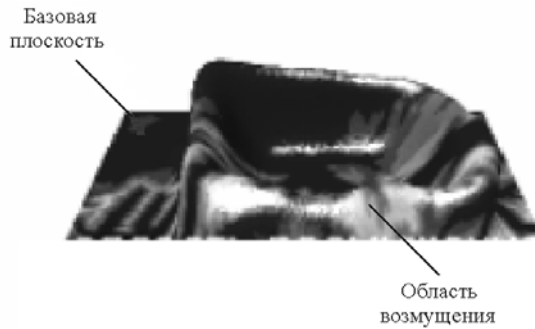


Рис. 3. Комбинация базовой плоскости и области возмущения

Введение требования принадлежности образа вектора  $\mathbf{v}$  ( $G(\mathbf{v})$ ) к области возмущения  $D_p$  позволяет отсекалть части пространства, которые отображаются в зону вне области возмущения. По критерию  $h(G(\mathbf{v})) \geq \text{threshold}$  отсекаются элементы пространства, образ которых лежит в области возмущения, но они не принадлежат моделируемому объекту. Значения в карте высот, удовлетворяющие этим требованиям, определяют границы возмущения многосвязной области, которая и используется при моделировании объекта (рис. 4, 5).

Создание поверхностей с помощью скалярных функций возмущения обладает существенным ограничением на класс моделируемых объектов. Поверхность  $F$  должна быть поверхностью нулевого уровня некоторой функции. Это означает, что каждой точке на базовой плоскости можно поставить в соответствие одну и только одну точку на поверхности  $F$ . Таким образом, смоделировать одной картой высот, например, поверхность вращения нельзя, так как в этом случае одной точке на плоскости будут соответствовать две точки на поверхности.

Для моделирования поверхностей, не являющихся поверхностями нулевого уровня функции, необходимо разбиение плоскостями исходной поверхности  $F$  на составляющие ее патчи:  $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_i \cup \dots \cup F_n$ . Построение карт высот описанным способом отдельно для каждой из этих плоскостей и моделирование с помощью логических операций исходной поверхности из набора моделей патчей происходит по двум критериям. Первый

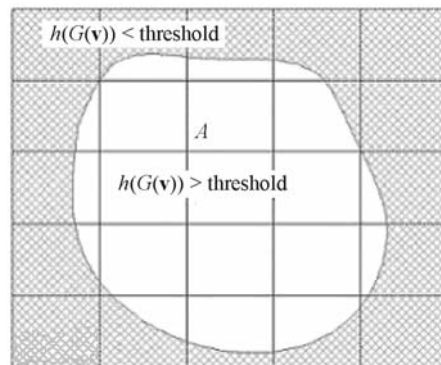
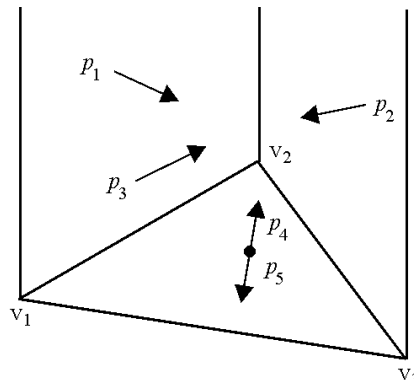


Рис. 4. Область возмущения



Рис. 5. Поверхность свободной формы

Рис. 6. Клиппирующие и базовые плоскости треугольника



заключается в возможности построения карты высот применительно к данной плоскости (части объекта), расположенной в той части полупространства, которая находится в направлении вектора нормали плоскости. Вторым критерием является возможность построения исходного объекта с помощью логических операций из полученных моделей патчей. Другими словами, объект необходимо разбить плоскостями так, чтобы отсекаемые части в совокупности представляли собой исходный объект. Применение такого подхода значительно расширяет класс моделируемых поверхностей.

**Свободные формы, созданные с помощью аналитических функций возмущения.** Предлагается описание сложных геометрических объектов с помощью задания функции отклонения (функции второго порядка в неявном виде) от базовых поверхностей: треугольников (рис. 6, 7, 8) и квадрата (рис. 9) [1, 5, 6].

На рис. 6 треугольник  $(v_1, v_2, v_3)$  представлен в функциональном пространстве пересечением пяти плоскостей: трех клиппирующих  $p_1, p_2, p_3$ , которые перпендикулярны базовым плоскостям треугольника с нормальными, ориентированными внутрь треугольника, и двух базовых плоскостей  $p_4, p_5$  треугольника с противоположно направленными нормальными.

Свободная форма есть композиция базовой поверхности и возмущения  $F'(x, y, z) = F(x, y, z) + R(x, y, z)$ , где функция возмущения  $R(x, y, z)$  находится следующим образом:

$$R(x, y, z) = \begin{cases} Q^2(x, y, z) & \text{при } Q(x, y, z) > 0, \\ 0 & \text{при } Q(x, y, z) \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $Q(x, y, z)$  – возмущающая квадратика.

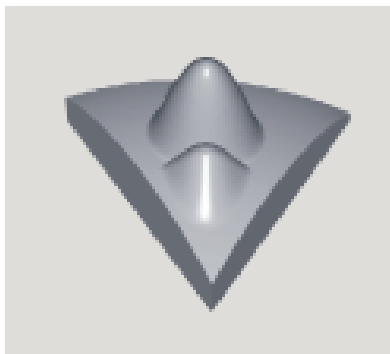


Рис. 7. Патч произвольной формы

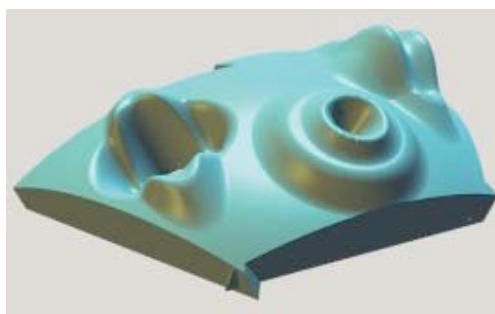


Рис. 8. Три гладкосопреженных патча произвольной формы

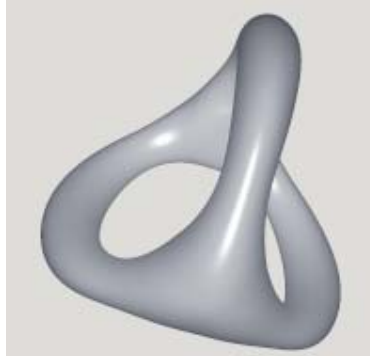


Рис. 9. Свободная форма на базе квадрики, созданная с помощью аналитических функций возмущения

Вследствие того что  $\max[Q + R] \leq \max[Q] + \max[R]$ , для оценки максимума  $Q$  на некотором интервале необходимо вычислить максимум функции возмущения на этом же интервале. Полученная поверхность будет гладкой (см. рис. 7, 8, 9), и потребуется небольшое количество функций возмущения для создания сложных форм поверхностей. Кроме того, при решении

описывающей функции  $F(x) \geq 0$  можно визуализировать не только поверхность, но и внутреннюю структуру объекта [7].

В работе [1] предложен также алгоритм многоуровневого отслеживания лучей, осуществляющий эффективный поиск точек поверхностей, участвующих в формировании изображения. Предложенный алгоритм в сравнении с известными алгоритмами сканирования [8] определяет поверхности функционально заданных объектов за меньшее время. Кроме того, при использовании известных функциональных представлений [2] иногда возникают проблемы: вычисление определяющей функции в заданной точке часто оказывается весьма трудоемкой задачей.

**Заключение.** Представления свободных форм, созданные с помощью скалярных и аналитических функций возмущения, обладают следующими достоинствами: существенным уменьшением количества поверхностей для отображения криволинейных объектов; сокращением описания баз данных; меньшим количеством операций для геометрических преобразований и передачи информации; простотой анимации и деформации объектов и поверхностей; упрощением визуализации объектов в нелинейных виртуальных пространствах [9, 10]; широтой спектра возможных областей применения (интерактивные графические системы визуализации функционально заданных объектов, САД-системы трехмерного моделирования, трехмерная веб-визуализация и т. д.).

В известных пакетах трехмерного моделирования в последнее время используются функциональные примитивы, например метасферы в пакете Strata Studio Pro и пр. Важной прикладной задачей может стать применение предлагаемого функционального задания объектов для трехмерной веб-визуализации, например функционально базируемое расширение 3D (X3D), а также VRML (Virtual Reality Modeling Language). Функционально заданные объекты могут использоваться совместно со стандартными моделями X3D и VRML. Для этого необходимо разработать FVRML/FX3D узлы на базе созданных примитивов и методов визуализации.

В данной работе для визуализации применялся алгоритм рекурсивного деления объектного пространства [1, 5, 6]. Моделирование показало, что этот алгоритм по качеству синтезируемых изображений сравним с методом трассировки лучей, но эффективнее по быстродействию.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вяткин С. И., Долговесов Б. С., Есин А. В. и др.** Геометрическое моделирование и визуализация функционально заданных объектов // Автометрия. 1999. № 6. С. 84.
2. **Аджиев В., Пасько А., Савченко В.** Моделирование форм с использованием вещественных функций // Открытые системы. 1996. № 5. С. 15.
3. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
4. **Позняк Э. Г., Шикин Е. В.** Дифференциальная геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1990.
5. **Vyatkin S., Dolgovesov B., Yesin A. et al.** Voxel Volumes volume-oriented visualization system // IEEE Comput. Soc. 1999. P. 234.
6. **Vyatkin S., Dolgovesov B., Guimaoutdinov O.** Synthesis of virtual environment using perturbation functions // Proc. of the World Multiconf. on Systemics, Cybernetics and Informatics. Orlando, FL, USA, 2001. Vol. III. P. 350.
7. **Вяткин С. И., Долговесов Б. С.** Визуализация полупрозрачных объектов на базе функций возмущения и прозрачности // Автометрия. 2005. **41**, № 3. С. 49.
8. **Вяткин С. И., Долговесов Б. С.** Синтез поверхностей свертки с рекурсивным делением объектного пространства // Автометрия. 2002. **38**, № 4. С. 58.
9. **Ковалев А. М.** О нелинейной модели визуального пространства // Автометрия. 2005. **41**, № 5. С. 58.
10. **Ковалев А. М.** Описание визуального пространства в моделях Клейна и Пуанкаре // Автометрия. 2006. **42**, № 4. С. 57.

*Поступила в редакцию 3 июля 2006 г.*