РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2007, том 43, № 3

УДК 535.41

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ – ПЕРО С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ БАЗОЙ. Ч. I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ*

А. П. Кольченко, В. С. Терентьев, Ю. В. Троицкий

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск
E-mail: kolchenko@iae.nsk.su

Теоретически исследуется многолучевой интерферометр, зеркала которого совершают малые колебания. В приближении однородных плоских волн получено точное решение основного уравнения для такого интерферометра и выражения для его передаточных функций, т. е. обобщенных коэффициентов отражения и пропускания.

Введение. Интерес к многолучевым интерферометрам типа интерферометра Фабри – Перо (ИФП), длина базы которых меняется во времени из-за колебаний зеркал, в настоящее время связан главным образом с разработкой детекторов гравитационных волн [1, 2]. Для этого предполагается использовать ИФП с расстояниями между зеркалами от сотен метров до нескольких километров. Типичным для таких ИФП является динамический режим работы, характеризующийся тем, что поле в резонаторе не успевает «отслеживать» изменения длин их баз. В данном случае основными характеристиками ИФП являются не коэффициенты отражения и пропускания в обычном их понимании, а передаточные функции (ПФ), связывающие амплитуды отраженного (прошедшего) поля с амплитудой поля засветки (см., например, [3]). Однако при этом использовался только качественный подход, а именно эффекты от колебаний зеркал учитывались с помощью зависящих от времени фазовых множителей типа $\exp[i\delta(t)]$, искусственно вводимых в коэффициенты отражения зеркал. При таком подходе связь между $\delta(t)$ и функциями движения зеркал остается неизвестной.

Вместе с тем из общих соображений ясно, что единичный акт отражения света от зеркала следует считать практически мгновенным (как и для неподвижного зеркала), а эффекты от движения зеркал должны проявляться лишь через зависимость длительности обхода резонатора светом $\tau(t)$ от текущего момента времени t. В данной работе используется именно такой, физически более обоснованный, подход к вычислению ПФ, что позволяет установить

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-02-16356).

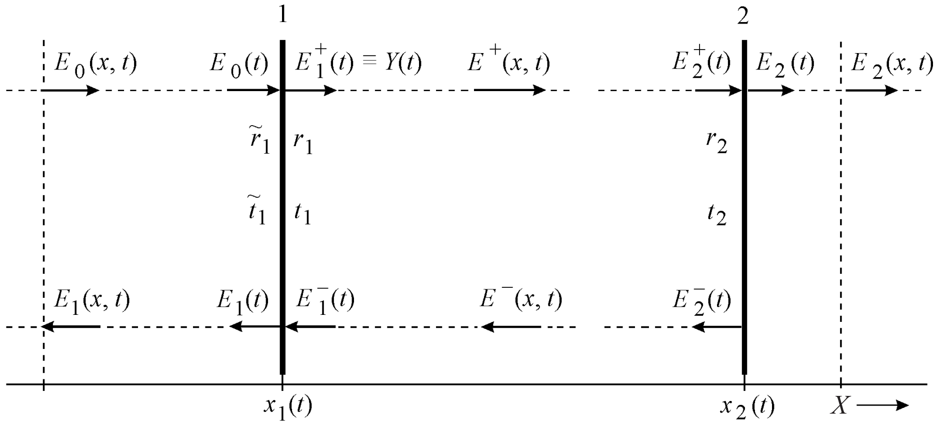

Схема интерферометра Фабри – Перо: $E_0(x, t)$ – волна засветки; $E_1(x, t)$ – отраженная волна; $E_2(x, t)$ – прошедшая волна; $E_j^{\pm}(t) \equiv E^{\pm}(x_j(t), t)$ – амплитуды волн на зеркалах; r_j, t_j и $\tilde{r}_j$, $\tilde{t}_j$ – коэффициенты отражения и пропускания зеркал изнутри и снаружи интерферометра соответственно ($j = 1, 2$)

однозначную связь между выходным излучением ИФП и функциями движения зеркал.

Постановка задачи и решение основного уравнения. Будем исходить из простой модели ИФП (схема представлена на рисунке) – два плоских зеркала расположены в плоскостях $x_1(t)$ и $x_2(t)$ перпендикулярно оси X.

Ограничимся только колебательным движением зеркал вдоль оси X. В этом случае функции движения зеркал $x_j(t)$ всегда можно записать в виде

$$x_j(t) = x_j + \delta x_j(t),$$
$$\delta x_j(t) = \delta x_j f_j(t), \quad \delta x_j \ge 0, \ \left|f_j(t)\right| \le 1 \ \ (j = 1,2), \tag{1}$$

где x_j – средняя координата зеркала; δx_j – амплитуда его колебаний; $f_j(t)$ – некоторая вещественная функция времени. Поле засветки $E_0(x, t)$ считаем направленным вдоль оси X. (Смысл остальных обозначений ясен из рисунка и подписи к нему.)

Полагаем, что световое поле внутри и вне резонатора – однородные плоские волны, для которых справедливо фурье-представление

$$E^{\pm}(x,t) \equiv E^{\pm}(t - x/c) = \int_{-\infty}^{+\infty} E^{\pm}(\omega)\exp(\pm i\kappa x - i\omega t)\,d\omega \quad (\omega \equiv c\kappa), \tag{2}$$

где $E^{\pm}(\omega)$ – спектральная плотность волны, c – скорость света. В частности, для поля засветки имеем

$$E_0(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(\omega)\exp(i\kappa x - i\omega t)\,d\omega \quad (\omega \equiv c\kappa). \tag{3}$$

Из (2) легко установить, что амплитуды волн на зеркалах будут связаны соотношениями

$$E_1^-(t)=E_2^-(t-\tau_-(t)); \quad E_2^+(t)=E_1^+(t-\tau_+(t)). \tag{4}$$

Времена пробега волн между зеркалами $\tau_\pm(t)$ определяются очевидными уравнениями

$$c\tau_+(t)=x_2(t)-x_1(t-\tau_+(t)); \quad c\tau_-(t)=x_2(t-\tau_-(t))-x_1(t). \tag{5}$$

Здесь t – момент «прихода» волны на второе и первое зеркало.

Считаем также, что для полей на зеркалах имеют место обычные (как и для неподвижных зеркал) граничные условия:

$$\begin{gathered} E_1^+(t)=\tilde{t}_1 E_0(t)+r_1 E_1^-(t); \quad E_2^-(t)=r_2 E_2^+(t); \\ E_0(t)=E_0(x_1(t),t), \quad E_j^\pm(t)=E^\pm(x_j(t),t) \quad (j=1,2). \end{gathered} \tag{6}$$

Основанием для этого является малость отношения скорости зеркала к скорости света (условие медленности колебаний зеркал):

$$\eta=|\mathrm{v}|/c\ll 1, \tag{7}$$

которое, как правило, всегда выполняется. В этом случае доплеровское смещение частоты при отражении света от движущегося зеркала относительно мало по сравнению с ее изменением из-за зависимостей $\tau_\pm(t)$.

Делая круговой обход против часовой стрелки (от первого зеркала в момент t ко второму и обратно (см. рисунок)) и используя (4) и (6), для поля на первом зеркале получим уравнение в конечных разностях:

$$\begin{gathered} Y(t)=Q(t)+rY(t-\tau(t)), \\ Y(t)\equiv E_1^+(t), \quad Q(t)=\tilde{t}_1 E_0(t), \quad r=r_1 r_2, \quad \tau(t)=\tau_-(t)+\tau_+(t-\tau_-(t)). \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь параметр $\tau(t)$ – длительность одного кругового обхода резонатора светом с учетом движения зеркал.

Если $Y(t)$ найдено, то с помощью (4) и (6) остальные поля вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{gathered} E_1^+(t)\equiv Y(t); \\ E_2^+(t)\equiv E_1^+(t-\tau_+(t))=Y(t-\tau_+(t)); \quad E_2^-(t)\equiv r_2 E_2^+(t)=r_2 Y(t-\tau_+(t)); \\ E_1^-(t)\equiv E_2^-(t-\tau_-(t))=r_2 Y(t-\tau(t)); \\ E_1(t)=\tilde{r}_1 E_0(t)+t_1 E_1^-(t)=\tilde{r}_1 E_0(t)+(r_2 t_1)Y(t-\tau(t)); \\ E_2(t)=t_2 E_2^+(t)=t_2 Y(t-\tau_+(t)). \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\tau_{\pm}(t)$ определяются уравнениями (5).

Отраженное от ИФП поле $E_1(x,t)$ в некоторой x-плоскости перед первым зеркалом и прошедшее через ИФП поле $E_2(x,t)$ в некоторой другой x-плоскости за вторым зеркалом задаются выражениями

$$E_1(x,t)=E_1(t-\tau_1(x,t)); \qquad E_2(x,t)=E_2(t-\tau_2(x,t)), \tag{10}$$

где $\tau_j(x,t)$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned} &c\tau_1(x,t)=x_1(t-\tau_1(x,t))-x \quad (x\le x_1(t));\\ &c\tau_2(x,t)=x-x_2(t-\tau_2(x,t)) \quad (x\ge x_2(t)). \end{aligned} \tag{11}$$

Очевидно, что при $x=x_j(t)$ эти уравнения имеют нулевые решения.

Ограничимся наиболее интересным и важным с точки зрения практических приложений случаем малых колебаний зеркал, когда характерное изменение длины резонатора δL мало по сравнению с ее средним значением:

$$h=\delta L/L\ll 1, \quad \delta L=(\delta x_1+\delta x_2), \quad L=|x_1-x_2|. \tag{12}$$

В этом приближении решение уравнений (5) с точностью до h-поправок определяется следующими формулами:

$$\begin{gathered} \tau_{\pm}(t)=\tau/2+(h\tau)f_{\pm}(t),\\ f_{+}(t)=0{,}5[g_2f_2(t)-g_1f_1(t-\tau/2)], \quad f_{-}(t)=0{,}5[g_2f_2(t-\tau/2)-g_1f_1(t)],\\ \tau=2L/c, \quad |f_{\pm}(t)|\le 1/2, \quad g_j=\delta x_j/\delta L, \ 0\le g_j\le 1 \ (j=1,2). \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь в правых частях для $\tau_{\pm}(t)$ пренебрегаем малыми слагаемыми порядка (ηh) в силу условий (7) и (12). При этом для $\tau(t)$ получаем

$$\begin{gathered} \tau(t)=\tau+(h\tau)f(t),\\ f(t)\equiv[f_{-}(t)+f_{+}(t-\tau/2)]=\\ =\{g_2f_2(t-\tau/2)-(g_1/2)[f_1(t-\tau)+f_1(t)]\}, \quad |f(t)|\le 1, \end{gathered} \tag{14}$$

где g_1 и g_2 определены в (13).

Решения уравнений (11) в этом же приближении задаются формулами

$$\begin{aligned} &\tau_1(x,t)=\tau_1(x)+\delta x_1(t-\tau_1(x))/c, \quad \tau_1(x)=|x_1-x|/c;\\ &\tau_2(x,t)=\tau_2(x)-\delta x_2(t-\tau_2(x))/c, \quad \tau_2(x)=|x-x_2|/c. \end{aligned} \tag{15}$$

При $x=x_j(t)$ следует полагать $\delta x_j(t-\tau_j(x))\equiv 0$ в соответствии с пояснениями к формуле (11).

Очевидно, что в данном h-приближении в аргументах всех функций $\delta x_j(\ldots)$ h-поправки должны быть отброшены. С учетом этого замечания решение уравнения (8) с нулевым начальным условием определяется формулами:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t\,|\,\omega)\,d\omega,$$

$$Y(t\,|\,\omega) = [\tilde{t}_1 E_0(\omega)\exp(i\kappa x_1)]S(t\,|\,\omega)\exp(-i\omega t),\;\; \omega = c\kappa,\;\; \kappa = 2\pi/\lambda,$$

$$S(t\,|\,\omega) = \sum_{n=0}^{N(t)} [r\exp(i\omega\tau)]^n \exp[i\varepsilon p_n(t) + i\varepsilon_1 f_1(t - n\tau)], \qquad p_n(t) = \sum_{s=0}^{n-1} f(t - s\tau), \tag{16}$$

$$\varepsilon = 2\kappa\delta L = h\omega\tau \equiv 4\pi\delta L/\lambda, \quad \varepsilon_1 = \kappa\delta x_1 = h_1\omega\tau/2,$$

$$h_1 = \delta x_1/L, \quad r = r_1 r_2, \quad N(t) = [(t - t_0)/\tau],$$

где t_0 – начальный момент времени (момент появления засветки на первом зеркале). Квадратные скобки в правой части формулы для $N(t)$ обозначают целую часть заключенного в них числа, т. е. $N(t)$ – это целое число интервалов τ на промежутке $(t - t_0)$. В пределе больших времен $(t_0 \to -\infty)$, когда режим работы ИФП можно считать установившимся, следует считать $N(t) = \infty$.

Передаточные функции. Подставляя решение (16) в формулы (9), для $E_1(t)$ и $E_2(t)$ получим

$$E_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_j(t\,|\,\omega)[E_0(\omega)\exp(i\kappa x_1 - i\omega t)]d\omega \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t,\omega)\,d\omega \;\; (j = 1,2). \tag{17}$$

Ядра этих интегралов

$$\Pi_1(t\,|\,\omega) = \tilde{r}_1\exp[i\varepsilon_1 f_1(t)] + (\tilde{t}_1 r_2 t_1)S(t - \tau\,|\,\omega)\exp[i\omega\tau + i\varepsilon f(t)];$$

$$\Pi_2(t\,|\,\omega) = (\tilde{t}_1 t_2)\,S(t - \tau/2\,|\,\omega)\exp[i\omega\tau/2 + i\varepsilon f_+(t)] \tag{18}$$

имеют смысл ПФ для ИФП в соответствии с их классическим определением для линейного четырехполюсника [4, 5].

Поля вне зеркал вычисляются по формулам (10), (15). С точностью до h-поправок получаем

$$E_j(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{jx}(t - \tau_j(x)\,|\,\omega)[E_0(\omega)\exp(-i\kappa x - i\omega t)]d\omega \;\; (j = 1,2), \tag{19}$$

где $\Pi_{jx}(t - \tau_j(x)\,|\,\omega)$ – ПФ по отношению к x-плоскости:

$$\Pi_{2x}(t\,|\,\omega) = (\tilde{t}_1 t_2)S(t - \tau/2\,|\,\omega)\exp[-i\kappa\delta x_1(t - \tau/2)];$$

$$\Pi_{1x}(t\,|\,\omega) = \tilde{r}_1\exp[2i\kappa x_1(t)] + (\tilde{t}_1 r_2 t_1)S(t - \tau\,|\,\omega)\, \times \tag{20}$$

$$\times\exp[2i\kappa x_2(t - \tau/2) - i\kappa\delta x_1(t - \tau)].$$

В наземных лабораторных условиях x-плоскость обычно удалена от ИФП на сравнительно малое расстояние, так что можно пренебречь эффектами запаздывания и считать $\tau_j(x)=0$, т. е. вместо (19) использовать формулы (17). Однако для «космических» интерферометров с расстояниями между зеркалами порядка сотен тысяч и более километров эффекты запаздывания могут оказаться существенными.

Спектральное представление ПФ. Для случая, когда характерные (основные) периоды колебаний зеркал одинаковы ($T_1 = T_2 = T$), функцию $S(t\,|\,\omega)$ в (16) можно представить в виде бесконечного ряда

$$S(t\,|\,\omega) = \sum_m S_m(t\,|\,\omega)\exp(-im\Omega t),$$

$$S_m(t\,|\,\omega) = \sum_{n=0}^{N(t)} S_m(n\,|\,\omega),$$

$$S_m(n\,|\,\omega) = T^{-1}\int_{-T/2}^{+T/2} S(n,t\,|\,\omega)\exp(im\Omega t)\,dt \equiv \mathcal{F}_m\{S(n,t\,|\,\omega)\}, \tag{21}$$

$$S(n,t\,|\,\omega) = [r\exp(i\omega\tau)]^n \exp[i\varepsilon p_n(t) + i\varepsilon_1 f_1(t-n\tau)],$$

$$\Omega = 2\pi/T \quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

($\mathcal{F}_m\{S(n,t\,|\,\omega)\}$ – фурье-образ функции $S(n,t\,|\,\omega)$). Следовательно, ПФ в (17) представимы в виде таких же рядов:

$$\Pi_j(t\,|\,\omega) = \sum_m \Pi_{jm}(t\,|\,\omega)\exp(-im\Omega t) \quad (j=1,2),$$

$$\Pi_{1m}(t\,|\,\omega) = \tilde{r}_1 C_m(\omega) + (\tilde{t}_1 r_2 t_1)A_m(t\,|\,\omega), \quad \Pi_{2m}(t\,|\,\omega) = (\tilde{t}_1 t_2)B_m(t\,|\,\omega),$$

$$C_m(\omega) = \mathcal{F}_m\{C(t)\}, \quad C(t) = \exp[i\varepsilon f(t)], \tag{22}$$

$$A_m(t\,|\,\omega) = \sum_{n=0}^{N(t)} A_m(n\,|\,\omega), \quad A_m(n\,|\,\omega) = \mathcal{F}_m\{A(n,t\,|\,\omega)\},$$

$$A(n,t\,|\,\omega) = S(n,t-\tau\,|\,\omega)\exp[i\varepsilon f(t) + i\omega\tau], \quad B_m(t\,|\,\omega) = \sum_{n=0}^{N(t)} B_m(n\,|\,\omega),$$

$$B_m(n\,|\,\omega) = \mathcal{F}_m\{B(n,t\,|\,\omega)\}, \quad B(n,t\,|\,\omega) = S(n,t-\tau/2\,|\,\omega)\exp[i\varepsilon f_+(t) + i\omega\tau/2],$$

т. е. (17) запишется в виде

$$E_j(t) = \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jm}(t\,|\,\omega)\exp(-i\omega_m t)\,d\omega \quad (j=1,2), \tag{23}$$

$$E_{jm}(t\,|\,\omega) = \Pi_{jm}(t\,|\,\omega)[E_0(\omega)\exp(i\kappa x_1)], \quad \omega_m = \omega + m\Omega \quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Такая запись отражает тот очевидный факт, что колебания зеркал приводят к угловой (фазовой) модуляции волн в резонаторе, и поэтому полное поле внутри ИФП будет состоять из бесконечной дискретной совокупности волн с частотами ω_m. Функции $\Pi_{jm}(t\,|\,\omega)$ выступают в качестве ПФ по соответствующим каналам $\omega \to \omega_m$, и именно они представляют непосредственный интерес.

Если характерные периоды колебаний зеркал разные (несоизмеримые), то будут возникать волны на комбинационных частотах ω_{mk} и вместо (23) получится двойной ряд:

$$E_j(t) = \sum_{m,\,k} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jmk}(t\,|\,\omega) \exp(-i\omega_{mk} t)\, d\omega \quad (j = 1,2),$$

$$E_{jmk}(t\,|\,\omega) = \Pi_{jmk}(t\,|\,\omega)[E_0(\omega)\exp(i\kappa x_1)], \tag{24}$$

$$\omega_{mk} = \omega + (m\Omega_1 + k\Omega_2) \quad (m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Здесь $\Pi_{jmk}(t\,|\,\omega)$ вычисляются по формулам (22) с заменой в них Ω величиной $\Omega_{mk} = (m\Omega_1 + k\Omega_2)$.

Заключение. Таким образом, в представленной работе получены новые выражения для ПФ интерферометра. В отличие от известных (см., например, [3]), они определяются через точное (в данном приближении) решение основного уравнения (8). В этом решении фазы $p_n(t)$ и $f_1(t - n\tau)$ явным и однозначным образом выражаются через функции (законы) движения зеркал $f_{1,\,2}(t)$. Кроме того, в нем явно учтена зависимость верхнего предела суммы $N(t)$ от времени. Все это дает возможность проводить не только качественное, но и количественное сравнение расчетных и экспериментальных данных для ПФ.

В работе также изложен систематический подход к решению задачи и получены общие выражения для ПФ. Расчеты ПФ для конкретных ситуаций будут рассматриваться в других работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Брагинский В. Б.** Гравитационно-волновая астрономия: новые методы измерений // УФН. 2000. **170**, № 7. С. 743.
2. **Mason J. E.** Signal Extraction and Optical Design for an Advanced Gravitational Wave Interferometer. Pasadena, California: California Institute of Technology, 2001.
3. **Redding D., Regehr M., Sievers L.** Dynamic models of Fabry – Perot interferometers // Appl. Opt. 2002. **41**, N 15. P. 2894.
4. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
5. **Троицкий Ю. В.** Многолучевые интерферометры отраженного света. Новосибирск: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 9 ноября 2005 г.