РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2007, том 43, № 2

УДК 519.621.64

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ СМЕШАННОГО ВЕКТОРНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

Э. П. Шурина[1], О. В. Нечаева[2], О. В. Нечаев[2]

[1]*Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск*
E-mail: shurina@online.sinor.ru
[2]*Научно-производственное предприятие геофизической аппаратуры «Луч», г. Новосибирск*
E-mail: howl@ngs.ru

Предлагается смешанная вариационная формулировка задачи, которая позволяет находить электрическое поле как решение дифференциального уравнения второго порядка, а вектор магнитной индукции как решение дифференциального уравнения первого порядка.

Введение. Электромагнитные процессы описываются системой уравнений Максвелла. Для решения этой системы широко используется метод конечных элементов (МКЭ) и его модификации [1–3]. МКЭ является общим методом для решения дифференциальных уравнений [4]. Большинство современных методик базируется на моделях, сформулированных в терминах естественных переменных.

Одним из подходов к решению задач электромагнетизма является непосредственное решение системы уравнений первого порядка на основе смешанного векторного базиса, состоящего из edge- и face-элементов, степени свободы которых связаны с гранями [5, 6]. Edge-элементы обеспечивают непрерывность тангенциальных компонент поля на межэлементных и межфрагментарных границах в областях с разрывными физическими свойствами. Face-элементы реализуют непрерывность нормальных компонент вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$. Смешанный векторный МКЭ позволяет решать задачи электромагнетизма в естественных переменных, одновременно получать значения электрического и магнитного полей и учитывать такие физические свойства электромагнитных полей, как непрерывность тангенциальной компоненты поля ($\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$) либо нормальной компоненты поля ($\mathbf{D}$ или $\mathbf{B}$). Существенным недостатком этого метода является плохая обусловленность результирующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-05-64528) и NWO-RFBR (грант № 047.016.003)

Целью данной работы является создание альтернативной смешанной вариационной формулировки задачи, которая позволит находить одновременно электрическое и магнитное поля, при этом СЛАУ должна обладать хорошей обусловленностью.

Математическая модель. Рассмотрим систему уравнений Максвелла, описывающую поведение электромагнитного поля:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -(\partial \mathbf{B}/\partial t), \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = (\partial \mathbf{D}/\partial t) + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_0, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{4}$$

Уравнения состояния имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{6}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – электрическая и магнитная индукции; $\mathbf{J}_0$ – плотность стороннего тока; σ – удельная проводимость; ρ – плотность электрических зарядов; ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно.

Используя соотношения (5), (6) и полагая $\mu = \mathrm{const}$, систему уравнений (1)–(4) можно представить в виде

$$\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu^{-1}(\partial \mathbf{B}/\partial t), \tag{7}$$

$$\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \varepsilon(\partial \mathbf{E}/\partial t) + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_0; \quad \mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{E} = \rho; \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{8}$$

На границе расчетной области заданы краевые условия

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \mu^{-1}\mathbf{B} \times \mathbf{n}\big|_{\Gamma_2} = 0,$$

где Γ – граница области Ω, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, и начальные условия

$$\mathbf{E}\big|_{t=t_0} = \mathbf{E}_0, \qquad \mathbf{B}\big|_{t=t_0} = \mathbf{B}_0.$$

Используя стандартные преобразования, можно получить уравнение второго порядка относительно поля $\mathbf{E}$:

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\,\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}_0}{\partial t}; \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n}\big|_{\Gamma_1} = 0; \quad \mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \times \mathbf{n}\big|_{\Gamma_2} = 0; \quad \mathbf{E}\big|_{t_0} = \mathbf{E}_0; \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\bigg|_{t_0} = \mathbf{E}_1. \end{gathered} \tag{9}$$

При необходимости задания неоднородного краевого условия на Γ_1 будем использовать замену переменных

$$\mathbf{E} = \widetilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}_g ,$$

где $\widetilde{\mathbf{E}}$ – новая неизвестная переменная, удовлетворяющая однородным краевым условиям; $\mathbf{E}_g$ – некоторая заданная функция, удовлетворяющая неоднородному краевому условию на Γ_1 и однородному краевому условию на Γ_2.

Вариационная постановка задачи. Введем следующие функциональные пространства:

$$H(\mathrm{grad};\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \mathrm{grad}\, u \in L^2(\Omega)^3\},$$
$$H(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3\},$$
$$H^0_\Gamma(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}\big|_\Gamma = 0\},$$
$$H(\mathrm{div};\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathrm{div}\,\mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$$

с нормами, определенными в виде

$$\|u\|^2_{\mathrm{grad},\,\Omega} = \int_\Omega (\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, u + u^2)\, d\Omega,$$
$$\|\mathbf{v}\|^2_{\mathrm{rot},\,\Omega} = \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\, d\Omega,$$
$$\|\mathbf{v}\|^2_{\mathrm{div},\,\Omega} = \int_\Omega ((\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\, d\Omega.$$

Для введенных пространств выполняются условия включения [7]:

1) если $\varphi \in H(\mathrm{grad};\Omega)$, то $\mathrm{grad}\,\varphi \in H(\mathrm{rot};\Omega)$;

2) если $\mathbf{E} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, то $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \in H(\mathrm{div};\Omega)$.

Далее $(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение в пространстве $L^2(\Omega)^3$.

Пусть в области Ω нет свободных зарядов. Умножая скалярно уравнения (7), (8) соответственно на функции $\mathbf{F} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathbf{V} \in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\Omega)$:

$$(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{E},\, \mathbf{F}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{F}),$$

$$(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B},\, \mathbf{V}) = \left(\varepsilon\, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{V}\right) + (\sigma\mathbf{E}, \mathbf{V}) + (\mathbf{J}_0, \mathbf{V}),$$

и используя первую векторную теорему Грина, получим смешанную вариационную постановку для электрического и магнитного полей [2]:

Для $\mathbf{J}_0 \in C^2(0, T;\ H(\mathrm{div};\ \Omega))$ найти $\mathbf{E} \in C^2(0, T;\ H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\ \Omega))$ и $\mathbf{B} \in C^2(0,T;\ H(\mathrm{div};\ \Omega))$ такие, что $\forall \mathbf{V} \in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\ \Omega)$ и $\forall \mathbf{F} \in H(\mathrm{div};\ \Omega)$ выполняются

$$\int_\Omega \mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}\, d\Omega = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}\, d\Omega, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}d\Omega=\int_{\Omega}\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}d\Omega-\int_{\Omega}\sigma\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}d\Omega-\int_{\Omega}\mathbf{J}_0\cdot\mathbf{V}d\Omega. \quad (11)$$

Умножая скалярно уравнение (9) на функцию $\mathbf{V}\in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\Omega)$:

$$(\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\mathbf{E},\,\mathbf{V})+\left(\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},\mathbf{V}\right)+\left(\sigma\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\mathbf{V}\right)=-\left(\frac{\partial\mathbf{J}_0}{\partial t},\mathbf{V}\right), \quad (12)$$

и применяя к (12) первую векторную теорему Грина, получим вариационную постановку для электрического поля [2]:

Для $\mathbf{J}_0\in C^2(0,T;\ H(\mathrm{div};\ \Omega))$ найти $\mathbf{E}\in C^2(0,T;\ H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\ \Omega))$ такое, что $\forall\mathbf{V}\in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\ \Omega)$ выполняется

$$(\mu^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{E},\,\mathrm{rot}\mathbf{V})+\left(\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},\mathbf{V}\right)+\left(\sigma\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\mathbf{V}\right)=-\left(\frac{\partial\mathbf{J}_0}{\partial t},\mathbf{V}\right). \quad (13)$$

Покажем, что из вариационной постановки (10), (11) можно получить вариационную постановку (13).

Согласно условию включения 2 соотношение (10) будет выполняться для функций вида $\mathbf{F}=\mathrm{rot}\mathbf{V}$ и $\forall\mathbf{V}\in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\ \Omega)$, тогда

$$(\mu^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{E},\,\mathrm{rot}\mathbf{V})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu^{-1}\mathbf{B},\,\mathrm{rot}\mathbf{V}). \quad (14)$$

Возьмем производную по времени от уравнения (11) и получим

$$\left(\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},\mathbf{V}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\mu^{-1}\mathbf{B},\,\mathrm{rot}\mathbf{V})-\left(\sigma\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\mathbf{V}\right)-\left(\frac{\partial\mathbf{J}_0}{\partial t},\mathbf{V}\right). \quad (15)$$

Используя правую часть (14), преобразуем (15) к следующему виду:

$$\left(\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},\mathbf{V}\right)=-(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{E},\,\mathrm{rot}\mathbf{V})-\left(\sigma\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\mathbf{V}\right)-\left(\frac{\partial\mathbf{J}_0}{\partial t},\mathbf{V}\right). \quad (16)$$

Уравнения (16) и (13) совпадают.

Выпишем преобразованную смешанную вариационную постановку:

Для $\mathbf{J}_0\in C^2(0,\ T;\ H(\mathrm{div};\ \Omega))$ найти $\mathbf{E}\in C^2(0,\ T;\ H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\ \Omega))$, $\mathbf{B}\in C^2(0,T;\ H(\mathrm{div};\ \Omega))$ такие, что $\forall\mathbf{V}\in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\ \Omega)$ и $\forall\mathbf{F}\in H(\mathrm{div};\ \Omega)$ выполняются

$$(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\mathbf{E},\,\mathbf{F})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu^{-1}\mathbf{B},\,\mathbf{F}), \quad (17)$$

$$(\mu^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{E},\,\mathrm{rot}\mathbf{V})+\left(\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},\mathbf{V}\right)+\left(\sigma\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\mathbf{V}\right)=-\left(\frac{\partial\mathbf{J}_0}{\partial t},\mathbf{V}\right). \quad (18)$$

Пусть плотность стороннего тока изменяется во времени по гармоническому закону с частотой f:

$$\mathbf{J}_0(x,t)=\mathbf{J}_0(x)\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{19}$$

где $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица; $\omega=2\pi f$ – циклическая частота; $\mathbf{J}_0$ – амплитуда.

Тогда

$$\mathbf{E}(x,t)=\mathbf{E}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{20}$$

$$\mathbf{B}(x,t)=\mathbf{B}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{21}$$

В (19)–(21) $\mathbf{J}_0(x)$, $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ являются комплекснозначными векторными величинами соответственно.

Подставляя (19)–(21) в (17) и (18), получим смешанную вариационную постановку для уравнений Максвелла в частотной области в терминах мнимых и действительных компонент искомых величин:

Для $\mathbf{J}_{0\mathrm{Re}}\in H(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathbf{J}_{0\mathrm{Im}}\in H(\mathrm{div};\Omega)$ найти $\mathbf{E}_{\mathrm{Re}}\in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\,\Omega)$, $\mathbf{E}_{\mathrm{Im}}\in$ $\in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}\in H(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}\in H(\mathrm{div};\Omega)$ такие, что $\forall\mathbf{V}\in H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\,\Omega)$ и $\forall\mathbf{F}\in H(\mathrm{div};\,\Omega)$ выполняются

$$\int\limits_\Omega \mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_{\mathrm{Re}}\cdot\mathbf{F}d\Omega-\omega\int\limits_\Omega \mu^{-1}\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}\cdot\mathbf{F}d\Omega=0, \tag{22}$$

$$\int\limits_\Omega \mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_{\mathrm{Im}}\cdot\mathbf{F}d\Omega+\omega\int\limits_\Omega \mu^{-1}\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}\cdot\mathbf{F}d\Omega=0, \tag{23}$$

$$\int\limits_\Omega \mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_{\mathrm{Re}}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{V}d\Omega-\varepsilon\omega^2\int\limits_\Omega \mathbf{E}_{\mathrm{Re}}\cdot\mathbf{V}d\Omega-\sigma\omega\int\limits_\Omega \mathbf{E}_{\mathrm{Im}}\cdot\mathbf{V}d\Omega=\omega\int\limits_\Omega \mathbf{J}_{0\mathrm{Im}}\cdot\mathbf{V}d\Omega, \tag{24}$$

$$\int\limits_\Omega \mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_{\mathrm{Im}}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{V}d\Omega-\varepsilon\omega^2\int\limits_\Omega \mathbf{E}_{\mathrm{Im}}\cdot\mathbf{V}d\Omega+\sigma\omega\int\limits_\Omega \mathbf{E}_{\mathrm{Re}}\cdot\mathbf{V}d\Omega=-\omega\int\limits_\Omega \mathbf{J}_{0\mathrm{Re}}\cdot\mathbf{V}d\Omega. \tag{25}$$

Дискретизация вариационной постановки. Определим конечномерные подпространства $H^h(\mathrm{rot};\Omega)\subset H(\mathrm{rot};\Omega)$, $H^{0h}(\mathrm{rot};\Omega)\subset H^0_{\Gamma_1}(\mathrm{rot};\Omega)$ и $H^h(\mathrm{div};\Omega)\subset H(\mathrm{div};\Omega)$. Обозначим через $\mathbf{N}_i$ базисные функции пространства $H^{0h}(\mathrm{rot};\Omega)$, сохраняющие непрерывность тангенциальной компоненты поля при переходе через межэлементные границы, или векторные элементы второго порядка; $\mathbf{F}_i$ – базисные функции пространства $H^h(\mathrm{div};\,\Omega)$, сохраняющие непрерывность нормальной компоненты поля при переходе через границу элемента, или векторные элементы первого порядка. Построим в расчетной области тетраэдральную сетку, на ячейках которой определим базисные функции в виде [8, 9].

Сформулируем дискретные аналоги вариационных постановок (22)–(25), используя дискретные пространства $H^h(\mathrm{rot};\,\Omega)$, $H^{0h}(\mathrm{rot};\,\Omega)$ и $H^h(\mathrm{div};\Omega)$:

Для $\mathbf{J}_{0\mathrm{Re}} \in H^h(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mathbf{J}_{0\mathrm{Im}} \in H^h(\mathrm{rot};\Omega)$ найти $\mathbf{E}_{\mathrm{Re}} \in H^{0h}(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mathbf{E}_{\mathrm{Im}} \in H^{0h}(\mathrm{rot};\ \Omega)$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}} \in H^h(\mathrm{div};\ \Omega)$, $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}} \in H^h(\mathrm{div};\ \Omega)$ такие, что $\forall \mathbf{V} \in H^{0h}(\mathrm{rot};\ \Omega)$ и $\forall \mathbf{F} \in H^h(\mathrm{div};\ \Omega)$ выполняются (22)–(25).

Разложим искомые функции **E** и **B** по базису пространств $H^h(\mathrm{rot};\ \Omega)$ и $H^h(\mathrm{div};\Omega)$:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{Re}} = \sum_i \alpha_i^{\mathrm{Re}} \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{E}_{\mathrm{Im}} = \sum_i \alpha_i^{\mathrm{Im}} \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{Re}} = \sum_j \beta_j^{\mathrm{Re}} \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{Im}} = \sum_j \beta_j^{\mathrm{Im}} \mathbf{F}_j.$$

В результате получим СЛАУ относительно коэффициентов α_i^{Re}, α_i^{Im}, β_j^{Re} и β_j^{Im}:

$$\begin{cases} -\omega A\beta^{\mathrm{Im}} + K\alpha^{\mathrm{Re}} = 0, \\ \omega A\beta^{\mathrm{Re}} + K\alpha^{\mathrm{Im}} = 0, \\ S\alpha^{\mathrm{Re}} - \omega^2 C\alpha^{\mathrm{Re}} - \omega M\alpha^{\mathrm{Im}} = \omega G^{\mathrm{Im}}, \\ \omega M\alpha^{\mathrm{Re}} + S\alpha^{\mathrm{Im}} - \omega^2 C\alpha^{\mathrm{Im}} = -\omega G^{\mathrm{Re}}. \end{cases}$$

Запишем полученную систему в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} S-\omega^2 C & -\omega M & 0 & 0 \\ \omega M & S-\omega^2 C & 0 & 0 \\ 0 & K & \omega A & 0 \\ K & 0 & 0 & -\omega A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{\mathrm{Re}} \\ \alpha^{\mathrm{Im}} \\ \beta^{\mathrm{Re}} \\ \beta^{\mathrm{Im}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega G^{\mathrm{Im}} \\ -\omega G^{\mathrm{Re}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

где элементы матриц A, S, C, M и векторы правых частей G определяются следующими соотношениями:

$$[A]_{i,\,j} = \int_\Omega \mu^{-1} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j \, d\Omega, \quad [S]_{i,\,j} = \int_\Omega \mu^{-1} \operatorname{rot}\mathbf{N}_i \cdot \operatorname{rot}\mathbf{N}_j \, d\Omega,$$

$$[C]_{i,\,j} = \int_\Omega \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \, d\Omega, \quad [M]_{i,\,j} = \int_\Omega \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \, d\Omega, \quad [G]_i = \sum_j R_{ij} \mathbf{J}_{0j}.$$

Тестирование разработанной вычислительной схемы проводилось на модельной задаче магнитотеллурического зондирования, входящей в набор проекта COMMEMI [10]. Расчетная область состоит из следующих объектов (рис. 1): 1 – воздух ($\sigma = \sigma_1$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$); 2 – земля ($\sigma = \sigma_2$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$), границей между землей и воздухом является плоскость $z = 0$; 3 – параллелепипедальный объект (размер объекта $2000 \times 1000 \times 2000$ м; $\sigma = \sigma_3$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$). На расчетную область сверху падает плоскополяризованная волна вида $\mathbf{E} = (E_0 \cos(\omega t - kz), 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, B_0 \cos(\omega t - kz), 0)$, где $k = \omega / \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. На границе расчетной области были заданы следующие краевые условия: на верхней грани $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = E_0$, на нижней, левой и правой гранях $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$, на передней и задней гранях $\mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0$.

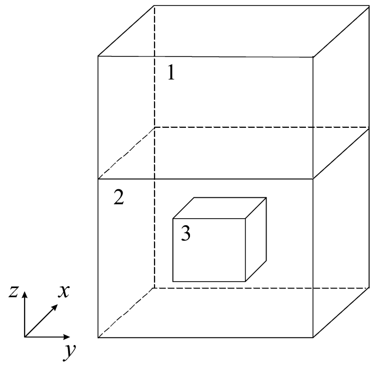

Рис. 1. Модель среды

Результаты тестирования модели

f, Гц	ρ_T, Ом · м	$\Delta\rho$
10^2	102,705	0,02705
10^1	100,112	0,00112
10^0	99,997	0,00003
10^{-1}	99,999	0,00001
10^{-2}	99,999	0,00001

Наиболее важной характеристикой, используемой в магнитотеллурическом зондировании, является импеданс Z. Для горизонтально-слоистой среды $Z = E_x / H_y$ (E_x и H_y – комплексные амплитуды поля).

Над однородным полупространством $|Z| = \sqrt{\omega \mu_0 \rho}$. Отсюда выразим сопротивление: $\rho_T = |Z|^2 / (\omega \mu_0)$.

Моделирование проводилось на неструктурированной тетраэдральной сетке. Результирующая СЛАУ решена методом бисопряженных градиентов. Условием выхода из итерационного процесса было уменьшение относительной невязки в 10^7 раз. Размер результирующей СЛАУ составлял 514056.

В таблице приведены результаты решения модельной задачи при $\sigma_1 = 0\,(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, $\sigma_2 = 0{,}01\,(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, $\sigma_3 = 0{,}01\,(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, что соответствует модели однородного полупространства с сопротивлением в земле $\rho = 100$ Ом · м; $\Delta\rho$ – относительная погрешность кажущегося сопротивления, определенного в результате численных расчетов, $\Delta\rho = |\rho - \rho_T| / |\rho|$.

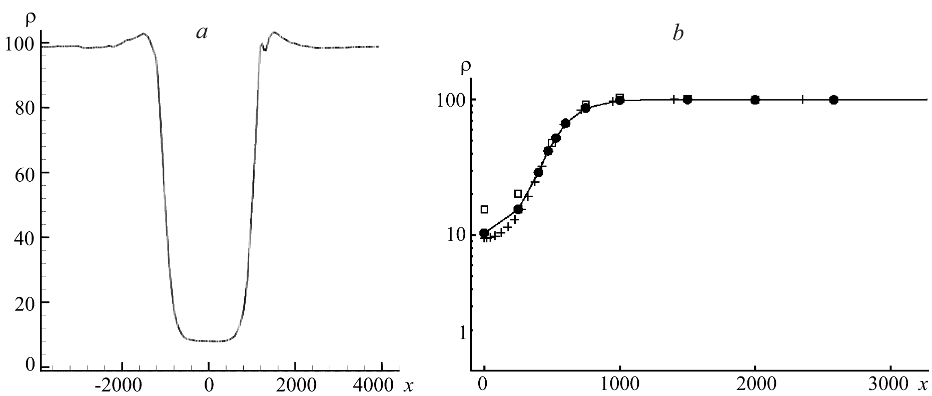

Рис. 2. Кажущееся сопротивление на прямой $z = 0$, $y = 0$: *a* – численный расчет задачи; *b* – расчеты, приведенные в [11]

На рис. 2, a, b представлено кажущееся сопротивление, полученное при моделировании в расчетной области, со следующими свойствами: $\sigma_1 = 0\,(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$, $\sigma_2 = 0{,}01\,(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$, $\sigma_3 = 2\,(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$; расстояние от поверхности земли до верхней грани параллелепипедального объекта 250 м; $f = 10$ Гц. Рис. 2, a иллюстрирует полученный в данной работе метод. На рис. 2, b используются следующие обозначения: квадраты – результаты, приведенные авторами проекта COMMEMI [11], крестики – результаты моделирования методом T-Ω FE [11], линия с точками – результаты моделирования методом VFE++ [12].

Заключение. На основе смешанного векторного и векторного методов конечных элементов разработана и исследована вычислительная схема для моделирования трехмерных гармонических электромагнитных полей в неоднородных по физическим свойствам областях, позволяющая эффективно находить значения полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Проведено численное моделирование трехмерных квазистационарных электромагнитных полей на классе задач магнитотеллурического зондирования. В случае однородного полупространства кажущееся сопротивление, найденное численно на различных частотах, совпадает с реальным значением сопротивления в земле с высокой точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jin J.** The Finite Element Method in Electromagnetics. N. Y.: John Willey & Sons, 1993.
2. **Monk P.** Finite Element Methods for Maxwells Equations. Oxford: Clarendon-Press, 2003.
3. **Brener S. C., Scott L. R.** The Mathematical Theory of Finite Element Methods. N. Y.: Springer, 2002.
4. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. N. Y.: Springer-Verlag, 1991.
5. **Nedelec J. C.** Mixed finite elements in R^3 // Numer. Math. 1980. **35**, N 3. P. 315.
6. **Nedelec J. C.** A new family of mixed finite elements in R^3 // Numer. Math. 1986. **50**. P. 57.
7. **Hiptmair R.** Finite elements in computational electromagnetism // Acta Numer. 2002. **11**. P. 237.
8. **Webb J. P.** Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements // IEEE Trans. on Antennas and Propag. 1999. **47**, N. 8. P. 1244.
9. **Ainsworth M., Coyle J.** Hierarchic finite element bases on unstructured tetrahedral meshes // Intern. Journ. Numer. Meth. Eng. 2003. **58**, N 14. P. 2103.
10. **Zhdanov M. S., Varentsov I. M., Weaver J. T et al.** Methods for modeling electromagnetic fields: Results from COMMEMI – The international project on the comparision of modeling methods for electromagnetic induction // Journ. of Appl. Geophys. 1997. **37**, N 3–4. P. 133.
11. **Mitsuhata Y., Uchida T.** 3D magnetotelluric modeling using the T-Omega finite-element method // Geophysics. 2004. **69**. P. 108.
12. **Xueming S., Utada H., Wang J. et al.** Three dimensional magnetotelluric forward modeling using vector finite element method combined with divergence corrections (VFE++) // Proc. of the 17th Workshop. Hyderabad, India, 2004. P. 18.

Поступила в редакцию 3 ноября 2006 г.