Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

2007, том 43, № 2

УДК 517.946 : 518.12 : 538.3 : 538.5

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ИМПУЛЬСНОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

М. И. Иванов[1], В. А. Катешов[1], И. А. Кремер[1], М. В. Урев[2]

[1]*ЗАО «Центр Ритм», г. Новосибирск*
E-mail: Kremer@aoritm.com
[2]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск*
E-mail: urev@nmsf.sscc.ru

Рассматриваются вопросы расчета нестационарных электромагнитных полей в трехмерных кусочно-однородных по проводимости средах. Используются потенциальные постановки задач во временной области. Предлагается подход к решению таких задач. Вычислительная устойчивость этого метода на поздних временах проверена на модельном примере.

Введение. В представленной работе исследуются вопросы моделирования трехмерных квазистационарных электромагнитных полей, возникающих в электроразведке при применении метода становления. Рассматривается случай полного отключения источника, в качестве которого взята горизонтальная электрическая линия (ГЭЛ). По характеру становления полей судят об электрических параметрах сред.

Предлагаемая работа является логическим продолжением исследований, проведенных в [1]. Совместное использование скалярного магнитного потенциала в непроводящих средах и векторного магнитного потенциала в проводящих средах рассмотрено в [2]. В данной работе развивается такой подход для случая, когда электрическое поле содержит потенциальную часть. Интегрирование по времени системы уравнений в проводящих средах производится по схеме Кранка – Николсона. Изменение скалярного магнитного потенциала во времени обусловлено только нестационарными процессами в проводящих средах. Эта связь выражается в явном виде как следствие непрерывности касательных компонент и скачка нормальных компонент напряженности магнитного поля на границах проводящих и непроводящих сред. Скалярный магнитный потенциал вычисляется на половинных временных шагах, а векторный потенциал – на целых временных шагах. По сравнению с [2] такая организация вычислительного процесса приводит к последовательному решению задач меньшей размерности с симметричными операторами. Решение скалярных уравнений осуществляется методом скалярных конечных элементов второго порядка, а векторных уравнений – методом векторных конечных элементов Неделека первого порядка второго типа [3, 4]. Векторные нестационарные вариационные постановки задач включают множители Лагранжа, регулирующие дивергентные свойства искомых векторных величин и обеспечивающие устойчивость счета на поздних временах.

Целью данной работы является численное исследование вопросов устойчивости предложенной вычислительной схемы на модельном примере. Используются известные функциональные пространства $H^1(\Omega)$, $\mathbf{H}(\mathrm{rot}, \Omega)$ и их подпространства из [5].

Постановка задачи. Описание структуры расчетной области Ω и сопутствующие обозначения приведены в [1] при постановке стационарной задачи. Для нестационарных источников полей, описываемых плотностью стороннего тока $\mathbf{j}^{\text{ст}}$, рассматривается система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0}; \quad \mathrm{div}(\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}}) = 0; \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E}^0 = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}}; \quad \mathrm{div}\,\mu \mathbf{H} = 0. \tag{2}$$

На границах раздела сред $S^{k,l}$ выполняются условия сопряжения

$$\mathbf{E}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{E}^l \times \mathbf{n}_{k,l}; \quad \sigma_k \mathbf{E}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \sigma_l \mathbf{E}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l}, \tag{3}$$

$$\mathbf{H}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{H}^l \times \mathbf{n}_{k,l}; \quad \mu_k \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \mu_l \mathbf{H}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l}. \tag{4}$$

Считаем, что внешняя граница области Γ достаточно удалена от источников и на ней выполняются неоднородные условия

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_{\text{п}} \times \mathbf{n}; \qquad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{H}_{\text{п}} \cdot \mathbf{n}, \tag{5}$$

смысл которых будет уточнен далее. На поверхности земли $\Gamma_{\text{з}}$ условие сопряжения для нормальной компоненты электрического поля переходит в условие

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{1,0} = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим случай, когда источником является заземленная ГЭЛ, расположенная в подобласти Ω_1 на прямой, параллельной оси OX. Диаметр сечения линии существенно меньше размеров рассматриваемой области. Пусть концы линии размещены в точках $\mathbf{A}, \mathbf{B}$: $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}})$, $\mathbf{B} = (x_{\mathbf{B}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}})$. В начальный момент времени по линии из точки $\mathbf{A}$ в точку $\mathbf{B}$ течет постоянный ток $I^{\text{ст}}$, который поддерживается внешней ЭДС. Затем ЭДС отключается. Плотность стороннего тока ГЭЛ выражается в виде

$$\mathbf{j}^{\text{ст}} = (j_x, 0, 0), \quad j_x = I^{\text{ст}}(1 - \theta(t))(\theta(x - x_{\mathbf{A}}) - \theta(x - x_{\mathbf{B}}))\delta(y - y_{\mathbf{A}})\delta(z - z_{\mathbf{A}}),$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, а $\delta(t)$ – функция Дирака.

Далее будем полагать, что $\mu_k = \mu_0 = \mu = \text{const}$. Решение задачи содержит сингулярность, связанную с особенностью в источнике

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{ст}} = I^{\text{ст}} (1 - \theta(t)) (\delta(x - x_{\mathbf{A}}) - \delta(x - x_{\mathbf{B}})) \delta(y - y_{\mathbf{A}}) \delta(z - z_{\mathbf{A}}),$$

поэтому представим искомые поля в виде суммы первичных и аномальных полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{п}} + \mathbf{E}_{\text{а}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{п}} + \mathbf{H}_{\text{а}}.$$

Первичные поля удовлетворяют следующей краевой задаче, сформулированной для проводящего однородного полупространства $z < 0$ с проводимостью σ_1 и непроводящего полупространства $z > 0$:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{п}} + \mu \dfrac{\partial \mathbf{H}_{\text{п}}}{\partial t} = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mu \mathbf{H}_{\text{п}} = 0 \end{cases} \quad \text{в } R^3, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\text{п}} = \sigma_1 \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}}, \\ \operatorname{div} (\sigma_1 \mathbf{E}_{\text{п}} + \mathbf{j}^{\text{ст}}) = 0 \end{cases} \quad \text{при } z < 0, \tag{8}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\text{п}} = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{п}} = 0 \end{cases} \quad \text{при } z > 0. \tag{9}$$

На поверхности земли $z = 0$ выполняются условия непрерывности касательных компонент первичных полей. Непрерывна и нормальная компонента первичного магнитного поля. Для нормальной компоненты первичного электрического поля выполнено

$$\mathbf{E}_{\text{п}} \cdot \mathbf{n}_{1,0} = 0 \quad \text{при } z = 0. \tag{10}$$

На бесконечности

$$\mathbf{E}_{\text{п}} \to \mathbf{0}; \quad \mathbf{H}_{\text{п}} \to \mathbf{0}. \tag{11}$$

Задача (7)–(11) дополняется значениями первичных полей в начальный момент времени [1]. Ее решение, основанное на классическом решении задачи теплопроводности [6], получается в аналитическом виде в терминах интегралов от функций Бесселя. Далее будем предполагать, что первичные поля заданы как векторные функции, определенные в каждой точке пространства в каждый момент времени. Значения $\mathbf{E}_{\text{п}}$ и $\mathbf{H}_{\text{п}}$ на границе Γ определяют условия (5) для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на этой границе. Наличие аномальных полей вызвано неоднородностью проводящих сред $\Omega^c := \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$.

Сформулируем задачу для аномальных полей. Будем рассматривать отдельно воздух Ω_0 и проводящие среды Ω^c. Задача формулируется в ограниченной области Ω, как и исходная задача:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_\text{а} + \mu\frac{\partial \mathbf{H}_\text{а}}{\partial t} = \mathbf{0}; \quad \operatorname{div}\sigma\mathbf{E}_\text{а} = 0 \quad \text{в } \Omega^c, \tag{12}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_\text{а} = \sigma\mathbf{E}_\text{а} + (\sigma - \sigma_1)\mathbf{E}_\text{п} \quad \text{в } \Omega^c, \tag{13}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_\text{а} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega_0, \tag{14}$$

$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{15}$$

На границах раздела сред $S^{k,l}$ выполняются следующие условия сопряжения:

$$\mathbf{E}_\text{а}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{E}_\text{а}^l \times \mathbf{n}_{k,l}, \tag{16}$$

$$\sigma_k\mathbf{E}_\text{а}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} - \sigma_l\mathbf{E}_\text{а}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} = (\sigma_l - \sigma_k)\mathbf{E}_\text{п} \cdot \mathbf{n}_{k,l}, \tag{17}$$

$$\mathbf{H}_\text{а}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{H}_\text{а}^l \times \mathbf{n}_{k,l}; \quad \mathbf{H}_\text{а}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{H}_\text{а}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l}. \tag{18}$$

На поверхности земли $\Gamma_\text{з}$ в силу (10) условие сопряжения (17) переходит в условие

$$\sigma_1\mathbf{E}_\text{а} \cdot \mathbf{n}_{1,0} = 0. \tag{19}$$

На внешней границе области Γ выполняются условия

$$\mathbf{E}_\text{а} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{H}_\text{а} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{20}$$

Система (12)–(20) дополняется начальными условиями [1]:

$$\mathbf{E}_\text{а}\big|_{t=0} = \mathbf{E}_\text{а}^0; \quad \mathbf{H}_\text{а}\big|_{t=0} = \mathbf{H}_\text{а}^0. \tag{21}$$

Вариационные формулировки задач для аномальных полей в терминах потенциалов. Аналогично [1] для описания аномальных полей вводится скалярный магнитный потенциал Φ в Ω_0 и векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}$ в проводящих средах Ω^c с калибровочным условием:

$$\mathbf{H}_\text{а} = \begin{cases} -\nabla\Phi & \text{в } \Omega_0, \\ (1/\mu)\operatorname{rot}\mathbf{A}, \ \operatorname{div}\sigma\mathbf{A} = 0 & \text{в } \Omega^c. \end{cases}$$

В этом случае напряженность аномального электрического поля $\mathbf{E}_\text{а}$ в подобласти Ω^c может быть представлена в виде $\mathbf{E}_\text{а} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla U$. Перепишем уравнения (12)–(21) в терминах потенциалов:

$$-\operatorname{div}\mu\nabla\Phi = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \tag{22}$$

$$\Phi = 0 \quad \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}_0, \tag{23}$$

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla U = (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_{\text{п}} \quad \text{в } \Omega^c, \tag{24}$$

$$\operatorname{div} \sigma \mathbf{A} = 0 \quad \text{в } \Omega^c, \tag{25}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}^c. \tag{26}$$

Условия сопряжения на границах раздела сред имеют следующий вид:

$$-\mu \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_{1,0} = \operatorname{rot} \mathbf{A}^1 \cdot \mathbf{n}_{1,0} \quad \text{на } \Gamma_{\text{з}}, \tag{27}$$

$$-\nabla \Phi \times \mathbf{n}_{1,0} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}^1 \times \mathbf{n}_{1,0} \quad \text{на } \Gamma_{\text{з}}, \tag{28}$$

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}^l \times \mathbf{n}_{k,l} \quad \text{на } S^{k,l}, \tag{29}$$

$$\sigma_k \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \sigma_l \mathbf{A}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} \quad \text{на } S^{k,l}. \tag{30}$$

Приведем условия сопряжения для потенциала U на границах раздела сред $S^{k,l}$. Возьмем дивергенцию от (24) и рассмотрим результат ее применения на поверхностях $S^{k,l}$. Используя выражение $\mathbf{E}_{\text{а}}$ через потенциалы и соотношения (17), (30), получим

$$\sigma_k \nabla U^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} - \sigma_l \nabla U^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} = (\sigma_k - \sigma_l) \mathbf{E}_{\text{п}} \cdot \mathbf{n}_{k,l}. \tag{31}$$

На поверхности земли $\Gamma_{\text{з}}$ условие (31) переходит в

$$\sigma_1 \nabla U^1 \cdot \mathbf{n}_{1,0} = 0. \tag{32}$$

Из системы (24)–(32) можно получить замкнутую формулировку задачи для электрического потенциала U:

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla U) = 0 \quad \text{в } \Omega^c, \tag{33}$$

$$\sigma_1 \nabla U^1 \cdot \mathbf{n}_{1,0} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{\text{з}}, \tag{34}$$

$$\sigma_k \nabla U^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} - \sigma_l \nabla U^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} = (\sigma_k - \sigma_l) \mathbf{E}_{\text{п}} \cdot \mathbf{n}_{k,l} \quad \text{на } S^{k,l}, \tag{35}$$

$$U = 0 \quad \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}^c. \tag{36}$$

Электрический потенциал U может быть вычислен в каждый момент времени и зависит только от текущих значений первичного электрического поля

$\mathbf{E}_{\text{п}}$ на границах раздела проводящих сред $S^{k,l}$. В уравнении (24) слагаемое с потенциалом перенесем в правую часть и введем множители Лагранжа P:

$$\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}+\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\sigma\nabla P=(\sigma-\sigma_1)\mathbf{E}_{\text{п}}-\sigma\nabla U \quad \text{в } \Omega^c. \tag{37}$$

Дополним задачу краевыми условиями

$$\nabla P\cdot\mathbf{n}_{1,0}=0 \quad \text{на } \Gamma_{\text{з}}, \tag{38}$$

$$P=0 \quad \text{на } \Gamma\cap\overline{\Omega}^c. \tag{39}$$

Будем считать, что начальные данные известны [1]:

$$\mathbf{A}\big|_{t=0}=\mathbf{A}^0, \qquad \Phi\big|_{t=0}=\Phi^0.$$

Сформулируем обобщенные задачи. Задача для магнитного скалярного потенциала Φ решается с использованием подпространства функций $H_\Phi\subset H^1(\Omega_0)$ с нулевым следом на границе $\Gamma\cap\overline{\Omega}_0$. Для векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}$ вводится подпространство функций $\mathbf{H}_{\mathbf{A}}\subset\mathbf{H}(\operatorname{rot},\Omega^c)$ с нулевым касательным следом на границе $\Gamma\cap\overline{\Omega}^c$. Для множителя Лагранжа и скалярного электрического потенциала вводится подпространство $H_U\subset$ $\subset H^1(\Omega^c)$ с нулевым следом на границе $\Gamma\cap\overline{\Omega}^c$. Сначала сформулируем обобщенную задачу, соответствующую задаче (33)–(36) для скалярного потенциала U.

Требуется найти функцию $U\in C^0((0,T);H_U)$ такую, что $\forall t\in(0,T)$ и $\forall V\in H_U$ выполнено

$$\int_{\Omega^c}\sigma\nabla U\cdot\nabla V d\Omega=\sum_{k,\,l\neq 1,\,0}\ \int_{S^{k,l}}V(\sigma_k-\sigma_l)\mathbf{E}_{\text{п}}\cdot\mathbf{n}_{k,l}\,dS. \tag{40}$$

Далее сформулируем задачи для магнитных потенциалов и множителя Лагранжа, соответствующие задачам (25)–(30), (37)–(39), при этом считаем, что скалярный электрический потенциал U есть известная функция, определенная из (40).

Требуется найти функции $\Phi\in C^0((0,T);H_\Phi)$, $(\mathbf{A},P)\in C^1((0,T);\mathbf{H}_{\mathbf{A}})\times$ $\times C^0((0,T);H_U)$ такие, что $\forall t\in(0,T)$ и $\forall W\in H_\Phi$, $\forall(\mathbf{B},V)\in\mathbf{H}_{\mathbf{A}}\times H_U$ выполнены

$$\int_{\Omega_0}\mu\nabla\Phi\cdot\nabla W d\Omega=-\int_{\Gamma_{\text{з}}}W\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}_{1,0}\,dS,$$

$$\int_{\Omega^c}\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}d\Omega+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega^c}\sigma\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}d\Omega-\int_{\Omega^c}\sigma\nabla P\cdot\mathbf{B}d\Omega=$$

$$=\int_{\Omega^c}(\sigma-\sigma_1)\mathbf{E}_{\text{п}}\cdot\mathbf{B}d\Omega-\int_{\Omega^c}\sigma\nabla U\cdot\mathbf{B}d\Omega-\int_{\Gamma_{\text{з}}}\nabla\Phi\times\mathbf{n}_{1,0}\cdot\mathbf{B}dS,$$

$$-\int_{\Omega^c} \sigma \mathbf{A} \cdot \nabla V d\Omega = 0.$$

Здесь во втором уравнении интегралом по границе $\Gamma_з$ обозначено отношение двойственности между пространством тангенциальных следов функций из $\mathbf{H}_\mathbf{A}$ и его сопряженным пространством. Если достаточно гладкие функции $\Phi, \mathbf{A}, P$ являются решением вариационных уравнений приведенной системы, то, используя формулы Грина, можно показать, что эти функции удовлетворяют дифференциальным задачам (25)–(30), (37)–(39). Для похожей задачи такая процедура подробно проделана, например, в [2].

Численная реализация. Пусть имеется регулярное семейство T^h триангуляций области Ω, для которого выполнено условие квазиравномерности. Обозначим через S_h и F_h пространства конечных элементов второго порядка, конформных в пространствах $H^1(\Omega^c)$ и $H^1(\Omega_0)$, а через $\mathbf{V}_h$ пространство элементов Неделека первого порядка второго типа, конформных в пространстве $\mathbf{H}(\mathrm{rot}, \Omega^c)$. Степени свободы функций из пространств S_h и F_h связаны со значениями функций в узлах и серединах ребер триангуляции, а степени свободы функций из пространства $\mathbf{V}_h$ – с моментами векторных функций на ребрах триангуляции. Введем пространства $Q_h = F_h \cap H_\Phi$, $\mathbf{X}_h = \mathbf{V}_h \cap \mathbf{H}_\mathbf{A}$ и $Y_h = S_h \cap H_U$. Можно сформулировать следующие конечномерные по пространственным переменным аналоги проекционных задач для аномальных полей.

Требуется найти функцию $U_h \in C^0((0,T); Y_h)$ такую, что $\forall t \in (0,T)$ и $\forall V_h \in Y_h$ выполнено

$$\int_{\Omega^c} \sigma \nabla U_h \cdot \nabla V_h d\Omega = \sum_{k,\, l \neq 1,\, 0} \int_{S^{k,l}} V_h (\sigma_k - \sigma_l) \mathbf{E}_п \cdot \mathbf{n}_{k,\, l}\, dS.$$

Требуется найти функции $\Phi_h \in C^0((0,T); Q_h)$, $(\mathbf{A}_h, P_h) \in C^1((0,T); \mathbf{X}_h) \times C^0((0,T); Y_h)$ такие, что $\forall t \in (0,T)$, $\forall W_h \in Q_h$ и $\forall (\mathbf{B}_h, V_h) \in \mathbf{X}_h \times Y_h$ выполнены

$$\int_{\Omega_0} \mu \nabla \Phi_h \cdot \nabla W_h d\Omega = -\int_{\Gamma_з} W_h \,\mathrm{rot}\, \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{n}_{1,\,0}\, dS,$$

$$\int_{\Omega^c} \frac{1}{\mu} \mathrm{rot} \mathbf{A}_h \cdot \mathrm{rot} \mathbf{B}_h d\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega^c} \sigma \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{B}_h d\Omega - \int_{\Omega^c} \sigma \nabla P_h \cdot \mathbf{B}_h d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega^c} (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_п \cdot \mathbf{B}_h d\Omega - \int_{\Omega^c} \sigma \nabla U_h \cdot \mathbf{B}_h d\Omega - \int_{\Gamma_з} \nabla \Phi_h \times \mathbf{n}_{1,\,0} \cdot \mathbf{B}\, dS,$$

$$-\int_{\Omega^c} \sigma \mathbf{A}_h \cdot \nabla V_h d\Omega = 0.$$

Перейдем к формулировке системы линейных алгебраических уравнений. Для этого введем базисы пространств Q_h, $\mathbf{X}_h$ и Y_h:

$$Q_h = \mathrm{span}\{\varphi_k,\ k = \overline{1, N_Q}\}; \qquad \mathbf{X}_h = \mathrm{span}\{\mathbf{N}_i,\ i = \overline{1, N_\mathbf{X}}\};$$

$$Y_h = \text{span}\{\psi_k,\ k = \overline{1, N_Y}\}.$$

Искомые функции $U_h \in C^0((0, T); Y_h)$, $\Phi_h \in C^0((0,T); Q_h)$, $\mathbf{A}_h \in C^1((0,T); \mathbf{X}_h)$, $P_h \in C^0((0,T); Y_h)$ могут быть представлены в виде

$$U_h = \sum_{l=1}^{N_Y} u_l \psi_l, \quad \Phi_h = \sum_{k=1}^{N_Q} f_k \varphi_k, \quad \mathbf{A}_h = \sum_{j=1}^{N_\mathbf{X}} a_j \mathbf{N}_j, \quad P_h = \sum_{l=1}^{N_Y} p_l \psi_l.$$

Конечномерные проекционные задачи записываются относительно неизвестных коэффициентов разложения, зависящих от времени:

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{G}(\mathbf{A}), \quad \boldsymbol{L}\mathbf{U} = \mathbf{E},$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\mathbf{A} + \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{M}\,\mathbf{A} - \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{U}), \\ -\boldsymbol{B}\mathbf{A} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Здесь использовались следующие матрично-векторные обозначения:

$$\mathbf{U} = \{u_l,\ l = \overline{1, N_Y}\}^T; \quad \boldsymbol{\Phi} = \{f_k,\ k = \overline{1, N_Q}\}^T;$$

$$\mathbf{A} = \{a_j,\ j = \overline{1, N_\mathbf{X}}\}^T; \quad \mathbf{P} = \{p_l,\ l = \overline{1, N_Y}\}^T;$$

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \int_{\Omega^c} (1/\mu)\,\text{rot}\,\mathbf{N}_i \cdot \text{rot}\,\mathbf{N}_j \, d\Omega,\ i, j = \overline{1, N_\mathbf{X}} \right\};$$

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \int_{\Omega^c} \sigma \nabla \psi_k \cdot \mathbf{N}_i \, d\Omega,\ k = \overline{1, N_Y},\ i = \overline{1, N_\mathbf{X}} \right\};$$

$$\boldsymbol{M} = \left\{ \int_{\Omega^c} \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \, d\mathbf{x},\ i, j = \overline{1, N_\mathbf{X}} \right\}; \quad \boldsymbol{C} = \left\{ \int_{\Omega_0} \mu \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega,\ k, i = \overline{1, N_Q} \right\};$$

$$\boldsymbol{L} = \left\{ \int_{\Omega^c} \sigma \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_i \, d\Omega,\ k, i = \overline{1, N_Y} \right\};$$

$$\mathbf{E} = \left\{ \sum_{k,\, l \neq 1,\, 0} \int_{S^{k,l}} \psi_i (\sigma_k - \sigma_l) \mathbf{E}_\text{п} \cdot \mathbf{n}_{k,l} \, dS,\ i = \overline{1, N_Y} \right\}^T;$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{U}) = \left\{ \int_{\Omega^c} (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_\text{п} \cdot \mathbf{N}_i \, d\Omega - \sum_{l=1}^{N_Y} u_l \int_{\Omega^c} \sigma \nabla \psi_l \cdot \mathbf{N}_i \, d\Omega - \right.$$

$$-\sum_{k=1}^{N_Q} f_k \int_{\Gamma_3} \nabla\varphi_k \times \mathbf{n}_{1,0} \cdot \mathbf{N}_i \, dS, \; i=\overline{1, N_{\mathbf{X}}} \Bigg\}^T;$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \left\{ -\sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} a_j \int_{\Gamma_3} \varphi_k \operatorname{rot} \mathbf{N}_j \cdot \mathbf{n}_{1,0} \, dS, \; k=\overline{1, N_Q} \right\}^T.$$

Введем временную сетку $\{t_n, \; n=0,\ldots\}$. Допускаем, что сетка может быть неравномерной. Обозначим шаги $\tau_n = t_n - t_{n-1}, \; n=1,\ldots,$ и середины интервалов $t_{n-1/2} = (t_n + t_{n-1})/2, \; n=1,\ldots.$ Верхние индексы искомых векторов $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{\Phi}^{n-1/2}$ соответствуют номеру шага по времени. Предполагаем, что векторы $\mathbf{A}^0$ и $\mathbf{\Phi}^0$ заданы из начальных условий. Скалярный магнитный потенциал $\mathbf{\Phi}^{1/2}$ в непроводящей среде можно вычислить по следующей схеме:

$$\boldsymbol{L}\mathbf{U}^0 = \mathbf{E}^0,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\dfrac{\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^0}{2} + \boldsymbol{M}\dfrac{\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^0}{\tau_1} - \boldsymbol{B}^T \mathbf{P}^{1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}^0, \mathbf{U}^0), \\ -\boldsymbol{B}\mathbf{A}^1 = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{C}\mathbf{\Phi}^1 = \mathbf{G}(\mathbf{A}^1), \quad \mathbf{\Phi}^{1/2} = \frac{\mathbf{\Phi}^1 + \mathbf{\Phi}^0}{2}.$$

Далее используется регулярная схема Кранка – Николсона, начиная с шага $n=1,\ldots$:

$$\boldsymbol{L}\mathbf{U}^{n-1/2} = \mathbf{E}^{n-1/2},$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\dfrac{\mathbf{A}^n + \mathbf{A}^{n-1}}{2} + \boldsymbol{M}\dfrac{\mathbf{A}^n - \mathbf{A}^{n-1}}{\tau_n} - \boldsymbol{B}^T \mathbf{P}^{n-1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}^{n-1/2}, \mathbf{U}^{n-1/2}), \\ -\boldsymbol{B}\mathbf{A}^n = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{C}(\alpha_n \mathbf{\Phi}^{n+1/2} + \beta_n \mathbf{\Phi}^{n-1/2}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}^n).$$

Здесь коэффициенты зависят от шагов времени:

$$\alpha_n = \tau_n / (\tau_n + \tau_{n+1}); \quad \beta_n = 1 - \alpha_n.$$

Таким образом, при переходе от шага $n-1$ к шагу n решаются две скалярные системы уравнений для электрического потенциала в проводящей среде и скалярного магнитного потенциала в воздухе. Из системы уравнений с седловой точкой определяются векторный магнитный потенциал и множитель Лагранжа в проводящей среде. Решение скалярных систем уравнений осуществляется предобусловленным методом сопряженных градиентов. Система уравнений с седловой точкой решается итерационным методом, предложенным в работе [7]. Критерием останова итерационных методов служит отношение сферической нормы вектора невязки к сферической норме вектора правой части.

Пример численного расчета. Основные вычислительные усилия направлены на нахождение векторного магнитного потенциала и множителя Лагранжа в проводящей среде. Приведем пример, характеризующий чувствительность алгоритма к наличию неоднородностей в проводящей среде. Для этого рассмотрим область, составленную из двух горизонтальных проводящих слоев с проводимостями $\sigma_1 = 3{,}2$ См/м и $\sigma_2 = 0{,}5$ См/м. Высота каждого слоя равна 3000 м. Нижняя среда имеет включение в виде параллелепипеда размером $250 \times 1000 \times 500$ м с контрастной проводимостью $\sigma_3 = 0{,}01$ См/м. Горизонтальные размеры слоев составляют 6000×6000 м. Общие размеры расчетной области выбраны таким образом, чтобы ошибки в условиях на внешних границах оказывали минимальное влияние на анализ полей внутри области. Источник находится в верхней среде, выше второго слоя на 500 м. Длина электрической линии 500 м. В начальный момент времени ток источника $I^{\text{ст}} = 50$ А. Триангуляция расчетной области содержит 70000 ребер и 10000 вершин. Решение систем уравнений итерационными методами на каждом временном шаге осуществляется при $\varepsilon = 10^{-10}$. Используется неравномерная сетка по времени. Общий временной интервал интегрирования системы уравнений $T = 100$ с, общее количество временных шагов 200. Измерения электрического поля производятся на границе двух проводящих слоев, т. е. в вертикальной плоскости источника на расстоянии 1000 м от проекции центра электрической линии на границу раздела сред. Y-компонента электрического поля в момент времени $T = 10$ с изображена на рис. 1.

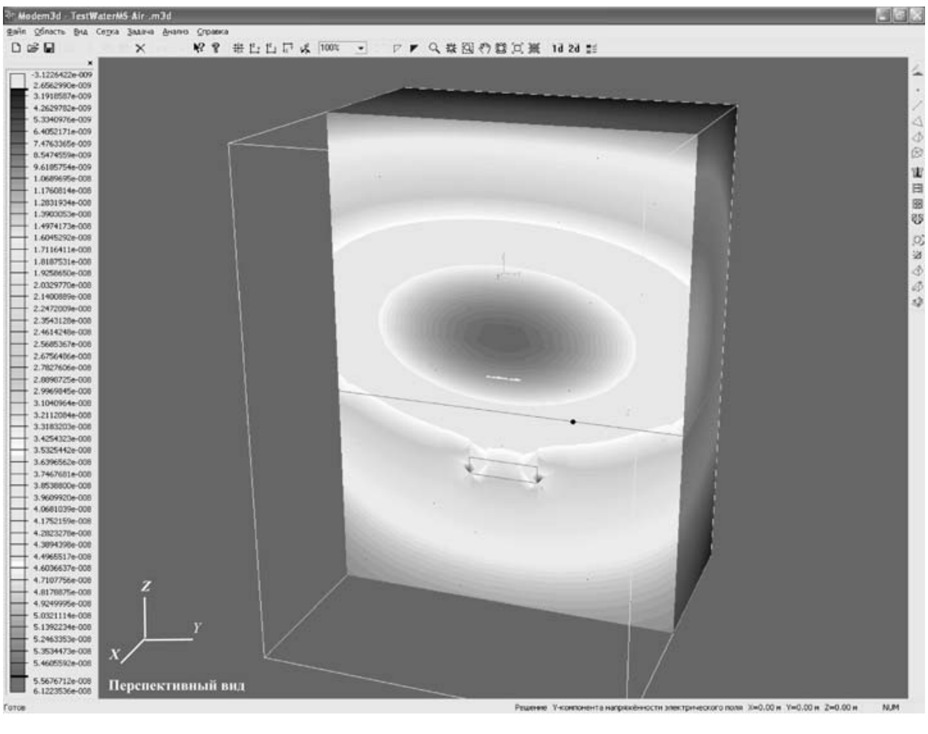

Рис. 1

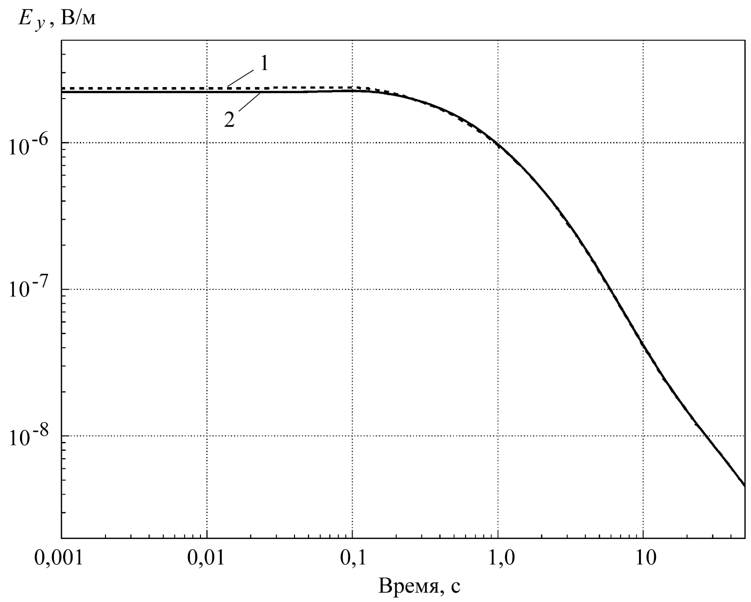

Рис. 2

Область представлена в разрезе вертикальной плоскостью, проходящей через источник. На рисунке различные оттенки соответствуют различным значениям *Y*-компоненты электрического поля, что показано в левой части. Сплошные линии – границы раздела проводящих сред. Источник изображен отрезком белого цвета, приемник – черной точкой на границе раздела сред. Ориентация координатных осей приведена в левой нижней части рисунка. Нарушение однородности электрического поля происходит на границе подобласти с контрастной проводимостью. Зависимости *Y*-компонент электрического поля от времени в точке измерения представлены на рис. 2 (сплошная линия). Пунктирная линия соответствует случаю включения без контраста: $\sigma_3 = \sigma_2$. В начальный период времени уровень сигнала в точке измерения почти не меняется и относительная разность между кривыми составляет около 6,5 %. Далее уровень сигнала падает. В момент времени $T = 85$ с происходит падение уровня сигнала на три порядка.

Заключение. Введение нестандартного калибровочного условия для векторного магнитного потенциала позволило выделить из общей системы уравнений задачу для скалярного электрического потенциала. Основной особенностью предложенного подхода является включение в постановку задачи множителей Лагранжа, что дало возможность удовлетворить как дивергентное свойство векторного потенциала на каждом временном шаге, так и обеспечить устойчивость счета на поздних временах (см. рис. 2). Заметим, что в рамках предложенного подхода класс источников полей может быть расширен. Это обусловлено возможностью аналитического задания поля источника в однородном полупространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов М. И., Катешов В. А., Кремер И. А., Урев М. В.** Решение трехмерных стационарных задач импульсной электроразведки // Автометрия. 2007. **43**, № 2. С. 22.

2. **Соловейчик Ю. Г., Рояк М. Э.** Совместное использование узловых и векторных конечных элементов для расчета трехмерных нестационарных электромагнитных полей // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. **7**, № 3. С. 132.

3. **Nedelec J. C.** Mixed finite elements in R^3 // Numer. Math. 1980. **35**. P. 315.

4. **Nedelec J. C.** A new family of mixed finite elements in R^3 // Numer. Math. 1986. **50**. P. 57.

5. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

6. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

7. **Greif C., Schotzau D.** Preconditioners for the discretized time-harmonic Maxwell equations in mixed form // http://www.cs.ubc.ca/~greif/Papers/gs2006NLAA.pdf

Поступила в редакцию 3 ноября 2006 г.