РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2007, том 43, № 2

УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СУШКИ СЛОЯ ТРАВЫ

И. А. Шмаков

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: i_shmakov@ngs.ru

Рассмотрен метод конечных объемов для численного решения одномерной горизонтальной нестационарной задачи сушки однородного слоя скошенной травы в декартовой системе координат. Проведены дискретизация временной переменной по параметрической схеме и решение нелинейной алгебраической системы итерационным методом нижней релаксации. Представлены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие сходимость второго порядка данного метода.

Введение. Физико-математическая модель процесса сушки слоя травы и постановка задачи описаны в [1, 2]. Целью данной работы является численное решение одномерной задачи математической физики сушки слоя скошенной травы (СТ) в безразмерной постановке. Делаются следующие допущения:

– конвективный теплообмен между слоем СТ и приземным слоем атмосферы удовлетворительно описывается с помощью граничных условий третьего рода с использованием известных коэффициентов конвективного теплообмена;

– давление P, температура T и плотность ρ газовой фазы в слое СТ совпадают с соответствующими метеорологическими данными (P_e, T_e и ρ_e) для данного момента времени и данной местности;

– излучение в слое СТ подчиняется закону Бугера – Ламберта;

– испарение связанной воды и капелек воды, прилипших к элементам СТ, описывается одним и тем же законом Герца – Кнудсена.

Кроме того, использовано допущение о том, что на каждом участке имеется относительно однородный по своим механическим и физическим свойствам напочвенный покров СТ. В работе [2] показано, что такая упрощенная модель дает приемлемую точность.

Постановка задачи. Безразмерная система уравнений, описывающая процесс сушки травы, при перечисленных выше допущениях имеет вид

$$(1+a\varphi_2)\frac{\partial\theta_s}{\partial t}=\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\pi_\lambda\varphi_2)\frac{\partial\theta_s}{\partial x}\right]-\overline{\alpha}_\nu(\theta_s-\theta_e)+$$

$$+[L-G(1+\beta\theta_s)^4](1-\varphi_{sw})\exp[\bar{k}_1(x-1)]-\frac{\varphi_2}{\sqrt{1+\beta\theta_s}}\left[\exp\left(\frac{\theta_s}{1+\theta_s}\right)-\pi_e\right]; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=-\frac{\gamma\varphi_2}{\sqrt{1+\beta\theta_s}}\left[\exp\left(\frac{\theta_s}{1+\theta_s}\right)-\pi_e\right], \quad 0\le x\le 1,\ 0<t\le T<\infty.$$

Граничные условия записываются в следующем виде:

$$-(1+\pi_\lambda\varphi_{2w})\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial x}\right|_{x=1}=\mathrm{Bi}(\theta_{sw}-\theta_e)+\frac{b\varphi_{2w}\,[\exp(\theta_{sw}/(1+\theta_{sw}))+\pi_{ew}]}{\sqrt{1+\beta\theta_{sw}}}-$$

$$-(\varphi_{1H}+\varphi_{2w})[c-d(1+\beta\theta_{sw})^4] \quad \text{при } x=1; \tag{2}$$

$$(1+\pi_\lambda\varphi_{20})\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial x}\right|_{x=0}=$$

$$=\mathrm{Bi}_0(\theta_{s0}-\theta_0)+(1-\varphi_{1H}-\varphi_{20})[c_0-d_0(1+\beta\theta_s)^4] \text{ при } x=0.$$

(Индекс w приписывается параметрам состояния на поверхности скошенной травы.)

Предполагаются известными начальные данные $\theta_s\big|_{t=0}=0$, $\varphi_2\big|_{t=0}=$ $=\varphi_{2H}$. Используются следующие безразмерные величины: искомые функции $\theta_s(x,t)$, $\varphi_2(x,t)$ – температура и влажность напочвенного слоя травы соответственно (координата x направлена нормально к поверхности земли); $\theta_e=\dfrac{(T_e-T_*)E}{RT_*^2}$ – температура атмосферы; $a=\dfrac{\rho_2 C_{p2}}{\rho_1 C_{p1}\varphi_{1H}}$ – величина, характеризующая объемную теплоемкость воды; $\pi_\lambda=\lambda_2/\lambda_1\varphi_{1H}$ – относительный коэффициент теплопроводности воды; $\delta^2=\dfrac{q_2 k'_{02}\rho_2 h^2 E}{\lambda_1\varphi_{1H}\sqrt{T_*}RT_*^2}\exp(-(E/RT_*))$ – критерий (аналог критерия Д. А. Франка-Каменецкого);

$$L=\frac{\rho_1 k_1\sqrt{T_*}\exp(E/RT_*)}{q_2\rho_2 k'_{02}}[(1-\mathrm{A})q_R(h)+J_w]\cos\alpha,$$

$$G=\frac{\rho_1 k_1\sqrt{T_*}\exp(E/RT_*)\varepsilon\sigma T_*^4}{q_2\rho_2 k'_{02}} \qquad (k'_{02}=k_{02}s);$$

$\pi_e=(P_{2e}/P_{02})\exp(E/RT_*)$ – парциальное давление паров воды; $\gamma=$ $=\dfrac{\rho_1\varphi_{1H}C_{p1}RT_*^2}{\rho_2 q_2 E}$ – критерий подобия, характеризующий скорость сушки;

$\beta = RT_*/E$ – начальная температура слоя; $c = \dfrac{Eh[(1-\mathrm{A})q_R(h) + J_w]\cos\alpha}{\lambda_1 \varphi_{1H} RT_*^2}$, $d = \dfrac{\varepsilon_s \sigma T_*^2 hE}{\lambda_1 \varphi_{1H} R}$, $b = \dfrac{q_2 E \rho_2 k'_{02} h}{\lambda_1 \varphi_{1H} RT_*^2 \sqrt{T_*}} \exp(-(E/RT_*))$ – величины, которые характеризуют приток лучистой энергии, коэффициент черноты слоя и тепловой эффект испарения воды соответственно; $\mathrm{Bi}_0 = (\alpha_0 h/\lambda_1 \varphi_{1H})$ и $\mathrm{Bi} = \alpha_e h/\lambda_1 \varphi_{1H}$ – критерии Био, характеризующие интенсивности конвективного теплообмена между слоем СТ и почвой и теплообмена между слоем СТ и приземным слоем атмосферы соответственно; $c_0 = c\exp(-\bar{k}_1)$, $d_0 = d\exp(-\bar{k}_1)$ – величины, которые характеризуют приток лучистой энергии и коэффициент черноты слоя СТ; $\bar{\alpha}_{\mathrm{v}} = \dfrac{\alpha_{\mathrm{v}} RT_*^2 \sqrt{T_*}}{q_2 k'_{02} \rho_2 E} \exp(E/RT_*)$, $\bar{k}_1 = k_1 \rho_1 h$ – значения объемного коэффициента теплообмена и коэффициента затухания излучения.

Перечисленные безразмерные величины составлены из следующих размерных величин: λ_s – коэффициент теплопроводности конденсированной фазы в слое СТ; T_* – температура почвы в начальный момент; T_e – температура атмосферы; α_e и α_0 – коэффициенты теплообмена на верхней и нижней границах слоя соответственно; $\alpha_{\mathrm{v}} = \alpha_e s$ – коэффициент объемного конвективного теплообмена; s – удельная поверхность макропор; $\rho_i, C_{pi}, \varphi_i$ – плотности, теплоемкости и объемные доли сухого органического вещества $(i = 1)$ и связанной с ним воды $(i = 2)$; φ_{1H} – начальное значение объемной доли сухого органического вещества; E – энергия активации, характеризующая испарение связанной воды; R – универсальная газовая постоянная; $\varphi_{sw} = \varphi_{1w} + \varphi_{2w}$ – объемные доли конденсированной фазы на верхней и нижней границах слоя СТ; q_2 – теплота испарения единицы массы воды; А – альбедо слоя растительных горючих материалов; P_{2e} – парциальное давление паров воды; $P_{2*} = P_{02}\exp(-(E/RT_s))$ – давление насыщенных паров; α – угол между горизонтальной плоскостью и подстилающей поверхностью; ε_s – коэффициент черноты слоя; σ – постоянная Стефана – Больцмана; J_w – плотность потока длинноволнового излучения на верхней границе слоя СТ; k_1 – коэффициент затухания излучения в слое растительных горючих материалов; $k_{02} = \mathrm{A} P_{02} V \sqrt{M}/\sqrt{2\pi R}$ – постоянная величина (A, P_{02} – постоянные множители, определяемые экспериментально, V – объем эффективного элемента, M – молекулярная масса воды).

Метод конечных объемов для одномерного случая. Запишем систему уравнений (1) в следующем виде:

$$M(\varphi_2)\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\varphi_2)\frac{\partial \theta_s}{\partial x}\right) + B(\varphi_2, \theta_s, x)\theta_s + f(x,t);$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -C(\theta_s)\varphi_2 + f_2(x,t), \quad 0 \le x \le 1, \; 0 < t \le T < \infty. \tag{3}$$

Предполагаются известными начальные данные $\theta_s(x,\ t=0)=s_0(x)$, $\varphi_2(x, t=0)=s_1(x)$ и граничные условия

$$\alpha_0\theta_s+\beta_0\frac{\partial\theta_s}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\gamma_0,\quad \alpha_1\theta_s+\beta_1\frac{\partial\theta_s}{\partial x}\bigg|_{x=1}=\gamma_1.$$

Перепишем первое уравнение из системы (3) в виде (смешанная постановка [3, 4])

$$\partial\nu/\partial x=-M(\partial\theta_s/\partial t)+B\theta_s+f, \tag{4}$$

$$\nu=-D(\partial\theta_s/\partial x). \tag{5}$$

Для аппроксимации (3) введем неравномерную сетку

$$\begin{aligned}&x_{i+1}=x_i+h_i;\quad x_0=r_c;\quad x_{I+1}=r_b,\ i=0,1,\ldots,I;\\ &t_{n+1}=t_n+\tau_n,\ n=0,1,\ldots\ .\end{aligned} \tag{6}$$

После интегрирования (4) и (5) по интервалам $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], [x_i, x_{i+1}]$ соответственно получим соотношения [5]

$$\nu_{i+1/2}-\nu_{i-1/2}=\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}g\,dx,\ \ g=-M(\partial\theta_s/\partial t)+B\theta_s+f, \tag{7}$$

$$(\theta_s)_i-(\theta_s)_{i+1}=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}(\nu/D)\,dx. \tag{8}$$

Используя кусочно-линейную интерполяцию функции g в (7), получим

$$\nu_{i+1/2}-\nu_{i-1/2}=[3(h_i+h_{i-1})g_i+h_{i-1}g_{i-1}+h_i g_{i+1}]/8+\psi_i,\ \psi_i=O(h^3). \tag{9}$$

Аппроксимируя интеграл в (8), будем иметь

$$(\theta_s)_i-(\theta_s)_{i+1}=\nu_{i+1/2}(h_i/D_{i+1/2})+\psi_{i+1/2},\quad \psi_{i+1/2}=O(h^3). \tag{10}$$

Отсюда можно найти поток

$$\nu_{i+1/2}=\frac{(\theta_s)_i-(\theta_s)_{i+1}}{h_i}D_{i+1/2}. \tag{11}$$

Записав подобное соотношение для $\nu_{i-1/2}$ и подставив его в (9), получим

$$\nu_{i+1/2}-\nu_{i-1/2}=(As^h)_i=-a_i s_{i-1}^h+b_i s_i^h-c_i s_{i+1}^h=f_i^h,\quad i=1,2,\ldots,I, \tag{12}$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i имеют следующий вид:

$$a_i=\frac{D_{i-1/2}}{h_{i-1}}+\frac{1}{8}B_{i-1}^k h_{i-1};\quad b_i=\frac{D_{i+1/2}}{h_i}+\frac{D_{i-1/2}}{h_{i-1}}-\frac{3}{8}(h_i+h_{i-1})B_i^k; \tag{13}$$

$$c_i = \frac{D_{i+1/2}}{h_i} + \frac{1}{8} B^k_{i+1} h_i .$$

Дискретизация по времени проводится в параметрической форме:

$$M^{n+1/2} \frac{\theta_s^{n+1} - \theta_s^n}{\tau_n} + A^h [\theta \theta_s^{n+1} + (1-\theta)\theta_s^n] = \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n;$$

$$\left(\frac{M^{n+1/2}}{\tau_n} I + \theta A^h \right) \theta_s^{n+1} = \left(\frac{M^{n+1/2}}{\tau_n} I - (1-\theta) A^h \right) \theta_s^n + \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n, \tag{14}$$

где параметр $0 < \theta < 1$.

Аналогично для второго уравнения системы (3) будем иметь

$$\frac{\varphi_2^{n+1} - \varphi_2^n}{\tau_n} + [\theta C^{n+1}(\theta_s)\varphi_2^{n+1} + (1-\theta) C^n(\theta_s)\varphi_2^n] = \theta f_2^{n+1} + (1-\theta) f_2^n;$$

$$\left(\frac{1}{\tau_n} I + \theta C^{n+1}(\theta_s) \right) \varphi_2^{n+1} = \left(\frac{1}{\tau_n} I - (1-\theta) C^n(\theta_s) \right) \varphi_2^n + \theta f_2^{n+1} + (1-\theta) f_2^n. \tag{15}$$

Граничные условия на поток учитываются добавлением в правую часть значения потока на границе.

На каждом шаге по времени осуществляется итерационный процесс

$$\theta_s^{n+1,k+1} = B^{-1}(\theta_s^{n+1,k}, \varphi_2^{n+1,k}, \varphi_2^n) g^n; \quad \varphi_2^{n+1,k+1} = K^{-1}(\theta_s^{n+1,k+1}) g_2^n, \tag{16}$$

где матрица B, вектор g^n, функция g_2^n и K определяются следующим образом:

$$B(\theta_s^{n+1,k}, \varphi_2^{n+1,k}, \varphi_2^n) = (M^{n+1/2} / \tau_n) I + \theta A^{n+1,k+1},$$

$$g^n = ((M^{n+1/2} / \tau_n) I - (1-\theta) A^n) \theta_s^n + \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n,$$

$$g_2^n = ((1/\tau_n) I - (1-\theta) C^n(\theta_s)) \varphi_2^n + \theta f_2^{n+1} + (1-\theta) f_2^n,$$

$$K = (1/\tau_n) I + \theta C^{n+1,k+1}(\theta_s).$$

Матрица B является трехдиагональной и обращается методом прогонки. Итерационный процесс останавливается при условии

$$\max\{|\varphi_2^{n+1,k+1} - \varphi_2^{n+1,k}|, \ |\theta_s^{n+1,k+1} - \theta_s^{n+1,k}|\} \le \varepsilon.$$

Численный эксперимент. В качестве тестовой задачи решалась система уравнений

$$M(\varphi_2) \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\varphi_2) \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) + B(\varphi_2, \theta_s, x) \theta_s + f(x, t),$$

Таблица 1

N_h	τ			
	0,02	0,01	0,005	0,0025
8	$1{,}24 \cdot 10^{-3}$	$1{,}17 \cdot 10^{-3}$	$1{,}15 \cdot 10^{-3}$	$1{,}14 \cdot 10^{-3}$
16	$3{,}81 \cdot 10^{-4}$	$3{,}10 \cdot 10^{-4}$	$2{,}93 \cdot 10^{-4}$	$2{,}88 \cdot 10^{-4}$
32	$1{,}66 \cdot 10^{-4}$	$9{,}54 \cdot 10^{-5}$	$7{,}77 \cdot 10^{-5}$	$7{,}33 \cdot 10^{-5}$
64	$1{,}13 \cdot 10^{-4}$	$4{,}16 \cdot 10^{-5}$	$2{,}38 \cdot 10^{-5}$	$1{,}94 \cdot 10^{-5}$
128	$9{,}92 \cdot 10^{-5}$	$2{,}82 \cdot 10^{-5}$	$1{,}04 \cdot 10^{-5}$	$5{,}96 \cdot 10^{-6}$
256	$9{,}59 \cdot 10^{-5}$	$2{,}48 \cdot 10^{-5}$	$7{,}04 \cdot 10^{-6}$	$2{,}60 \cdot 10^{-6}$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -C(\theta_s)\varphi_2 + f_2(x,t), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < 1, \quad T = 1{,}28,$$

где $M(\varphi_2) = 1 + \varphi_2$; $D(\varphi_2) = 1 + \varphi_2$;

$$B(\varphi_2, \theta_s, x) = [1 - (1+\theta_s)^4]\exp(x-1) - \varphi_2 \Big/ \sqrt{1+\theta_s}\,[\exp(\theta_s \big/ (1+\theta_s)) - 0{,}5];$$

$$C(\theta_s) = -(\varphi_2 \Big/ \sqrt{1+\theta_s})[\exp(\theta_s \big/ (1+\theta_s)) - 0{,}5].$$

Для искомых функций выбирались аналитические решения $\theta_s = 0{,}5 + \exp(x)t^3$, $\varphi_2 = xt$, правые части f и f_2 соответствовали этим функциям. Граничные условия являлись условиями Дирихле и находились из аналитического решения так же, как и начальные данные. Сетка по пространству выбиралась равномерной.

В табл. 1, 2 представлены величины ошибок решений θ_s и φ_2 в равномерной сеточной норме.

Для этого же уравнения, но с другими аналитическими решениями $\theta_s = 0{,}5 + \exp[(x-0{,}5)^2]t^3$, $\varphi_2 = (x-0{,}5)^2 t^3$ и граничными условиями $(1+\varphi_2)\times$

Таблица 2

N_h	τ			
	0,02	0,01	0,005	0,0025
8	$2{,}04 \cdot 10^{-5}$	$8{,}35 \cdot 10^{-6}$	$5{,}67 \cdot 10^{-6}$	$5{,}00 \cdot 10^{-6}$
16	$1{,}92 \cdot 10^{-5}$	$5{,}11 \cdot 10^{-6}$	$2{,}10 \cdot 10^{-6}$	$1{,}42 \cdot 10^{-6}$
32	$1{,}92 \cdot 10^{-5}$	$4{,}79 \cdot 10^{-6}$	$1{,}28 \cdot 10^{-6}$	$5{,}24 \cdot 10^{-7}$
64	$1{,}92 \cdot 10^{-6}$	$4{,}79 \cdot 10^{-6}$	$1{,}20 \cdot 10^{-6}$	$3{,}19 \cdot 10^{-7}$
128	$1{,}92 \cdot 10^{-6}$	$4{,}79 \cdot 10^{-6}$	$1{,}20 \cdot 10^{-6}$	$2{,}99 \cdot 10^{-7}$

Т а б л и ц а 3

N_h	τ			
	0,02	0,01	0,005	0,0025
1024	$4{,}36 \cdot 10^{-4}$ $5{,}09 \cdot 10^{-5}$	$1{,}10 \cdot 10^{-4}$ $1{,}27 \cdot 10^{-5}$	$2{,}81 \cdot 10^{-5}$ $3{,}18 \cdot 10^{-6}$	$7{,}75 \cdot 10^{-6}$ $7{,}93 \cdot 10^{-7}$

Т а б л и ц а 4

τ	N_h			
	16	32	64	128
$7{,}8125 \cdot 10^{-5}$	$3{,}58 \cdot 10^{-3}$ $2{,}81 \cdot 10^{-6}$	$1{,}07 \cdot 10^{-3}$ $1{,}13 \cdot 10^{-6}$	$2{,}89 \cdot 10^{-4}$ $3{,}38 \cdot 10^{-7}$	$7{,}53 \cdot 10^{-5}$ $9{,}14 \cdot 10^{-8}$

$\times \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right|_{\Gamma} = \gamma$ (γ определяется из аналитического решения) ошибки решения представлены в табл. 3, 4 (в первой строчке для θ_s, во второй для φ_2).

Представленные результаты иллюстрируют сходимость второго порядка данного метода.

Заключение. В представленной работе рассмотрено применение метода конечных объемов для численного решения одномерной горизонтальной нестационарной задачи сушки однородного слоя СТ в декартовой системе координат. Показано, что нелинейная алгебраическая система, полученная этим методом, аппроксимирует со вторым порядком безразмерную систему уравнений (1) с граничными условиями (2) и начальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гришин А. М., Голованов А. Н., Катаева Л. Ю., Лобода Е. Л.** Постановка и решение задачи о сушке слоя лесных горючих материалов // Физика горения и взрыва. 2001. **37**, № 1. С. 65.
2. **Лобода Е. Л.** Физико-математическое моделирование сушки и зажигания слоя лесных горючих материалов: Автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук. Томск: ТГУ, 2002. 125 с.
3. **Il'in V. P., Shmakov I. A.** On the finite volume solution of the 1D parabolic nonlinear equation // Bull. of the Novosibirsk Computing Center. Ser. Numer. Anal. 2005. N 13. P. 33.
4. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
5. **Ильин В. П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000.

Поступила в редакцию 3 ноября 2006 г.