Р О С С И Й С К А Я А К А Д Е М И Я Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2007, том 43, № 1

УДК 535.31

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЙКОНАЛА ДЛЯ ФОКУСИРОВКИ В ЗАДАННУЮ ОБЛАСТЬ*

А. А. Белоусов, Л. Л. Досколович, С. И. Харитонов

Самарский государственный аэрокосмический университет им. Академика С. П. Королева, г. Самара
Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара
E-mail: leonid@smr.ru

Рассмотрен итерационный метод расчета эйконала поля, создающего условия фокусировки светового пучка в заданную двумерную область. Проведен расчет функции эйконала, обеспечивающей фокусировку из круглой области в прямоугольную. Рассмотрено применение метода для расчета преломляющих оптических элементов. Проведен расчет преломляющего элемента, фокусирующего плоский пучок круглого сечения в прямоугольник.

Введение. Задача фокусировки светового пучка в заданную область является актуальной для светотехники, лазерной оптики и радиофизики. Для фокусировки в заданную область рассчитывается форма отражающей или преломляющей поверхности оптического элемента из условия формирования заданного распределения освещенности в некоторой плоскости.

Ряд методов решения задач такого класса в приближении геометрической оптики разработан для дифракционных оптических элементов [1–6]. В связи с этим ставится задача расчета эйконала светового поля в некоторой плоскости из условия формирования заданного распределения освещенности в плоскости, отстоящей от исходной на заданное расстояние. При этом форма поверхности дифракционного элемента может быть однозначно восстановлена по распределению эйконала в плоскости.

Данная задача является хорошо известной для случая фокусировки в линию [1–6]. Получены аналитические выражения для эйконала поля, обеспечивающего фокусировку в гладкие линии. Задача расчета эйконала из условия фокусировки в заданную двумерную область является существенно более сложной. В ней аналитические решения известны только для тривиальных случаев, обладающих радиальной или цилиндрической симметрией [1].

В предлагаемой работе рассмотрен итерационный метод расчета эйконала из условия фокусировки в заданную двумерную область. Эйконал нахо-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-07-97601-р_офи, № 07-01-96602-р_поволжье_а, № 07-07-91580-АСП_а).

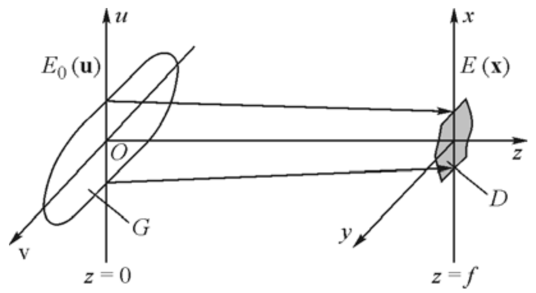

Рис. 1

дится в виде полинома. Коэффициенты полинома являются параметрами, определяющими распределение освещенности в области фокусировки. Суть метода состоит в вычислении коэффициентов полинома на основе градиентной минимизации функционала невязки, представляющего различие расчетной и заданной освещенности полей. Этот метод применен к расчету преломляющих оптических элементов, основанному на нахождении преломляющей поверхности для формирования заданного эйконала в плоскости.

Постановка задачи. Сформулируем задачу расчета эйконала из условия фокусировки светового пучка в двумерную область. Предположим, что в плоскости $z=0$ в области G задано распределение освещенности $E_0(\mathbf{u})$, $\mathbf{u}\in G$, где $\mathbf{u}=(u,\text{v})$ – декартовы координаты в плоскости $z=0$. Требуется рассчитать распределение эйконала $\psi(\mathbf{u})$, $\mathbf{u}\in G$, из условия формирования в плоскости $z=f$ заданного распределения освещенности $E(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in D$ (рис. 1). Плоскость $z=f$ и область D будем называть плоскостью и областью фокусировки соответственно.

Данная задача также включает расчет дифракционных оптических элементов. В частности, дифракционный микрорельеф оптического элемента (при условии выполнения приближения тонкого оптического элемента) вычисляется по формуле [1–3]

$$h(\mathbf{u})=\frac{1}{n-1}\operatorname{mod}_{\lambda}\psi(\mathbf{u}),\tag{1}$$

где n – коэффициент преломления материала элемента, λ – длина волны.

Рассмотрим расчет освещенности в плоскости фокусировки. Эйконал $\psi(\mathbf{u})$ определяет направления распространения лучей в виде

$$\mathbf{p}(\mathbf{u})=\left(\nabla\psi(\mathbf{u}),\ \sqrt{1-(\nabla\psi(\mathbf{u}))^2}\right),\tag{2}$$

где $\nabla\psi(\mathbf{u})=\left(\dfrac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial u},\dfrac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial \text{v}}\right)$. Обозначим $\mathbf{x}(\mathbf{u})=(x(\mathbf{u}),y(\mathbf{u}))$ координаты пересечения лучей с плоскостью $z=f$. Согласно (2) получим

$$\mathbf{x}(\mathbf{u})=\mathbf{u}+\nabla\psi(\mathbf{u})\frac{f}{\sqrt{1-(\nabla\psi(\mathbf{u}))^2}}.\tag{3}$$

Освещенность в плоскости фокусировки определяется из закона сохранения светового потока в виде

$$E(\mathbf{x}) = E_0(\mathbf{u}) \Big/ \left| J(\mathbf{u}) \right|, \tag{4}$$

где

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\partial x(\mathbf{u})}{\partial u} \frac{\partial y(\mathbf{u})}{\partial \mathrm{v}} - \frac{\partial y(\mathbf{u})}{\partial u} \frac{\partial x(\mathbf{u})}{\partial \mathrm{v}} \tag{5}$$

– якобиан преобразования координат (3).

Расчет эйконала $\psi(\mathbf{u})$ из условия формирования заданной интенсивности излучения $E(\mathbf{x})$ состоит в решении уравнения (4), которое известно как уравнение Монжа – Ампера. Аналитические решения данной задачи известны только для простейших случаев с радиальной и цилиндрической симметрией [1–3].

Итерационный метод расчета. Для расчета эйконала $\psi(\mathbf{u})$ был применен итерационный метод, суть которого состоит в минимизации функционала ошибки $\varepsilon(\psi)$, представляющего различие расчетного и требуемого распределений освещенности, с использованием градиентного метода.

Минимизация функционала ошибки (обратная задача) предполагает многократное решение прямой задачи, состоящей в расчете распределения освещенности по заданному эйконалу. Представление (4) неудобно для расчета, поскольку его нельзя использовать в области каустик, а также в случае, когда несколько лучей из плоскости задания эйконала $z = 0$ приходят в одну точку плоскости области фокусировки. При нахождении удобной расчетной формулы для распределения освещенности $E(\mathbf{x})$ воспользуемся интегральным представлением формулы (4):

$$E(\mathbf{x}) = \iint_G \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \tag{6}$$

где $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция. Аппроксимируем дельта-функцию из (6) некоторой иглообразной функцией $\delta_\sigma(x, y)$, где

$$\lim_{\sigma \to 0} \delta_\sigma(x, y) = \delta(x, y). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получим распределение освещенности в виде

$$E(\mathbf{x}) = \iint_G \delta_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} =$$

$$= \iint_G \delta_\sigma\left(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nabla\psi(\mathbf{u}) f \Big/ \sqrt{1 - (\nabla\psi(\mathbf{u}))^2} \right) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \tag{8}$$

Выражение (8) ориентировано на вычисление интенсивности с использованием метода трассировки лучей [7, 8], при этом оно дает усредненное значение освещенности по окрестности, определяемой «эффективной» шириной функции $\delta_\sigma(x, y)$. Величина этой окрестности обычно определяется шагом дискретизации в области наблюдения. В качестве функции $\delta_\sigma(x, y)$ может использоваться, например, гауссова функция

$$\delta_\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right). \tag{9}$$

В этом случае освещенность (8) будет усредненным значением освещенности (6) с гауссовым весом (9).

Найдем эйконал в виде отрезка ряда разложения по некоторой системе функций:

$$\psi(u, \mathrm{v}) = \sum_{ij} c_{ij}\, g_i(u)\, q_i(\mathrm{v}). \tag{10}$$

Тогда задача минимизации функционала невязки $\varepsilon(\psi)$ сводится к задаче минимизации функции многих переменных от коэффициентов c_{ij}. В программной реализации метода эйконал был определен в виде полинома двух переменных

$$\psi(u, \mathrm{v}) = \sum_{ij} c_{ij}\, u^i \mathrm{v}^j. \tag{11}$$

В качестве функции невязки использовалась квадратичная функция

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = \iint_D (E(\mathbf{x}; \mathbf{c}) - E(\mathbf{x}))^2 dx dy, \tag{12}$$

где вектор $\mathbf{c}$ обозначает набор коэффициентов полинома, а $E(\mathbf{x}; \mathbf{c})$, $E(\mathbf{x})$ – расчетное и требуемое распределения освещенности в области фокусировки. В этом случае градиентный расчет функции $\psi(\mathbf{u})$ состоит в итерационной коррекции вектора коэффициентов $\mathbf{c}$ по правилу

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{n-1} - t\nabla\varepsilon(\mathbf{c}_{n-1}), \tag{13}$$

где $\nabla\varepsilon(\mathbf{c})$ – градиент функции невязки, а t – шаг метода. Компоненты вектора градиента в (13) несложно получить в виде

$$\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{c})}{\partial c_{ij}} = 2\iint_D (E(\mathbf{x}, \mathbf{c}) - E(\mathbf{x}))\Psi_{ij}(\mathbf{x})\, d^2\mathbf{x}, \tag{14}$$

где

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}) = \iint_G E_0(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial c_{ij}}\left(\delta_\sigma\left(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nabla\psi(\mathbf{u}) f \Big/ \sqrt{1 - (\nabla\psi(\mathbf{u}))^2}\right)\right) d^2\mathbf{u}.$$

Определение вектора градиента также может осуществляться численно с использованием разностных формул для расчета производных $\partial\varepsilon/\partial c_{ij}$. В данной работе для минимизации функции ошибки (12) и реализации градиентного метода (13) были использованы java-класс Uncmin_f77 и java-интерфейс Uncmin_methods из пакета оптимизации AN UNCONSTRAINED NONLINEAR OPTIMIZATION SOLVER. Кроме этого в качестве дополнительных

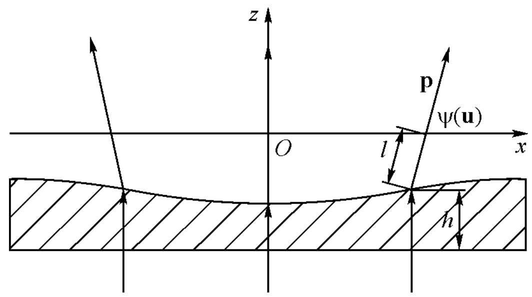

Рис. 2

методов минимизации были использованы метод наискорейшего спуска и квазиньютоновский метод многомерной минимизации.

Для характеристики качества решений, получаемых в результате работы итерационного алгоритма, введем значения энергетической эффективности e и среднеквадратической ошибки δ. Значение

$$e = \int_D E(\mathbf{x})\, d^2\mathbf{x} \Big/ \int_G E_0(\mathbf{u})\, d^2\mathbf{u} \qquad (15)$$

характеризует долю энергии, фокусируемую в требуемую область D.

Значение

$$\delta = \frac{1}{\overline{E}} \left[\frac{1}{\|D\|} \int_D (E(\mathbf{x},\mathbf{c}) - E(\mathbf{x}))^2\, d^2\mathbf{x} \right]^{1/2} \qquad (16)$$

(где $\|D\|$ – площадь области фокусировки D, а $\overline{E}$ – среднее значение) характеризует ошибку формирования заданного распределения освещенности $E(\mathbf{x})$.

Применение итерационного метода для расчета оптических элементов. Предложенный метод может быть применен непосредственно для расчета зеркал и преломляющих оптических элементов. Рассмотрим, например, расчет преломляющих оптических элементов для случая фокусировки входного пучка с плоским волновым фронтом и распределением освещенности $E_0(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$, в заданную двумерную область. Пусть распределение эйконала $\psi(\mathbf{u})$ в плоскости $z = 0$ рассчитано из условия фокусировки в заданную область. Будем считать оптический элемент расположенным непосредственно перед плоскостью $z = 0$, а его нижнюю поверхность со стороны падения пучка плоской. Геометрия преломляющего оптического элемента для фокусировки пучка с плоским волновым фронтом показана на рис. 2. Тогда, пренебрегая изменением освещенности входного пучка при прохождении через оптический элемент, сведем задачу расчета оптического элемента к вычислению верхней преломляющей поверхности элемента из условия формирования заданного эйконала $\psi(\mathbf{u})$ в плоскости $z = 0$.

Запишем уравнение верхней преломляющей поверхности в виде

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}) - l(\mathbf{u})\mathbf{p}(\mathbf{u}), \qquad (17)$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = (x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}), z(\mathbf{u}))$ – вектор поверхности в координатах $\mathbf{u} = (u, \mathrm{v})$; $\mathbf{r} = (u, \mathrm{v}, 0)$ – радиус-вектор точки в плоскости $z = 0$; $\mathbf{p}(\mathbf{u}) = (p_x(\mathbf{u}), p_y(\mathbf{u}), p_z(\mathbf{u}))$ – вектор направления луча, определяемый по формуле (2); $l(\mathbf{u})$ – расстояние от точки плоскости $z = 0$ до преломляющей поверхности по направлению $\mathbf{p}(\mathbf{u})$. Функция $l(\mathbf{u})$ в (17) определяется из уравнения

$$\psi(\mathbf{u}) = l(\mathbf{u}) + nh(\mathbf{u}), \tag{18}$$

где n – коэффициент преломления материала оптического элемента, $h(\mathbf{u})$ – толщина оптического элемента. Уравнение (18) определяет при $z = 0$ равенство оптических длин лучей, прошедших через элемент, и заданного эйконала $\psi(\mathbf{u})$. Толщина оптического элемента может быть записана через функцию $l(\mathbf{u})$ в виде

$$h(\mathbf{u}) = -p_z(\mathbf{u})\, l(\mathbf{u}) - z_0, \tag{19}$$

где z_0 – координата нижней границы оптического элемента. Из (18) и (19) получим функцию $l(\mathbf{u})$ в виде

$$l(\mathbf{u}) = \frac{\psi(\mathbf{u}) + nz_0}{1 - np_z(\mathbf{u})}. \tag{20}$$

Таким образом, преломляющая поверхность для формирования заданного эйконала $\psi(\mathbf{u})$ имеет вид (17) и (20). Отметим, что эйконал $\psi(\mathbf{u})$ в плоскости $z = 0$ определен с точностью до константы, которая должна выбираться из условия, что верхняя преломляющая поверхность в точке наибольшей толщины касается плоскости $z = 0$. В таком случае предположение, что осве-

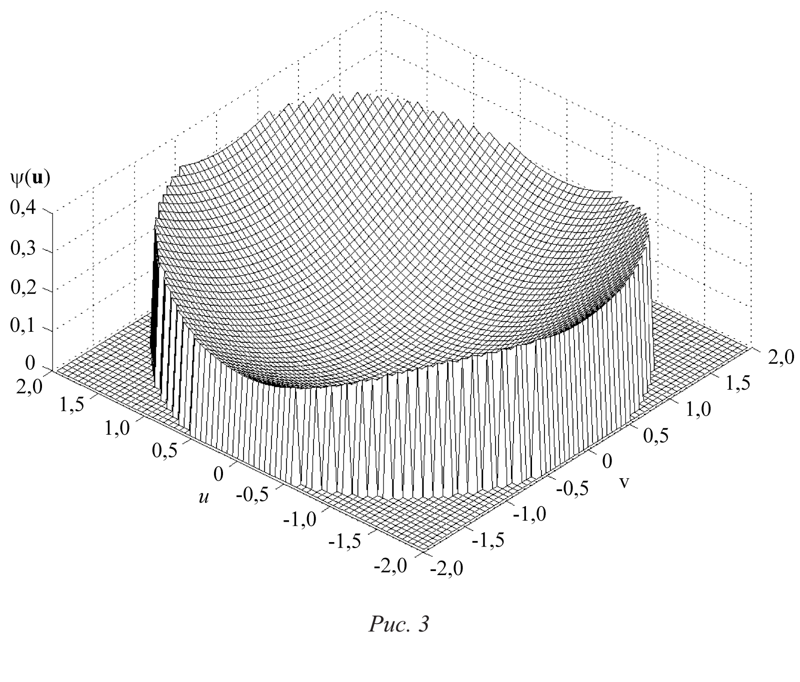

Рис. 3

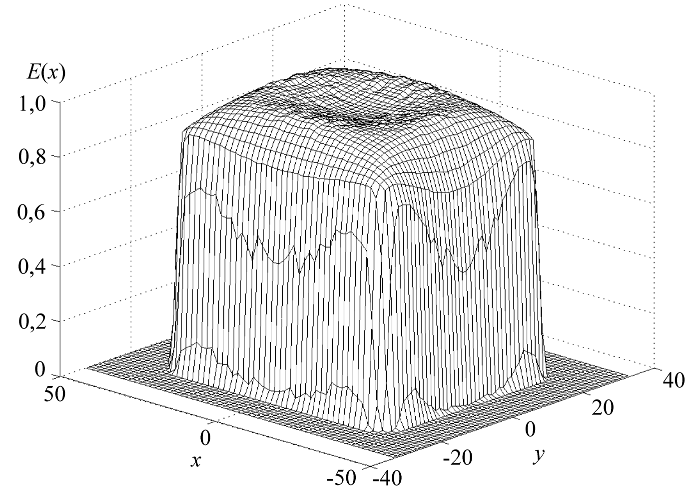

Рис. 4

щенность входного пучка при прохождении его через оптический элемент слабо меняется, имеет наименьшую ошибку.

Результаты расчета. Функция эйконала, рассчитанная из условия фокусировки в прямоугольник в плоскости $z = 115$ мм, показана на рис. 3. Освещенность в прямоугольнике задавалась в виде супергаусса 18-го порядка:

$$E(\mathbf{x}) = \exp(-(x/\sigma_x)^{18} - (y/\sigma_y)^{18}). \tag{21}$$

Размеры сторон прямоугольника составляют $2\sigma_x = 50$ мм, $2\sigma_y = 70$ мм, а эйконал определен в пределах круглой области G радиусом $R = 2$ мм. Область G будем называть апертурой. Освещенность $E_0(\mathbf{u})$ в пределах апертуры считается постоянной. Распределение эйконала на рис. 3 соответствует симметричному полиному шестой степени. Время расчета эйконала с указанным числом параметров на компьютере Pentium 4 составляет ~ 15 мин. На

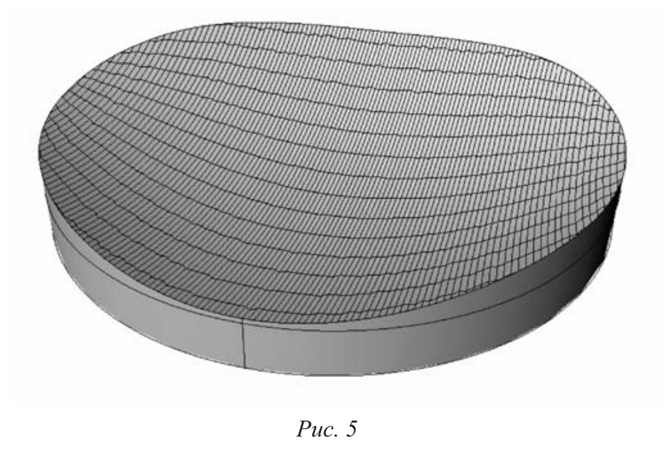

Рис. 5

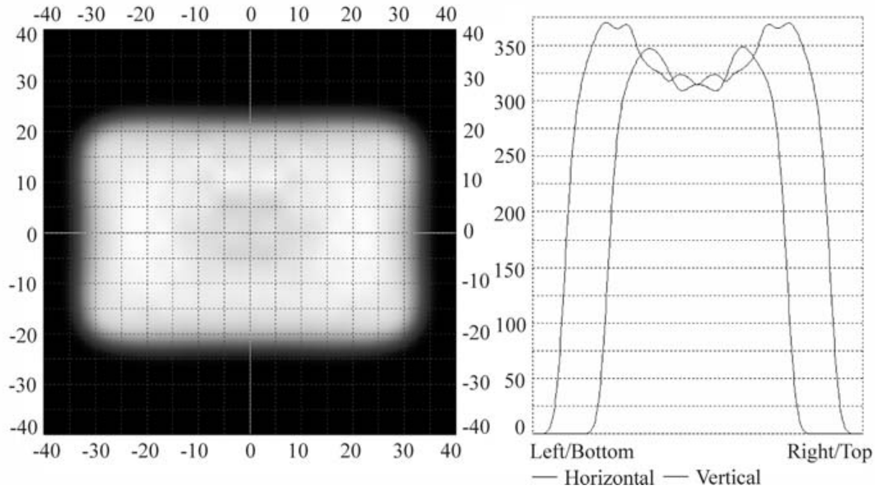

Рис. 6

рис. 4 приведено расчетное распределение интенсивности, формируемое в плоскости фокусировки, для эйконала, изображенного на рис. 3. Из рис. 4 видно высокое качество фокусировки в прямоугольник. Энергетическая эффективность фокусировки составляет фактически 100 % при среднеквадратической ошибке $\delta = 5{,}9$ %.

Этот метод был также применен для случаев фокусировки из круглой области в треугольную и из квадратной области в круглую. Для выполнения указанных преобразований также оказалось достаточным использовать эйконал в виде полинома шестой степени. В этих задачах метод давал среднеквадратическую ошибку менее 10 % при фактически 100 %-ной энергетической эффективности.

На основе функции эйконала из рис. 3 был рассчитан преломляющий оптический элемент ($n = 1{,}5$) для фокусировки плоского пучка круглого сечения в прямоугольник размером 70×50 мм при $z = 115$ мм (рис. 5). Внешняя преломляющая поверхность элемента рассчитана по формулам (17) и (20). Радиус элемента равен 2 мм (см. рис. 5), а толщина увеличивается от центра к краю на 0,2 мм.

Для проверки правильности разработанных алгоритмов и программ было проведено моделирование работы рассчитанного оптического элемента средствами специализированной программы по светотехнике Trace Pro [7]. Результаты расчета по методу трассировки лучей (при числе лучей 50000) представлены на рис. 6 и соответствуют требуемому распределению, приведенному на рис. 4. Данный пример показывает эффективность разработанного итерационного алгоритма задачи расчета преломляющих оптических элементов для фокусировки в заданные двумерные области.

Заключение. Рассмотренный градиентный метод расчета эйконала поля дает высокое качество фокусировки светового пучка в заданную двумерную область. Для фокусировки из круглой области в прямоугольную достаточно использовать эйконал в виде полинома шестой степени, который обеспечивает низкую среднеквадратическую ошибку около 5 % при фактически 100 %-ной энергетической эффективности. Метод может быть применен непосредственно к расчету преломляющих оптических элементов для фокусировки в заданную область.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гончарский А. В., Попов В. В., Степанов В. В.** Введение в компьютерную оптику. М.: Изд-во МГУ, 1991.
2. **Soifer V., Kotlyar V., Doskolovich L.** Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation. London: Taylor&Francis Ltd., 1997.
3. **Methods** for Computer Design of Diffractive Optical Elements /Ed. V. A. Soifer. N. Y.: A Willey-Interscience Publication, Willey & Sons, 2002.
4. **Данилов В. А., Попов В. В., Прохоров А. М. и др.** Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы // Письма в ЖТФ. 1982. **8**, № 13. С. 810.
5. **Гончарский А. В., Данилов В. А., Попов В. В. и др.** Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую // ДАН СССР. 1983. **273**, № 3. С. 605.
6. **Doskolovich L. L., Kazanskiy N. L., Soifer V. A. et al.** A DOE to form a line-shaped directivity diagram // Journ. of Modern Optics. 2004. **51**, N 13. P. 1999.
7. **http://www.lambdares.com/products/tracepro/index.phtml**
8. **Young C., Wells D.** Ray Tracing Creations. London: Waite Group Press, 1994.

Поступила в редакцию 15 мая 2006 г.