РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2006, том 42, № 6

УДК 621.39; 621.37 : 621.391

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКОГО ГАУССОВА ИМПУЛЬСА С УЧЕТОМ ДРОБОВОГО ШУМА. ГРАНИЦЫ РАО – КРАМЕРА

С. В. Хабаров

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: sobolev@iae.nsk.su

Получена система уравнений правдоподобия для оптимального оценивания параметров оптического импульса с учетом дробового шума. Найдены алгоритмы оценок амплитуды и длительности гауссова импульса, а также его положение на оси времени. Определены границы Рао – Крамера для несовместных и совместных оценок.

Введение. В основе световолоконной связи, лазерной локации, оптической дисковой памяти и DVD-проигрывателей, а также лазерных информационных технологий лежит достоверный прием и обработка оптических сигналов. Общепринятым способом решения задачи оптимального приема оптических сигналов является их фотодетектирование и последующее преобразование средствами электроники и вычислительной техники [1–3]. Современные фотодетекторы настолько совершенны, что основной помехой приему является неустранимый, по крайней мере на сегодняшний день, дробовой шум [4, 5]. Данная работа посвящена оптимальному оцениванию параметров оптических сигналов, получаемых на выходе аналогового фотодетектора с учетом дробового шума, моделью которого является нестационарный дельта-коррелированный случайный процесс с нормальным распределением. Поставленная задача существенно отличается от известных стандартных в статистической радиотехнике [6–8], когда сигнал и шум являются независимыми. При приеме оптических сигналов статистические характеристики дробового шума тесно связаны со значениями самого сигнала. Дисперсия этого шума в каждой точке оси времени для ансамбля одинаковых реализаций оптического сигнала пропорциональна мгновенной интенсивности самого сигнала в этой же точке.

Гауссова форма импульса выбрана нами на основании того, что она широко используется на практике и, кроме того, позволяет получить точные аналитические решения поставленной задачи.

В большинстве практических случаев априорные распределения оцениваемых параметров неизвестны, поэтому оптимальными будут оценки, получаемые по критерию достижения максимума совместной плотности вероятности принимаемого сигнала, рассматриваемой как функция оцениваемого параметра – функция правдоподобия [7]. Аналогичный подход к оценке параметров оптического доплеровского импульса при пуассоновской модели фотодетектирования был реализован в [9].

Функция правдоподобия для параметров фотоэлектрического сигнала. Теория фотоэффекта [5] позволяет представить электрический сигнал на выходе фотодетектора в виде следующей аддитивной комбинации:

$$\xi(t) = I(t) + n(t), \tag{1}$$

где $I(t) = \dfrac{J(t)\chi(ze)}{h\nu}$ – детерминированная составляющая фототока, пропорциональная мгновенной интенсивности оптического сигнала $J(t)$; χ – квантовая эффективность детектора; (ze) – заряд электрона; $h\nu$ – энергия кванта принимаемого излучения; $n(t)$ – дробовой шум.

Задачу оптимального приема оптических сигналов будем решать в предположении, что используется аналоговый широкополосный детектор, когда шум можно считать нестационарным нормальным процессом с дисперсией в каждой точке оси времени, определяемой выражением [4–6]

$$\sigma^2(t) = \frac{2(ze)I(t)}{\Delta t}. \tag{2}$$

Здесь Δt – интервал квантования сигнала по времени.

Далее будем полагать, что выходной сигнал фотодетектора равномерно квантуется с интервалом Δt. Тогда, исходя из того что шум $n(t)$, как уже было сказано, распределен по нормальному закону, можем совместную плотность вероятности сигнала – функцию правдоподобия оцениваемого параметра λ – представить в виде [6]

$$P(\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{2m+1}\,\sigma_{-m}\sigma_{-m+1}\ldots\sigma_{m-1}\sigma_m}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{[\xi(t_i) - I(t_i)]^2}{\sigma_i^2}\right\}, \tag{3}$$

где $(2m+1)$ – полное число отсчетов сигнала $\xi(t_i)$; $(\sigma_i)^2$ – дисперсия шума i-го отсчета; $\sigma_i^2 = \sigma^2(t_i)$.

В соответствии с теорией оценивания [6, 7] оптимальные оценки получаются как решение системы уравнений правдоподобия, которые находятся путем приравнивания к нулю производных логарифма функции правдоподобия по оцениваемому параметру. Согласно (3) этот логарифм имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \ln(P(\lambda)) = -\frac{2m+1}{2}\ln(2\pi) - \sum_{i=-m}^{i=+m}\ln(\sigma_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{[\xi(t_i) - I(t_i)]^2}{\sigma_i^2}. \tag{4}$$

Как уже упоминалось, задача решается для гауссова оптического импульса с интенсивностью $I(t_i) = A\exp\left(-\dfrac{(t_i - t_0)^2}{\tau^2}\right)$.

Если для краткости ввести обозначение $(e+)=\frac{1}{(e-)}=\exp\left(\frac{(t_i-t_0)^2}{\tau^2}\right)$, то выражение (4) примет вид

$$L(\lambda)=C+\sum_{i=-m}^{i=+m}\left(\frac{(t_i-t_0)^2}{2\tau^2}\right)-\left(\frac{2m+1}{2}\right)\ln(A)-$$

$$-\frac{1}{4(ze)}\left(\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{\xi^2(t_i)(e+)}{A}\Delta t+\sum_{i=-m}^{i=+m}A(e-)\Delta t\right), \tag{5}$$

где

$$C=-\frac{2m+1}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{i=-m}^{i=+m}\ln\left(\frac{2(ze)}{\Delta t}\right)+\frac{1}{4(ze)}\sum_{i=-m}^{i=+m}2\xi(t_i)\Delta t. \tag{6}$$

Поскольку константа C не содержит ни одного параметра сигнала, ее можно опустить. На практике время измерения $T=(2m+1)\Delta t$ устанавливается существенно большим длительности импульса, а интервал квантования выбирается достаточно малым, т. е. $\Delta t \ll \tau \ll T$. Тогда, заменяя последнюю сумму в (6) интегралом, логарифм функции правдоподобия примет окончательный вид:

$$L(\lambda)=\sum_{i=-m}^{i=+m}\left(\frac{(t_i-t_0)^2}{2\tau^2}\right)-\left(\frac{2m+1}{2}\right)\ln(A)-\frac{1}{4(ze)}\left(\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{\xi^2(t_i)(e+)}{A}\Delta t+\sqrt{\pi}A\tau\right). \tag{7}$$

Вывод системы уравнений правдоподобия. Дифференцируя выражение (7) по оцениваемым параметрам и приравнивая эти производные к нулю, получим систему уравнений правдоподобия, решение которой даст совместные оценки неизвестных параметров. В нашем случае их три: амплитуда A, длительность сигнала τ и его положение на оси времени t_0.

Выполняя операцию дифференцирования по A, получим

$$\frac{\partial(L(A))}{\partial A}=-\frac{2m+1}{2A}+\frac{1}{4(ze)}\left(\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{\xi^2(t_i)}{A^2}(e+)\Delta t-\sqrt{\pi}\tau\right)=0. \tag{8}$$

С учетом (1) величину $\xi^2(t_i)(e+)$, входящую в (8), можно представить как

$$\xi^2(t_i)(e+)=(I^2(t_i)+2n(t_i)I(t_i)+n^2(t_i))(e+)=$$

$$=2A\xi(t_i)-A^2(e-)+n^2(t_i)(e+). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь величину $n^2(t_i)$, которую легко записать в виде аддитивной комбинации известной детерминированной и случайной частей, т. е.

$$n^2(t_i)=\left\langle n^2(t_i)\right\rangle+n_1(t_i)=\frac{2(ze)A(e-)}{\Delta t}+n_1(t_i). \tag{10}$$

Здесь $\left\langle n^2(t_i)\right\rangle$ – дисперсия дробового шума, а $n_1(t)$ – переменная часть его квадрата. Отметим, что математическое ожидание дисперсии, как следует из (10), равно 0.

Подставляя (10) в (9), получим

$$\xi^2(t_i)(e+) = \frac{2(ze)A}{\Delta t} + 2A\xi(t_i) - A^2(e-) + n_1(t_i)(e+). \tag{11}$$

С учетом (11) исходное уравнение (8) примет вид

$$\sum_{i=-m}^{i=+m} 2\xi(t_i)\Delta t - \sum_{i=-m}^{i=+m} A(e-)\Delta t + \sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)}{A}\Delta t - \sqrt{\pi}A\tau = 0. \tag{12}$$

Заменяя вторую сумму интегралом, получим окончательное уравнение правдоподобия для *A*:

$$2\sum_{i=-m}^{i=+m} \xi(t_i)\Delta t + \sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)\Delta t}{A} - 2\sqrt{\pi}\tau A = 0. \tag{13}$$

Аналогично с учетом (11) найдем уравнение правдоподобия для оценки параметра τ:

$$\sum_{i=-m}^{i=+m} 4\xi(t_i)(t_i - t_0)^2\Delta t - 2A\sum_{i=-m}^{i=+m}(e-)(t_i - t_0)^2\Delta t +$$

$$+2\sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)}{A}(t_i - t_0)^2\Delta t - \sqrt{\pi}A\tau^3 = 0. \tag{14}$$

Следует заметить, что вторая сумма достаточно быстро сходится к интегралу

$$\sum_{i=-m}^{i=+m}(t_i - t_0)^2 \exp\left(-\frac{(t_i - t_0)^2}{\tau^2}\right)\Delta t \cong \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)dt = \frac{\sqrt{\pi}\tau^3}{2}. \tag{15}$$

С учетом последнего приближения уравнение правдоподобия для τ можно записать как

$$4\sum_{i=-m}^{i=+m} \xi(t_i)(t_i - t_0)^2\Delta t + 2\sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)(t_i - t_0)^2\Delta t}{A} - 2\sqrt{\pi}A\tau^3 = 0. \tag{16}$$

Аналогично найдем уравнение правдоподобия для оценки параметра t_0:

$$\sum_{i=-m}^{i=+m} \xi(t_i)t_i\Delta t - \sum_{i=-m}^{i=+m} \xi(t_i)t_0\Delta t + \sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)}{2A}(t_i - t_0)\Delta t = 0. \tag{17}$$

В каждом из уравнений (13), (16), (17) полученной системы присутствует слагаемое, содержащее реализацию случайного процесса $n_1(t)$. Как показано в приложении, математические ожидания этих слагаемых равны нулю, а их среднеквадратичные отклонения малы относительно величин, входящих в состав соответствующих уравнений. С учетом этого полученные уравнения можно записать следующим образом:

$$2\sum_{i=-m}^{i=+m}\xi(t_i)\Delta t-2\sqrt{\pi}\tau A=0, \tag{18}$$

$$4\sum_{i=-m}^{i=+m}\xi(t_i)(t_i-t_0)^2\,\Delta t-2\sqrt{\pi}A\tau^3=0, \tag{19}$$

$$\sum_{i=-m}^{i=+m}\xi(t_i)\,t_i\,\Delta t-\sum_{i=-m}^{i=+m}\xi(t_i)\,t_0\,\Delta t=0. \tag{20}$$

Несовместные оценки параметров. Решая каждое из уравнений (18)–(20) относительно соответствующего параметра при условии, что два других параметра известны, находим их несовместные оценки в следующем виде:

$$\hat{A}=\frac{\sum_{i=-m}^{i=+m}\xi(t_i)\Delta t}{\sqrt{\pi}\tau}, \tag{21}$$

$$\hat{\tau}=\left(2\frac{\sum_{i=-m}^{i=+m}\xi(t_i)(t_i-t_0)^2\Delta t}{\sqrt{\pi}A}\right)^{1/3}, \tag{22}$$

$$\hat{t}_0=\frac{\sum_{i=-m}^{i=+m}\xi(t_i)\,t_i\,\Delta t}{\sum_{i=-m}^{i=+m}\xi(t_i)\Delta t}. \tag{23}$$

Тогда, получив реализацию сигнала фотодетектора $\xi(t)$ при двух известных параметрах, используя (21)–(23), легко вычислить оптимальную оценку третьего.

Совместные оценки параметров. Если неизвестными оказываются все параметры сигнала, то совместные их оценки находятся как решение системы уравнений правдоподобия (18)–(20). Поскольку в уравнении (20) кроме t_0 не содержится других параметров, его решение при несовместной оценке (23) сохранится и для совместной. Решив оставшуюся систему из двух уравнений при двух неизвестных, найдем следующие выражения для совместных оценок A и τ:

$$\hat{\tau} = \sqrt{2\frac{\sum_{i=-m}^{i=+m} \xi(t_i)(t_i - t_0)^2 \Delta t}{\sum_{i=-m}^{i=+m} \xi(t_i)\Delta t}}, \tag{24}$$

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=-m}^{i=+m} \xi(t_i)\Delta t\right)^3}{2\pi \sum_{i=-m}^{i=+m} \xi(t_i)(t_i - t_0)^2 \Delta t}}. \tag{25}$$

Таким образом, получив реализацию сигнала $\xi(t)$ с выхода фотодетектора, можно оценить все его неизвестные параметры.

Границы Рао – Крамера для несовместных оценок параметров. Качество максимально правдоподобных оценок параметров сигнала определяется границами Рао – Крамера (ГРК) [7], которые показывают минимальную величину дисперсии получаемых оценок. По определению

$$\text{ГРК}_\lambda = \left\langle \frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} \right\rangle^{-1}, \tag{26}$$

где λ – оцениваемый параметр.

Сначала найдем ГРК для A, используя формулы (8) и (11):

$$\text{ГРК}_A =$$

$$= \left\langle \left[-\frac{2m+1}{2A} + \frac{1}{4(ze)} \left(\sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{2(ze) + \left(2\xi(t_i) - A(e-) + \frac{n_1(t_i)(e+)}{A} \right)\Delta t}{A} - \sqrt{\pi}\tau \right) \right]^2 \right\rangle^{-1}. \tag{27}$$

Применяя (1) и учитывая, что

$$\langle n(t_i)n(t_j)\rangle = \langle n_1(t_i)n_1(t_j)\rangle = \langle n_1(t_i)n(t_j)\rangle = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \tag{28}$$

выражение (27) можно представить в виде

$$\text{ГРК}_A = \frac{4(ze)^2 A^2}{(\Delta t)^2} \times$$

$$\times\left(\sum_{i=-m}^{i=+m}\left\langle n^2(t_i)\right\rangle+\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{\left\langle (n_1(t_i)(e+))^2\right\rangle}{4A^2}+\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{\left\langle n_1(t_i)n(t_i)\right\rangle(e+)}{A}\right)^{-1}. \quad (29)$$

Рассмотрим все три слагаемых в скобках выражения (29). Первое – это дисперсия дробового шума. Второе представлено в приложении как дисперсия случайных величин Y_i (П4). А третье равно нулю, так как

$$\left\langle n_1(t_i)n(t_i)\right\rangle=\left\langle (n^2(t_i)-\sigma^2)n(t_i)\right\rangle=\left\langle n^3(t_i)\right\rangle-\left\langle \sigma^2 n(t_i)\right\rangle=0-0=0. \quad (30)$$

Тогда

$$\text{ГРК}_A=\frac{2A^2}{\sqrt{\pi}\tau A/(ze)+(2m+1)}. \quad (31)$$

Как показано в приложении, $\sqrt{\pi}\tau A/(ze)\gg m$. Окончательно имеем

$$\text{ГРК}_A=\frac{2(ze)A}{\sqrt{\pi}\tau}. \quad (32)$$

Аналогично выводится ГРК для τ:

$$\frac{\partial L(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial L(\tau)}{\partial\tau}=\frac{1}{(ze)^2\tau^6}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=-m}^{i=+m}n(t_i)(t_i-t_0)^2\Delta t+\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{n_1(t_i)(e+)(t_i-t_0)^2\Delta t}{2}\right)^2. \quad (33)$$

Используя (30), получим

$$\text{ГРК}_\tau=(ze)^2\tau^6\times$$

$$\times\left(\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{2(ze)A(e-)}{\Delta t}(t_i-t_0)^4(\Delta t)^2+\sum_{i=-m}^{i=+m}\frac{8((ze)A/\Delta t)^2(t_i-t_0)^4(\Delta t)^2}{4A^2}\right)^{-1}. \quad (34)$$

Заменяя суммы интегралами и учитывая приближения, представленные в приложении, найдем, что

$$\text{ГРК}_\tau\cong\frac{2(ze)\tau}{3\sqrt{\pi}A}. \quad (35)$$

Аналогично определим

$$\text{ГРК}_{t_0}\cong\frac{(ze)\tau}{\sqrt{\pi}A}. \quad (36)$$

Таким образом, используя формулы (32), (35) и (36), определим минимальные относительные среднеквадратичные отклонения несовместных оценок:

$$\frac{\sigma_A}{A} = \sqrt{\frac{2(ze)}{\sqrt{\pi}A\tau}}, \tag{37}$$

$$\frac{\sigma_\tau}{\tau} = \sqrt{\frac{2(ze)}{3\sqrt{\pi}A\tau}}, \tag{38}$$

$$\frac{\sigma_{t_0}}{\tau} = \sqrt{\frac{(ze)}{\sqrt{\pi}A\tau}}. \tag{39}$$

В качестве примера, используя (37)–(39), вычислим среднеквадратичные отклонения при конкретных данных: $A = 0{,}1$ мкА, $\tau = 10$ нс, тогда $\sigma_A / A \approx$ $\approx 1{,}3$ %, $\sigma_\tau / \tau \approx 0{,}8$ %, $\sigma_{t_0} / \tau \approx 0{,}95$ %.

Границы Рао – Крамера для совместных оценок параметров. ГРК при совместных оценках параметров являются диагональные элементы корреляционной матрицы, которая обратна матрице Фишера. Элементы матрицы Фишера задаются формулой [7]

$$F_{\lambda\mu} = \left\langle \frac{\partial L(\lambda)}{\partial\lambda} \frac{\partial L(\mu)}{\partial\mu} \right\rangle. \tag{40}$$

В предыдущем разделе найдены диагональные элементы матрицы Фишера (32), (35), (36). Определим остальные элементы матрицы:

$$F_{A\tau} = \left\langle \frac{\partial L(A)}{\partial A} \frac{\partial L(\tau)}{\partial \tau} \right\rangle = \frac{1}{2(ze)^2 A\tau^3} \left\langle \left(\sum_{i=-m}^{i=+m} n(t_i)\Delta t + \sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)\Delta t}{2A} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{i=-m}^{i=+m} n(t_i)(t_i - t_0)^2 \Delta t + \sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)(t_i - t_0)^2 \Delta t}{2A} \right) \right\rangle \cong \frac{\sqrt{\pi}}{2(ze)}, \tag{41}$$

$$\left\langle \frac{\partial L(A)}{\partial A} \frac{\partial L(t_0)}{\partial t_0} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial L(t_0)}{\partial t_0} \frac{\partial L(\tau)}{\partial \tau} \right\rangle = 0, \tag{42}$$

так как развернутые выражения (42) содержат нечетные степени $(t_i - t_0)$, что приводит к нулевым значениям сумм.

Тогда матрица Фишера и обратная ей корреляционная матрица ошибок соответственно примут вид

$$\mathrm{F}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & \tau & t_0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{\pi\tau}}{2A(ze)} & \frac{\sqrt{\pi}}{2(ze)} & 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2(ze)} & \frac{3\sqrt{\pi A}}{2(ze)\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi A}}{(ze)\tau} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ \tau \\ t_0 \end{array}, \qquad \mathrm{F}^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & \tau & t_0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{3A(ze)}{\sqrt{\pi\tau}} & -\frac{(ze)}{\sqrt{\pi}} & 0 \\ \frac{(ze)}{\sqrt{\pi}} & \frac{\tau(ze)}{\sqrt{\pi A}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau(ze)}{\sqrt{\pi A}} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ \tau \\ t_0 \end{array}.$$

Анализируя последнюю матрицу, можно сделать вывод, что оценки A и τ коррелируют между собой с коэффициентом $-\frac{(ze)}{\sqrt{\pi}}$, а оценки t_0 независимы.

Диагональные элементы корреляционной матрицы ошибок, представляющие собой минимальные дисперсии совместных оценок, позволяют найти следующие выражения для минимально возможных относительных среднеквадратичных отклонений:

$$\frac{\sigma_A}{A}=\sqrt{\frac{3(ze)}{\sqrt{\pi A\tau}}}, \tag{43}$$

$$\frac{\sigma_\tau}{\tau}=\sqrt{\frac{(ze)}{\sqrt{\pi A\tau}}}, \tag{44}$$

$$\frac{\sigma_{t_0}}{\tau}=\sqrt{\frac{(ze)}{\sqrt{\pi A\tau}}}. \tag{45}$$

Анализ (37)–(39) и (43)–(45) показывает, что дисперсии совместных оценок для A и τ в 1,5 раза больше, чем дисперсии несовместных оценок, а для t_0 – совпадают.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Оценка величин $\sum\limits_{i=-m}^{i=+m}\frac{n_1(t_i)(e+)\Delta t}{A}$, $2\sum\limits_{i=-m}^{i=+m}\frac{n_1(t_i)(e+)(t_i-t_0)^2\Delta t}{A}$, $\sum\limits_{i=-m}^{i=+m}\frac{n_1(t_i)(e+)}{2A}(t_i-t_0)\Delta t$. Для оценки вклада $X(A)=\sum\limits_{i=-m}^{i=-m}\frac{n_1(t_i)(e+)\Delta t}{A}$ в выражение (13) найдем ее математическое ожидание и дисперсию.

Как уже упоминалось (10), математическое ожидание $\langle n_1(t)\rangle=0$, откуда следует, что математическое ожидание величины X как суммы членов, содержащих $n_1(t)$, также будет равно нулю. Определим ее дисперсию.

Сначала найдем дисперсию величины $Y_i = n_1(t_i)(e+)$. По определению

$$\sigma_{Y_i}^2 = \langle Y_i^2 \rangle - \langle Y_i \rangle^2 = \langle ((n^2(t_i) - \sigma_i^2)(e+))^2 \rangle - 0 =$$

$$= (\langle n^4(t_i) \rangle - \sigma_i^4)(e+)^2. \tag{П1}$$

Так как случайная величина $n(t_i)$ распределена по нормальному закону, то

$$\left\langle n^4(t_i) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx = 3\sigma_i^4. \tag{П2}$$

Подставляя (П2) в (П1), получим

$$\sigma_{Y_i}^2 = (3\sigma_i^4 - \sigma_i^4)(e+)^2 = 2\sigma_i^4 (e+)^2 = 8\left(\frac{(ze)A}{\Delta t} \right)^2. \tag{П3}$$

Используя формулу дисперсии суммы независимых случайных величин, найдем

$$\sigma_{X(A)}^2 = \sum_{i=-m}^{i=+m} \frac{8\left(\frac{(ze)A}{\Delta t} \right)^2 (\Delta t)^2}{A^2} = 8(ze)^2(2m+1). \tag{П4}$$

Поскольку математическое ожидание суммы $\langle X \rangle = 0$, следует полагать, что вклад этой суммы в уравнение (13) определяется ее флуктуациями с дисперсией (П4). Оценим этот вклад отношением среднеквадратичного отклонения $\sigma_{X(A)}^2$ к третьему весомому слагаемому в (13):

$$\frac{\sigma_{X(A)}}{2\sqrt{\pi}\,\tau A} = \frac{\sqrt{2(2m+1)}\,(ze)}{\sqrt{\pi}\,\tau A}. \tag{П5}$$

Отметим, что принятая нами модель дробового шума в виде случайного процесса с нормальным распределением, соответствующая аналоговому детектированию, предполагает достаточно плотный поток фотоэлектронов с выхода фотодиода, т. е. на «хвостах» гауссова импульса в районе $t = 2\tau$ на каждом элементе квантования Δt должно быть принято не менее 100 фотоэлектронов. Это, в свою очередь, означает, что при вполне реальном периоде квантования $\Delta t = 0{,}1\tau$ амплитуда импульса фототока $A = \frac{1000\,(ze)}{\tau} \exp(4)$. Тогда минимальное общее число электронов $N_e = \frac{\sqrt{\pi}\,\tau A}{(ze)}$, получаемых на всем интервале наблюдения T, составит около 10^5. Таким образом, при значении

$T = 10\tau$ отношение (П5) будет приблизительно равно 0,015 %, что дает основание пренебречь членом $\sum\limits_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)\Delta t}{A}$ в уравнении (13).

Аналогично предыдущим выкладкам приложения можно показать корректность пренебрежения выражениями $2\sum\limits_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)(t_i - t_0)^2 \Delta t}{A}$ и $\sum\limits_{i=-m}^{i=+m} \frac{n_1(t_i)(e+)}{2A}(t_i - t_0)\Delta t$ в уравнениях (16) и (17) соответственно.

Автор выражает благодарность В. С. Соболеву за помощь в постановке задачи и ее решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шереметьев А. Г.** Статистическая теория лазерной связи. М.: Связь, 1971.
2. **Johnson M.** Photodetection and Measurement. N. Y.: McGraw-Hill, 2003.
3. **Карп Ш., Гольярди Р. М.** Оптическая связь. М.: Связь, 1978.
4. **Техника** оптической связи. Фотоприемники /Под ред. У. Тсанга. М.: Мир, 1988.
5. **Курикша А. А.** Квантовая оптика и оптическая локация. М.: Сов. радио, 1973.
6. **Тихонов В. И.** Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
7. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1968.
8. **Minkoff J.** Signal Processing. Boston – London: Artech House, 2002.
9. **Соболев В. С., Прокопенко М. Н.** Максимально правдоподобные оценки частоты и других параметров сигналов лазерных доплеровских измерительных систем, работающих в режиме одночастичного рассеивания // Квантовая электрон. 2000. **30**, № 12. С. 109.

Поступила в редакцию 20 января 2006 г.