Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2006, том 42, № 6

УДК 612.391

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ СИГНАЛОВ С УЧЕТОМ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ ФИЛЬТРОВ

С. Н. Кириллов, С. А. Бахурин

Рязанский государственный радиотехнический университет, г. Рязань
E-mail: snk@riftotels.ryazan.ru

Разработаны алгоритмы восстановления ограниченных во времени сигналов с учетом практической реализуемости импульсной характеристики устройств обработки. Получены синтезирующие функции с меньшим уровнем боковых лепестков, чем у известных функций для одноканальной и двухканальной систем восстановления с использованием отсчетов сигнала и производной ограниченных во времени сигналов. Рассчитаны оптимальные и предложены квазиоптимальные ограниченные во времени синтезирующие функции алгоритма интерполяции, позволяющие учесть ограничения во времени реализации исходного сигнала и практическую реализуемость устройств обработки. Установлено, что применение предложенных алгоритмов позволит снизить среднеквадратическую ошибку интерполяции на 45–60 % для полигармонических сигналов по сравнению с известными алгоритмами в случае одноканальной системы восстановления и на 30 % в случае двухканальной системы восстановления с использованием отсчетов сигнала и производной. Показано, что предложенные синтезирующие функции обладают слабой чувствительностью к изменениям частоты дискретизации в отличие от известных ранее синтезирующих функций.

Введение. Применение цифровых систем передачи и обработки информации позволяет получить потенциально возможные характеристики радиотехнических устройств, но требует преобразования аналогового сигнала в цифровой с последующей интерполяцией на выходе с помощью восстанавливающего фильтра. В настоящее время известны различные методы интерполяции сигналов: на основе функций вида $\mathrm{sinc}(\pi t/\Delta t) = \sin(\pi t/\Delta t)/(\pi t/\Delta t)$, рекомендованных В. А. Котельниковым [1, 2], алгоритма Хургина – Яковлева [2–4], алгоритма Зелкина – Кравченко – Басараба [5], сплайн-интерполяции [6] и др. При практическом применении вышеперечисленных методов возникают проблемы, связанные с ограничением во времени реализации сигнала, а также с требованиями, предъявляемыми к форме передаточной характеристики восстанавливающих фильтров. Поэтому безошибочно восстановить ограниченный во времени сигнал при конечной частоте дискретизации на практике не представляется возможным. Для интерполяции по критерию минимума среднеквадратической ошибки (СКО) необходимо располагать априорной информацией о ковариационной функции восстанавливаемого сигнала [7].

При синтезе вышеперечисленных алгоритмов восстановления не накладывались ограничения на реализуемость устройств обработки и ограниченность реализации восстанавливаемого сигнала. При этом практическая реализация полученных алгоритмов затруднительна и процесс восстановления требует бесконечного числа отсчетов исходного сигнала.

Цель данной работы – создание алгоритма интерполяции по критерию минимума СКО, учитывающего требования к реализуемости восстанавливающих фильтров, а также ограничению реализации исходного сигнала.

Решение задачи интерполяции по критерию минимума СКО при наличии ограничений на реализуемость устройств обработки. Рассмотрим задачу интерполяции по критерию минимума СКО:

$$\int_T M\left\{(\widetilde{u}(t)-u(t))^2\right\}dt \to \min, \tag{1}$$

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания; T – конечный интервал обработки; $u(t)$ – исходный ограниченный во времени сигнал; $\widetilde{u}(t)$ – восстановленный сигнал. Устройство обработки сигнала может быть как одноканальным (с использованием только отсчетов сигнала), так и двухканальным (с применением отсчетов сигнала и его производной). Двухканальная система обработки сигналов была рассмотрена в работах [2–4], однако при этом не учитывались ограничения во времени обрабатываемого сигнала, а также реализуемость импульсной характеристики устройств обработки. В общем случае восстановленный сигнал $\widetilde{u}(t)$ может быть получен на выходе одно- или двухканальной системы интерполяции в следующем виде:

$$\widetilde{u}(t)=\sum_j \left[U_j\, y(t-t_j)+V_j\, z(t-t_j)\right], \tag{2}$$

где $y(t)$ и $z(t)$ – синтезирующие функции канала сигнала и производной соответственно; U_j и V_j – отсчеты исходной реализации сигнала и его производной соответственно, взятые в моменты времени t_j. Если при обработке не учитываются отсчеты производной сигнала V_j, то при условии $V_j=0\ \ \forall j\in Z$ выражение (2) представляет собой реализацию одноканальной системы восстановления сигнала. Для дополнительного учета требований к реализуемости восстанавливающих фильтров при ограниченном во времени сигнале введем ограничение

$$\int_T M\left\{w(t)(\widetilde{u}(t)-u(t))^2\right\}dt = A, \tag{3}$$

где $w(t)$ – весовая функция, учитывающая накладываемые ограничения; A – константа. Например, при $w(t)=kt+pt^2$ первое слагаемое вводит ограничение на «среднюю задержку», а второе – на «степень сосредоточения» восстановленного сигнала относительно исходного; k, p – коэффициенты, учитывающие вес первого и второго слагаемого.

Поскольку при применении известных алгоритмов интерполяции для решения задачи восстановления ограниченного во времени сигнала возникающие ошибки усечения на конечном интервале обработки T распределены неравномерно, то использование в ограничении (3) квадратичного члена позволяет распределить вес ошибок усечения на этом интервале. С одной стороны, известно, что основная часть энергии ошибок усечения сосредоточена в начале и в конце интервала обработки, а значит, соответствующим выбором параметра p можно добиться перераспределения ошибки на интервале обработки и тем самым снизить влияние эффекта усечения.

С другой стороны, выбор коэффициента k при члене первой степени позволяет внести ограничение на задержку сигнала на выходе устройства обработки, что также накладывает ограничение на длительность импульсной характеристики восстанавливающего фильтра и синтезирующей функции.

Для получения практически реализуемых восстанавливающих фильтров необходимо, чтобы синтезирующая функция была ограничена во времени, а также бесконечно дифференцируема [8]. Ограничение (3) при соответствующем выборе коэффициентов весовой функции $w(t)$ приводит к увеличению скорости спада и уменьшения уровня боковых лепестков синтезирующей функции, т. е. учитывает требования к практической реализуемости восстанавливающих фильтров.

Пусть в качестве математической модели сигнала используется случайный процесс (СП). Тогда, подставляя выражение (2) для восстановленного сигнала в выражения (1) и (3), получим задачу минимизации функционала

$$J = \int_T M\left\{\left(\sum_j \left[U_j\, y(t-t_j) + V_j\, z(t-t_j)\right] - u(t)\right)^2\right\} dt \to \min, \qquad (4)$$

которая при наличии ограничения

$$\int_T M\left\{w(t)\left(\sum_j \left[U_j\, y(t-t_j) + V_j\, z(t-t_j)\right] - u(t)\right)^2\right\} dt = A \qquad (5)$$

относится к классу изопериметрических задач вариационного исчисления [9].

Для решения поставленной задачи методом множителей Лагранжа необходимо учесть ограничения в основном функционале J, а затем составить систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y} F(y, z, t) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial z} F(y, z, t) = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

где функционал $F(y, z, t)$ с учетом ограничения (5) имеет вид

$$F(y, z, t) = M\left\{(1+\lambda w(t))\left(\sum_j \left[U_j\, y(t-t_j) + V_j\, z(t-t_j)\right] - u(t)\right)^2\right\} \qquad (7)$$

(здесь λ – множитель Лагранжа).

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial y}(1+w(t))=0;\quad \frac{\partial}{\partial z}(1+w(t))=0;\quad \frac{\partial}{\partial y}(z(t))=0;$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(u(t))=0;\quad \frac{\partial}{\partial z}(y(t))=0;\quad \frac{\partial}{\partial y}(u(t))=0, \tag{8}$$

и меняя местами операции дифференцирования и математического усреднения, получим:

$$\frac{\partial}{\partial y}F(y,z,t)=M\left\{2(1+\lambda w(t))\left(\sum_j\left[U_j\,y(t-t_j)+V_j\,z(t-t_j)\right]-u(t)\right)U_i\right\};$$
$$\frac{\partial}{\partial z}F(y,z,t)=M\left\{2(1+\lambda w(t))\left(\sum_j\left[U_j\,y(t-t_j)+V_j\,z(t-t_j)\right]-u(t)\right)V_i\right\}. \tag{9}$$

С учетом оператора математического усреднения введем следующие обозначения:

$$P(t-t_j)=1+\lambda w(t-t_j);\quad M\{U_jU_i\}=\Gamma_{ji};\quad M\{u(t)U_i\}=\Gamma(t,t_i);$$
$$M\{U_jV_i\}=R_{ji};\quad M\{u(t)V_i\}=R(t,t_i);\quad M\{V_jV_i\}=K_{ji}; \tag{10}$$
$$D_\Gamma(t,t_i)=P(t-t_i)\Gamma(t,t_i);\quad D_R(t,t_i)=P(t-t_i)R(t,t_i),$$

где $P(t-t_j)=1+\lambda w(t-t_j)$; Γ_{ji} – отсчеты корреляционной функции исходного СП $\Gamma(t,t_i)$, взятые в момент времени t_j; $R(t,t_i)=\partial\Gamma(t,t_i)/\partial t$ – взаимная корреляционная функция СП и его производной; $K(t,t_i)=\partial^2\Gamma(t,t_i)/\partial t^2$ – корреляционная функция производной СП; R_{ji} и K_{ji} – отсчеты $R(t,t_i)$ и $K(t,t_i)$ соответственно; $D_\Gamma(t,t_i)$ и $D_R(t,t_i)$ – приведенные корреляционные функции, учитывающие ограничения во времени реализации СП. Тогда система уравнений Эйлера, позволяющая определить форму синтезирующих функций $y(t)$ и $z(t)$, может быть записана в виде

$$\begin{cases}\sum_j P(t-t_j)y(t-t_j)\Gamma_{ji}+\sum_j P(t-t_j)z(t-t_j)R_{ji}=D_\Gamma(t,t_i);\\ \sum_j P(t-t_j)y(t-t_j)R_{ji}+\sum_j P(t-t_j)z(t-t_j)K_{ji}=D_R(t,t_i).\end{cases} \tag{11}$$

Для вычисления оптимальных синтезирующих функций необходимо наличие априорных сведений о корреляционной функции исходного СП $\Gamma(t,t_i)$, взаимной корреляционной функции СП и его производной $R(t,t_i)=\partial\Gamma(t,t_i)/\partial t$, а также корреляционной функции производной СП $K(t,t_i)=\partial^2\Gamma(t,t_i)/\partial t^2$. На практике реализации СП ограничены во времени, а значит, оценка корреляционных свойств СП будет сопровождаться ошибками усечения и наложения и полученные в результате решения системы уравнения Эйлера (11) синтезирующие функции будут неоптимальными. В связи с этим можно сформулировать задачу получения оптимальных и квазиоптимальных синтезирующих функций при ограничении во времени реализаций СП.

Получение оптимальных и квазиоптимальных синтезирующих функций при ограниченной во времени реализации СП. Практическое применение алгоритмов восстановления сигнала требует ограничения реализации СП. В этом случае исходную реализацию СП можно представить в виде

$$u(t) = u_{\infty}(t)p(t), \tag{12}$$

где $u_{\infty}(t)$ – бесконечная во времени реализация СП с ограниченным в интервале $\Delta\omega$ спектром $S_{\text{ф}}(\omega)$, а $p(t)=1$, если $t \in T$, и $p(t)=0$, если $t \notin T$. Тогда, исходя из свойств преобразования Фурье, спектр $S_u(\omega)$ ограниченной во времени реализации СП $u(t)$ можно представить следующим образом:

$$S_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ф}}(\theta) S_p^*(\theta-\omega)\,d\theta = \int_{\Delta\omega} S_{\text{ф}}(\theta) S_p^*(\theta-\omega)\,d\theta. \tag{13}$$

Поскольку спектр $S_p(\omega)$ импульса $p(t)$ бесконечен по частоте, то и спектр $S_u(\omega)$ также является бесконечным. После дискретизации спектр исходного СП $S_u(\omega)$ становится периодическим:

$$S_u^{\text{д}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_u(\omega - k2\pi/\Delta t). \tag{14}$$

Так как ограниченный во времени СП $u(t)$ обладает бесконечной по частоте спектральной плотностью мощности (СПМ) $\left|S_u(\omega)\right|^2$, то безошибочное восстановление СП $u(t)$ невозможно. В этом случае восстановленный СП $\widetilde{u}(t)$ является аппроксимацией исходного СП $u(t)$. Для того чтобы остаться в рамках задачи интерполяции, т. е. обеспечить совпадение восстановленного и исходного СП в узлах дискретизации, потребуем, чтобы СПМ исходного СП $\left|S_u(\omega)\right|^2$ представлялась в виде свертки СПМ СП типа белого шума, ограниченного по полосе, и СПМ $\left|S_r(\omega)\right|^2$ некоторого стационарного эргодического СП $r(t)$:

$$\left|S_u(\omega)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|S_{\text{БШ}}(\alpha)\right|^2 \left|S_r(\alpha-\omega)\right|^2 d\omega. \tag{15}$$

Согласно уравнению Винера – Хинчина, а также с учетом свойств преобразования Фурье свертка в частотной области СПМ (15) может быть представлена во временной области произведением корреляционных функций, т. е. корреляционная функция $R_u(t)$ исходного СП имеет вид

$$R_u(t) = R_r(t)\operatorname{sinc}(\pi t/\Delta t), \tag{16}$$

где $R_r(t)$ – корреляционная функция СП $r(t)$. Тогда из уравнения (11) с учетом корреляционной функции $D_{\Gamma}(t,t_i) = R_u(t-t_i)$, а также $\Gamma_{ji} = \delta_{ji}$, поскольку дискретизация осуществляется в узлах корреляционной функции СП (16), синтезирующую функцию для одноканальной системы можно представить как

$$y(t) = R_u(t) = R_r(t)\mathrm{sinc}(\pi t/\Delta t), \tag{17}$$

а для двухканальной – как

$$y(t) = R_r(t)[\mathrm{sinc}(\pi t/\Delta t)]^2; \qquad z(t) = R_r(t)t[\mathrm{sinc}(\pi t/\Delta t)]^2. \tag{18}$$

Согласно выражениям (17) и (18) множитель $\mathrm{sinc}(\pi t/\Delta t)$ обеспечивает совпадение восстановленного и исходного СП в узлах дискретизации. Таким образом, задача определения оптимальных синтезирующих функций сводится к расчету корреляционной функции $R_r(t)$.

На практике для определения корреляционной функции $R_r(t)$ необходимо решать обратную задачу определения СПМ $|S_r(\omega)|^2$, т. е. из уравнения (15) по известной СПМ $|S_u(\omega)|^2$ ограниченного во времени СП определить СП с такой СПМ, которая в результате свертки с СПМ $|S_{БШ}(\omega)|^2$ обеспечивала бы наилучшее приближение к $S_u(\omega)$ в заданной метрике (1). Уравнение типа свертки (15) относится к интегральным уравнениям Фредгольма I рода, тогда задача определения СПМ $|S_r(\omega)|^2$ является некорректно поставленной, как показано в [10]. Если воспользоваться методом регуляризации Тихонова [10], то решение поставленной задачи во временной области можно представить как

$$R_r(t) = [\Gamma(t)/\mathrm{sinc}(\omega_в t)]R(t, Q(t)), \tag{19}$$

где $R(t, Q(t))$ – стабилизирующий множитель вида

$$R(t, Q(t)) = \mathrm{sinc}^2(\omega_в t)/(\mathrm{sinc}^2(\omega_в t) + \alpha Q(t)). \tag{20}$$

Здесь $Q(t)$ – стабилизатор, $\omega_в$ – верхняя частота СПМ $|S_{БШ}(\omega)|^2$, α – коэффициент при стабилизаторе.

Таким образом, решение данной задачи требует наличия априорных сведений о форме СПМ $|S_u(\omega)|^2$, причем от точности оценки этой СПМ напрямую зависит ошибка восстановления. Поскольку часто на практике априорные сведения о форме СПМ восстанавливаемого СП отсутствуют, а оценку СПМ невозможно произвести с требуемой точностью из-за малой размерности выборки исходного СП, то получить оптимальные синтезирующие функции на приемной стороне затруднительно. Рассмотрим возможность определения формы весового множителя $R_r(t)$ в виде

$$R_0(t) = P_n(t)/P_m(t), \quad m > n, \ t \in T_и, \tag{21}$$

где

$$P_n(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i t^{2i}; \qquad P_m(t) = 1 + \sum_{i=1}^{m} b_i t^{2i}; \tag{22}$$

$T_{\text{и}}$ – интервал обработки. Тогда при заданных значениях m и n требуется определять квазиоптимальные весовые множители $R_0(t)$ путем оптимизации коэффициентов полиномов $P_n(t)$ и $P_m(t)$. Квазиоптимальная синтезирующая функция для одноканальной системы восстановления имеет вид

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{P_n(t-T_{\text{и}})}{P_m(t-T_{\text{и}})}\operatorname{sinc}(\pi(t-T_{\text{и}})/\Delta t), & t\in[0,2T_{\text{и}}];\\ 0, & t\notin[0,2T_{\text{и}}],\end{cases} \tag{23}$$

а для двухканальной системы восстановления

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{P_n(t-T_{\text{и}})}{P_m(t-T_{\text{и}})}[\operatorname{sinc}(\pi(t-T_{\text{и}})/\Delta t)]^2, & t\in[0,2T_{\text{и}}];\\ 0, & t\notin[0,2T_{\text{и}}],\end{cases}$$

$$z(t)=\begin{cases}\dfrac{P_n(t-T_{\text{и}})}{P_m(t-T_{\text{и}})}(t-T_{\text{и}})[\operatorname{sinc}(\pi(t-T_{\text{и}})/\Delta t)]^2, & t\in[0,2T_{\text{и}}];\\ 0, & t\notin[0,2T_{\text{и}}].\end{cases} \tag{24}$$

Из анализа выражений (23) и (24) следует, что квазиоптимальные синтезирующие функции являются ограниченными во времени и бесконечно дифференцируемыми, а, значит, соответствующие им восстанавливающие фильтры являются реализуемыми.

В качестве квазиоптимальных синтезирующих функций могут также выступать функции других классов, например финитные во времени атомарные функции [5]. Как пример рассмотрим методику выбора весового множителя для получения синтезирующих функций класса атомарных функций up(t) [5]. В этом случае выражение (17) имеет вид

$$y_{\text{а}}(t)=\begin{cases}R_{\text{а}}(t-T_{\text{и}})\operatorname{sinc}(\pi(t-T_{\text{и}})/\Delta t), & t\in[0,2T_{\text{и}}];\\ 0, & t\notin[0,2T_{\text{и}}],\end{cases} \tag{25}$$

где весовой множитель

$$R_{\text{а}}(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\operatorname{sinc}(2\pi t/\Delta t2^{-k})/\operatorname{sinc}(\pi t/\Delta t)=\prod_{k=2}^{\infty}\operatorname{sinc}(2\pi t/\Delta t2^{-k}). \tag{26}$$

Таким образом, весовой множитель $R_{\text{а}}(t)$ (26) представляет собой также масштабированную во времени атомарную функцию up(t). Данная процедура может быть использована для решения задачи быстрого масштабирования атомарных функций up(t), широко применяемых при аппроксимации диаграмм направленности антенн [5]. Аналогично можно получить выражения для весового множителя $R_r(t)$ при использовании синтезирующих функций других классов.

Экспериментальные исследования алгоритмов интерполяции ограниченных СП. Проводились экспериментальные исследования алгоритма интерполяции с помощью синтезирующих функций (23) для одноканальной системы и полигармонического исходного сигнала

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i), \tag{27}$$

где A_i – амплитуды гармоник, равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$; f_i – частоты гармоник, равномерно распределенных на интервале $[0, 0{,}5]$ Гц; φ_i – начальная фаза гармоники, равномерно распределенная на интервале $[0, 2\pi]$ рад; $N = 10$ – количество гармоник сигнала в эксперименте. Такая модель исходного сигнала является наиболее общей, поскольку охватывает весь заданный диапазон частот и амплитуд спектральных составляющих сигнала. Порядок полиномов (22) выбирался исходя из требуемой точности восстановления: $n = 3$, $m = 4$, при этом была произведена предварительная оптимизация коэффициентов a_i, $i = 1, \ldots, n$, и b_j, $j = 1, \ldots, m$, при усреднении по ансамблю из 500 реализаций СП. На рис. 1 показаны зависимости нормированной к энергии сигнала СКО восстановления η и нормированной максимальной по модулю ошибки (ММО) $\Delta = \Delta_{\max} / \sqrt{E}$ (E – энергия сигнала) от нормированной частоты дискретизации ограниченного во времени сигнала $F_{\text{н}} = F_{\text{д}} / F_{\text{К}}$, где $F_{\text{д}}$ – частота дискретизации, $F_{\text{К}} = 2F_{\text{в}}$ – частота Котельникова. При моделировании были использованы синтезирующие функции вида $\operatorname{sinc}(\pi t / \Delta t)$, функции (23), а также атомарные функции $\mathrm{up}(t)$ и кубические сплайны.

Предварительно для заданного класса сигналов методом регуляризации с использованием стабилизатора вида

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{M} q_k t^{2k} \tag{28}$$

были получены оптимальные синтезирующие функции при $F_{\text{д}} \approx F_{\text{К}}$. Коэффициент при стабилизаторе α и параметры стабилизатора q_k, $k = 1, \ldots, M$, предварительно оптимизировались по критерию минимума СКО.

Как следует из анализа зависимостей, приведенных на рис. 1, применение синтезирующих функций (23) позволяет снизить СКО и ММО на 45–60 % в зависимости от выбора порядка полиномов аппроксимации. Увеличе-

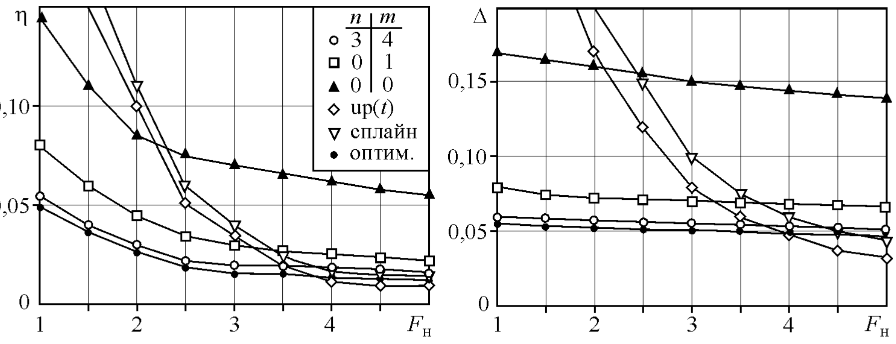

Рис. 1

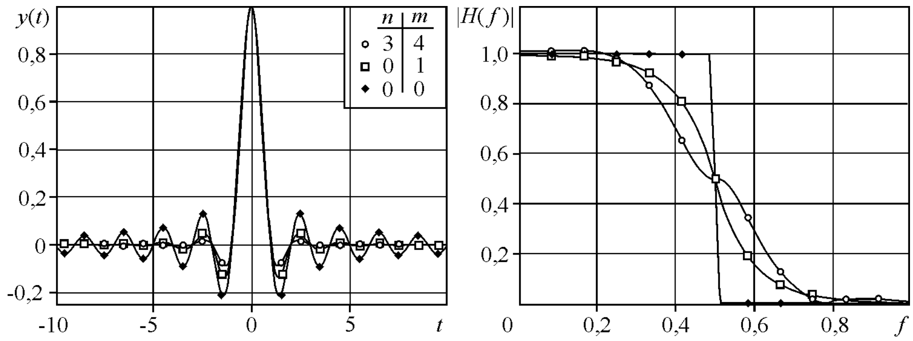

Рис. 2

ние частоты дискретизации до $(3-4)F_{\text{К}}$ делает целесообразным применение атомарных функций $\text{up}(t)$ и сплайнов ввиду более высокой скорости спада ошибок восстановления с увеличением частоты дискретизации.

При этом представление весового множителя в виде дробно-рациональной функции (21) с увеличением порядка полиномов числителя и знаменателя обеспечивает достаточно быстрое приближение к оптимальному весовому множителю, и уже при $n=3,\ m=4$ уменьшение СКО при использовании квазиоптимальной синтезирующей функции составило менее 0,005, а уменьшение ММО – 0,007. Это позволяет применить предложенный алгоритм в случае, когда априорная информация о форме СПМ исходного СП отсутствует, а параметры квазиоптимального весового множителя можно определить путем оптимизации коэффициентов полиномов (22) весового множителя. Также необходимо отметить, что при использовании синтезирующих функций (23) наблюдается слабая зависимость нормированной ММО от частоты дискретизации.

Вид квазиоптимальных синтезирующих функций и соответствующие им амплитудно-частотные характеристики восстанавливающих фильтров представлены на рис. 2.

Поскольку уровень боковых лепестков полученных синтезирующих функций ниже, чем уровень боковых лепестков синтезирующей функции вида $\text{sinc}(\pi t/\Delta t)$, то их применение позволит уменьшить ошибки усечения и наложения, а также обеспечить реализуемость устройств обработки.

Как следует из рис. 2, квазиоптимальные восстанавливающие фильтры могут быть реализованы как ФНЧ относительно невысокого порядка в отличие от нереализуемого идеального ФНЧ.

Аналогичные исследования, проведенные для двухканальной системы восстановления, показали, что применение квазиоптимальных синтезирующих функций канала сигнала и производной приводит к уменьшению ошибок восстановления на 30 % по сравнению с известным алгоритмом Хургина – Яковлева. При этом синтезирующие функции (23) и (24), как и в случае одноканальной системы, являются ограниченными и бесконечно дифференцируемыми, а соответствующие им восстанавливающие фильтры – реализуемыми.

Заключение. В результате решения задачи идеальной интерполяции по критерию минимума СКО при ограничениях на реализуемость устройств обработки и ограниченность реализации СП получено семейство синтезирующих функций, зависящих от параметров весового множителя $R_r(t)$.

Для случая ограниченной во времени реализации СП оптимальный вид весового множителя может быть определен на основании априорных сведений о СПМ исходного СП. При отсутствии таковых квазиоптимальный весовой множитель может иметь дробно-рациональный вид, при этом коэффициенты полинома определяются путем оптимизации при усреднении по ансамблю реализаций СП.

Представлена возможность получения синтезирующих функций других классов с помощью соответствующего выбора весового множителя $R_{\text{а}}(t)$ на примере атомарных функций $\text{up}(t)$.

Для полигармонического сигнала показана возможность снижения СКО и ММО восстановления на 45–60 % при использовании синтезирующих функций (23) с частотой дискретизации $(1-3)F_{\text{К}}$, а при ее увеличении до $(3-5)F_{\text{К}}$ – целесообразность применения атомарных функций и сплайнов.

Приведены импульсные и амплитудно-частотные характеристики восстанавливающих фильтров и нереализуемого идеального ФНЧ, соответствующего синтезирующим функциям $\text{sinc}(\pi t/\Delta t)$.

Применение синтезирующих функций (24) для случая двухканальной системы восстановления приводит к уменьшению ошибки восстановления для полигармонического сигнала на 30 % по сравнению с известным алгоритмом Хургина – Яковлева, а также обеспечивает реализуемость устройств обработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Котельников В. А.** О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи (факсимильная статья 1932 г.) // Радиотехника. 1995. № 4, 5.
2. **Джерри А. Дж.** Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения // ТИИЭР. 1977. **65**, № 11. С. 53.
3. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
4. **Кириллов С. Н., Дмитриев В. Т.** Реализационные возможности и помехоустойчивость процедуры восстановления сигналов на основе алгоритма Хургина – Яковлева // Радиотехника. 2003. № 1. С. 73.
5. **Басараб М. А., Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Яковлев В. П.** Аппроксимация финитными функциями и теорема Уиттекера – Котельникова – Шеннона в цифровой обработке сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. 2003. № 9. С. 3.
6. **Василенко В. А.** Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983.
7. **Мановцев А. П.** Основы теории радиотелеметрии. М.: Энергия, 1973.
8. **Кириллов С. Н., Бузыканов С. Н.** Алгоритм дискретного спектрального анализа сигналов в модифицированном пространстве Соболева // Автометрия. 2003. **39**, № 1. С. 88.
9. **Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И.** Вариационное исчисление. М.: УРСС, 2002.
10. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 27 декабря 2005 г.