Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2006, том 42, № 5

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НАУЧНЫХ И ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРИМЕНЕНИЙ

УДК 62-50:519.2

О НЕЯВНОМ ДООПРЕДЕЛЕНИИ И «ПРАВОСТОРОННИХ» РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ *

И. А. Финогенко

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
E-mail: fin@icc.ru

Развивается теория «правосторонних» решений для одного класса дифференциальных уравнений, к которым сводятся системы Лагранжа второго рода с разрывными управлениями. Структура управлений определяется из решения задачи синтеза систем управления механическими объектами на основе принципа декомпозиции. Предлагается неявный метод однозначного доопределения управлений в точках разрыва. Изучаются общие вопросы существования «правосторонних» решений и их свойства: единственность, продолжимость, непрерывная зависимость от начальных состояний и параметров, устойчивость.

Введение. Рассмотрим механическую систему с k степенями свободы, уравнения движения которой в развернутой векторной форме имеют вид

$$A(t,q)\ddot{q} = g(t,q,\dot{q}) + Q^A(t,q,\dot{q}) + B(t,q)u, \tag{1}$$

где $q=(q_1,\dots,q_k)^T$, $\dot{q}=(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k)^T$, $\ddot{q}=(\ddot{q}_1,\dots,\ddot{q}_k)^T$ – векторы обобщенных координат скоростей и ускорений $Q^A=(Q_1^A,\dots,Q_k^A)^T$; $g=(g_1,\dots,g_k)^T$ – непрерывные вектор-функции, которые описывают силы, действующие на систему; $A(t,q)=\left\|a_{ij}(t,q)\right\|_{i,\,j=1}^{k}$ – матрица коэффициентов инерции квадратичной формы обобщенных скоростей в выражении кинетической энер-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00247) и Президиума РАН (Программа фундаментальных исследований № 22 (проект 2.5)).

гии. Функция $u=(u_1, \ldots, u_k)^T$ задает управляющие силы, матрица $B = \left\| b_{ij}(t,q,\dot q)\right\|_{i,\ j=1}^{k}$ не выrождена. Функции $a_{ij}(t,q)$ и $b_{ij}(t,q,\dot q)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов.

На управление u_i накладываются ограничения вида

$$\left|u_i\right| \le H_i(t,q,\dot q), \quad i=\overline{1,k}, \tag{2}$$

где $H_i = H_i(t,q,\dot q) \ge 0$ – некоторые непрерывные функции. Все указанные выше условия предполагаются выполненными в области $\Omega \subset R^{2k+1}$ изменения переменных $(t,q,\dot q)$.

Структура управлений u_i определяется следующей задачей синтеза систем управления механическими системами на основе принципа декомпозиции [1]: требуется найти такие управления u_i, которые (в рамках некоторых дополнительных предположений) обеспечивали бы достижение движениями системы (1) гладкого многообразия (целевого множества) вида

$$S = \left\{(t,q,\dot q) \in \Omega:\ \dot q_i = f_i(t,q),\ \ i=\overline{1,k}\right\}. \tag{3}$$

Примем $\varphi_i = \dot q_i - f_i(t,q)$ и в качестве меры отклонения движений системы (1) от множества (3) выберем квадратичную форму

$$\upsilon_\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{k} c_{ij}(t,q)\varphi_i\varphi_j \tag{4}$$

с положительно-определенной, симметричной, непрерывно дифференцируемой матрицей $C_\varphi(t,q)=\left\| c_{ij}(t,q)\right\|_{i,\ j=1}^{k}$. Управление находится из условия минимума производной $\dot\upsilon_\varphi$ в силу системы (1) и имеет вид

$$u_i = -H_i \operatorname{sign}\chi_i, \quad i=\overline{1,k}, \tag{5}$$

при $\chi_i \ne 0$, где $\chi_i = \chi_i(t,q,\dot q)$ – непрерывно дифференцируемые функции. (Такие управления называются оптимальными по отношению к демпфированию функции υ_φ.)

Замечание 1. Обычно ограничение на ресурс управления имеет вид $\left|u_i\right| \le u_{i\max}$, где $u_{i\max} = \text{const}$. В теории систем с переменной структурой значения $u_{i\max}$ называются коэффициентами усиления, которые могут быть также и переменными величинами [2, с. 325]. Пример системы управления скоростью движения подводного аппарата с зависящим от скорости коэффициентом усиления можно найти в [3, с. 154]. Кроме того, к уравнениям вида (1) с матрицей $B(t,q)=E$ приводятся уравнения движения некоторых механических систем с кулоновым трением скольжения (см. разд. 3). Тогда функция $H_i = f_i\left|N_i\right|$, где f_i – коэффициенты трения, а N_i – обобщенные реакции связей с трением. Коэффициенты трения могут зависеть от скорости скольжения, а также от состояния системы и времени, если учитывать изменение температуры трущихся поверхностей и взаимное расположение трущихся тел с разной обработкой на различных участках соприкасающихся поверхностей и т. п. [4, с. 90]. Реакции связей в общем случае являются функцией от переменных $(t, q, \dot{q})$. Все вышеизложенное указывает на то, что предположение о постоянстве коэффициентов H_i сузило бы класс рассматриваемых задач.

З а м е ч а н и е 2. В задачах классической механики систем тел обобщенные силы, действующие на систему, являются функциями $(t, q, \dot{q})$. Коэффициенты матрицы $A(t,q)$ могут быть функциями переменных (t,q) [4, с. 138]. Структура активных сил $Q^A(t, q, \dot{q})$, действующих на голономную механическую систему, детально описана в [5, с. 92]. Они могут включать в себя потенциальные силы, силы радиальной коррекции, сопротивления демпферов и среды, неупругого сопротивления и другие силы, а также возмущающие силы любой физической природы. Функция $g(t, q, \dot{q})$ возникает при преобразовании выражения для кинетической энергии системы, представленной уравнениями Лагранжа второго рода, и описывает обобщенные гироскопические силы и переносные силы инерции [4, с. 93; 5]. Способы получения информации о динамических параметрах объекта управления (инерционных характеристиках, внешних силах), представленного уравнениями (1), не рассматриваются в данной работе. Некоторые проблемы, возникающие при описании систем управления механическими объектами вида (1), обсуждаются в [6]. В данной работе мы стремимся придать функциям, описывающим систему (1), наибольшую общность.

Введем обозначения $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)^T$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$, $D^T = B^T A^{-1} C_\varphi$. Легко проверить, что

$$\chi = D^T \varphi. \tag{6}$$

Условие минимума производной $\dot{\upsilon}_\varphi$ способа определения u_i при $\chi_i = 0$ не дает, поэтому управления u_i при условии $\chi_i = 0$ не определены. Система (1) с управлениями (5) представляет собой систему дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной правой частью.

Примером такой задачи могут служить уравнения динамики многозвенного робота-манипулятора [6]. Цели управления разнообразны: стабилизация заданного положения системы, движение по заданной траектории и др.

В случае, когда $C_\varphi = A$, получаем закон управления в виде

$$u_i = -H_i \operatorname{sign} \sum_{j=1}^{n} b_{ji}(\dot{q}_i - f_i(t, q)), \quad i = \overline{1, k}.$$

Если к тому же $B = E$, то $u_i = -H_i \operatorname{sign}(\dot{q}_i - f_i(t, q))$, $i = \overline{1, k}$. Такие управления рассматривались в [1, 6, 7].

Преобразуем уравнения (1) следующим образом: от переменной $\dot{q}$ перейдем к новой переменной χ по формуле (6), оставляя переменные t и q без изменения. После преобразований уравнения (1) примут вид

$$\begin{cases} \widetilde{P}(t,q,\chi)\dot{\chi} = \widetilde{R}(t,q,\chi) + u; \\ \dot{q} = \widetilde{F}(t,q,\chi), \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\widetilde{P} = [B^T A^{-1} C_\varphi A^{-1} B]^{-1}, \qquad \widetilde{R} = \widetilde{P}(J_{t,\chi} + J_{q,\chi}\dot{q}) + B^{-1}(g + Q^A),$$

$$\widetilde{F} = \varphi^T C_\varphi [J_{t,\varphi} + J_{q,\varphi}\dot{q} + A^{-1}(g + Q^A)] + \frac{1}{2}\varphi^T \dot{C}_\varphi \varphi$$

– непрерывные векторные функции; $J_{t,\chi}$, $J_{q,\chi}$, $J_{t,\varphi}$, $J_{q,\varphi}$ – векторы частных производных по t и матрицы частных производных по q_i функций χ_i и φ_i соответственно. Вектор управления определится формулой (5). Во всех матрицах и функциях переменные q_i заменены переменными χ_i.

Уравнения (7) входят в более общий класс управляемых систем, который будет рассматриваться далее:

$$P(t,x)\dot{x} = R(t,x) + u, \tag{8}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор фазовых переменных; $P(t,x) = [p_{ij}(t,x)]_1^n$ – симметричная, положительно-определенная $n \times n$ матрица; $R(t,x) = (R_1(t,x), \ldots$ $\ldots, R_n(t,x))^T$ – непрерывная векторная функция; $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$, $u_i =$ $= -H_i \operatorname{sign} x_i$, $H_i(t,x) \geq 0$ – непрерывные функции.

В данной работе изучаются вопросы существования, общие свойства и устойчивость «правосторонних» решений уравнения (8) (определение правосторонних решений дается в разд. 1). Необходимость изучения именно правосторонних решений обусловлена тем, что применительно к уравнениям движения механических систем они имеют содержательный физический смысл: правая производная скорости представляет собой обобщенное ускорение.

1. Неявный метод доопределения разрывных систем. В правую часть уравнения (8) входят управления, разрывные на подпространствах $x_i = 0$. В более общих ситуациях управления могут быть разрывными на гладких поверхностях, которые при помощи замены переменных могут быть преобразованы в подпространства. Один из наиболее разработанных методов определения решения уравнений с разрывными правыми частями состоит в их выпуклом многозначном доопределении в точках разрыва и переходе к уравнениям в контингенциях (дифференциальным включениям) [8]. Впервые этот метод был предложен в [9]. Применительно к уравнениям (8) выпуклое многозначное доопределение приводит к дифференциальному включению

$$P(t,x)\dot{x} \in R(t,x) + U(t,x), \tag{9}$$

где множество $U = U(t,x)$ определяется равенством

$$U = \left\{ u = (u_1, \ldots, u_n)\colon\ u_i = -H_i \operatorname{sign} x_i,\ \ x_i \neq 0;\ \ |u_i| \leq H_i,\ \ x_i = 0 \right\}.$$

Тогда под решением уравнения (8) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, производная которой почти всюду удовлетворяет включению (9). Это наиболее общий тип абсолютно непрерывных решений – решение Каратеодори. Классификация и сравнительный анализ различных типов решений разрывных систем даны в [5, с. 272].

Отметим, что классических решений с непрерывной производной для уравнения (8) в общем случае не существует, так как в точках разрыва функций u_i направление движения системы меняется скачкообразно. Поэтому в классе решений Каратеодори можно надеяться на существование лишь решений с односторонними производными. В данной ситуации наиболее подходящими являются правосторонние решения.

О п р е д е л е н и е. Под правосторонним решением уравнения (8) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, найденную на некотором промежутке $[t_0, t_1)$ и удовлетворяющую начальному состоянию $x(t_0) = x_0$, правая производная $D^+x(t)$ которой определена, непрерывна справа и удовлетворяет включению

$$P(t, x(t))D^+x(t) \in R(t, x(t)) + U(t, x(t)) \tag{10}$$

в каждой точке $t \in [t_0, t_1)$.

Правосторонние решения разрывных систем с одной поверхностью разрыва изучались в [5]. Если таких поверхностей больше, то вектор производной решения на их пересечении задается в неявном виде. Изучение правосторонних решений в данной работе основано на неявном методе доопределения правой части уравнения (8), описание которого дается далее.

Рассмотрим n-мерный параметр z и определим функции $u_i^*(t, x, z)$ в каждой точке (t, x, z) по следующим правилам:

а) если $x_i = 0$, то $u_i^* = -H_i \operatorname{sign} z_i$ для любого $z_i \neq 0$ и $u_i^* \in [-H_i, H_i]$ произвольно для $z_i = 0$;

б) если $x_i \neq 0$, то $u_i^* = -H_i \operatorname{sign} x_i$.

Сформируем вектор $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)^T$ и множество всех векторов u^*, удовлетворяющих условиям «а» и «б», обозначим $U^*(t, x, z)$.

Теорема 1. Для каждой фиксированной точки (t, x) существует единственное решение $z(t, x)$ многозначного алгебраического уравнения

$$P(t, x)z \in R(t, x) + U^*(t, x, z). \tag{11}$$

Дифференциальное включение (9) и дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = z(t, x) \tag{12}$$

эквивалентны, т. е. имеют одни и те же решения.

Теорема 1 следует из теорем 1–3 первой части работы [10], если заметить, что представленный выше метод определения функций u_i^* применительно к уравнению (8) соответствует общей неявной схеме доопределения разрывных систем управления вида $\dot{x} = f(t, x, u_1, \ldots, u_r)$ с кусочно-непрерывными управлениями $u_i(t, x)$, предложенной в [10].

Так как дифференциальное включение (9) имеет решения Каратеодори, то из теоремы 1 следует, что и уравнение (12) их также имеет для любых начальных данных (t_0, x_0). Отметим, что уравнение (12) может быть представлено в виде неявного дифференциального включения

$$P(t, x)\dot{x} \in R(t, x) + U^*(t, x, \dot{x}). \tag{13}$$

2. Основные результаты.

Теорема 2. Любое абсолютно непрерывное решение уравнения (12) является правосторонним [10].

Теорема 3. Пусть функции $p_{ij}(t,x)$, $R_i(t,x)$, $H_i(t,x)$, представленные в (8), являются локально-липшицевыми относительно переменной x. Тогда уравнение (12) обладает свойством правой единственности, т. е. для любой точки (t_0, x_0) существует $t_1 > t_0$ такое, что каждые два решения уравнения (12) с одинаковыми начальными условиями $x(t_0) = x_0$ совпадают для всех $t \in [t_0, t_1)$ [10].

Из теорем 1 и 2 следует, что существует решение задачи (10) и уравнение (8) имеет только правосторонние решения. Как видно из (13), функции $u_i(t,x)$ в точках разрыва зависят от производных $\dot{x}_i$. Но это обусловлено лишь методом доопределения уравнения (8). Более того, неявный метод доопределения управлений u_i, описанный выше, является необходимым по отношению к существованию правосторонних решений, т. е. если для любого начального состояния существует правостороннее решение дифференциального включения (10), то в каждой точке разрыва выполняется равенство $u_i(t,x) = u_i^*(t,x,z)$, где z – решение алгебраического включения (11). В тех ситуациях, когда существует решение $z = 0$, оно определяет эквивалентные управления $u_i^{\mathrm{eq}}(t,x) = u_i^*(t,x,0)$, как в работе [11].

Вернемся к уравнению (1), которое описывает движение механической системы. Все свойства правосторонних решений уравнения (8) справедливы и для решений уравнения (1). Дополнительно сформулируем теорему об устойчивости множества (3).

Пусть $B(t,x) = E$ – единичная матрица и $C_\varphi(t,q) = A(t,q)$. Тогда управление u_i в формуле (5) примет вид $u_i = -H_i \operatorname{sign}(\dot{q}_i - f_i(t,q))$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполняются неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial q^j} f_j \right) - [g_i + Q_i^A] \right| \Bigg|_{\dot{q} = f(t,q)} < H_i \big|_{\dot{q} = f(t,q)}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{14}$$

Тогда для любого компактного подмножества $K \subset S$ и для любого $\tau > 0$ существует β-окрестность K^β множества K такая, что для каждого правостороннего решения $x(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ уравнения (1) справедливо утверждение

$$(t_0, x(t_0)) \in K^\beta \Rightarrow (t, x(t)) \in S \tag{15}$$

для всех $t \geq t_0 + \tau$ из области определения $x(t)$. Более того, значения τ и β могут быть выбраны настолько малыми, что все эти решения на начальном промежутке $[t_0, t_0 + \tau)$ будут оставаться в произвольной ε-окрестности множества K.

Теорема 4 следует из утверждения 5 второй части работы [9].

Аналогичное свойство устойчивости при усиленном неравенстве (14) было установлено в [7], где решения понимались как решения Каратеодори. Для устойчивости правосторонних решений достаточно неравенств (14).

Теоремы 1–3 позволяют исследовать правосторонние решения уравнения (8) с использованием теории дифференциальных включений с полунепрерывной сверху выпуклой правой частью [8]. В условиях теоремы 3 полунепрерывная сверху зависимость решений от начальных данных и правых частей для дифференциальных включений переходит в непрерывную зависимость для правосторонних решений уравнения (8). Любая последовательность приближенных решений (например, ломаные Эйлера), построенная для дифференциального включения (9), будет сходиться к (единственному справа) правостороннему решению уравнения (8). Для (8) будут справедливы теоремы о продолжимости решений на правый максимальный промежуток существования, теоремы о компактности, связности множества правосторонних решений и интегральной воронки в соответствующих пространствах, если множества начальных данных являются компактными или связными. Формулировки соответствующих теорем являются стандартными и здесь не приводятся. Особо можно отметить свойства приближенных решений, для которых учитываются не только малые изменения правых частей уравнений в областях непрерывности, но и малые изменения границ этих областей. Свойства траекторий и ω-предельных множеств для автономных дифференциальных включений переносятся на уравнение (8) без изменений [8, с. 59, 94]. Асимптотическая устойчивость нулевого решения (8) обеспечивается выполнением неравенств $\left|R_i(t,0)\right| < H_i(t,0),\ i=1,\dots,n,$ для всех $t > t_0$.

3. Замечание о механических системах с сухим трением. К уравнениям вида (1) с матрицей $B = E$ приводятся уравнения движения некоторых механических систем с кулоновыми силами трения скольжения, если вместо H_i записать произведения $f_i\left|N_i\right|$ коэффициентов трения f_i и модулей нормальных реакций $\left|N_i\right|$ в точках соприкосновения кинематических пар с трением. Обобщенные силы трения скольжения выражаются формулой

$$Q_i^T = \begin{cases} -f_i\left|N_i\right|\operatorname{sign}\dot{q}_i, & \dot{q}_i \neq 0; \\ Q_i^{T0}, & \dot{q}_i \neq 0,\ \left|Q_i^{T0}\right| \leq f_i\left|N_i\right|; \\ f_i\left|N_i\right|\operatorname{sign}Q_i^{T0}, & \dot{q}_i = 0,\ \left|Q_i^{A}\right| > f_i\left|N_i\right|, \end{cases} \tag{16}$$

где $Q_i^{T0} = \sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}\ddot{q}_j - [g_i + Q_i^A]$ – обобщенные силы трения при относительном покое $\dot{q}_i = 0$. В этом случае функции $u_i = Q_i^T$ описывают обобщенные силы трения. Но здесь следует отметить следующее. Реакции связей с трением N_i для определения сил трения Q_i^T неизвестны. Они могут быть найдены из уравнений Лагранжа с множителями и избыточными обобщенными координатами при мысленном освобождении исходных уравнений от связей, вызывающих искомые реакции [4, с. 327; 12]. Таким образом, к описанию движения исходной механической системы с кулоновым трением добавляются еще уравнения для определения неизвестных обобщенных реакций связей. Такая «расширенная» система уравнений имеет вид

$$\sum_{s=1}^{k} a_{i,s}(t,q)\ddot{q}_s = g_i(t,q,\dot{q}) + Q_i^A(t,q,\dot{q}) + Q_i^T(t,q,\dot{q},N),\quad i=1,\dots,k, \tag{17}$$

$$\sum_{s=1}^{k} a_{k+j,s}(t,q)\ddot{q}_s = g_{k+j}(t,q,\dot{q}) + Q_{k+j}^A(t,q,\dot{q}) + N_j,\quad j=1,\dots,k^*. \tag{18}$$

Модули нормальных реакций определяются в виде $|N_i|$ при скольжении по прямой линии и в виде $\sqrt{N_j^2 + N_l^2}$, $i \in (1, \ldots, k_*)$, $j, l \in (1, \ldots, k^*)$ при вращении тела вокруг оси (цилиндрического шарнира) или при скольжении точки по пространственной кривой.

Система (17), (18) представляет собой специфическую систему $k + k^*$ алгебро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_k(t))$, $N(t) = (N_1(t), \ldots, N_{k^*}(t))$. Обобщенные ускорения $\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_k)$ входят в систему неявно, а реакции связей $N = (N_1, \ldots, N_{k^*})$ – неявно и нелинейно. Таким образом, рассматриваемая система изначально является неявной даже в областях непрерывности обобщенных сил трения. Выражая функции N_j из уравнений (18) через обобщенные ускорения и подставляя их затем в уравнения (17), приходим к следующей форме записи уравнений движения исходной системы:

$$A(t, q)\ddot{q} = g(t, q, \dot{q}) + Q^A(t, q, \dot{q}) + Q^T(t, q, \dot{q}, \ddot{q}). \tag{19}$$

Приведение таких уравнений к явной форме $\ddot{q} = G(t, q, \dot{q})$ без дополнительных условий не всегда возможно и не всегда однозначно. Эти вопросы детально изложены в работе [12], где приводятся также теоремы о существовании и свойствах правосторонних решений уравнений (19). Отметим, что уравнение (19) не что иное, как неявная форма записи исходных уравнений (17), (18).

4. Пример Пенлеве [13, 14]. Две материальные точки единичной массы соединены невесомым жестким стержнем длиной $r > 0$. Одна из них скользит с трением вдоль горизонтальной прямой линии Ox (ее координата – x), а другая движется без внешнего сопротивления в вертикальной плоскости Oxy под действием силы тяжести g (и реакции стержня). Ось Oy направлена вниз, θ – угол отклонения стержня по часовой стрелке от положительного направления оси Ox. Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} &2\ddot{x} - r\sin\theta\,\ddot{\theta} = r\dot{\theta}^2\cos\theta + Q_1^T; \\ &-r\sin\theta\,\ddot{x} + r^2\ddot{\theta} = rg\cos\theta; \\ &r(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) - 2g = N_1. \end{aligned} \tag{20}$$

Сила трения определяется следующим образом:

$$Q_1^T = \begin{cases} Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}), & \text{если } \dot{x} = 0 \text{ и } \left|Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\right| \le f\left|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\right|; \\ -f\left|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\right| \operatorname{sign} Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}), & \\ & \text{если } \dot{x} = 0 \text{ и } \left|Q_1^{T0}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\right| > f\left|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\right|; \\ -f\left|N_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})\right| \operatorname{sign}\dot{x}, \text{ если } \dot{x} \ne 0, & \end{cases} \tag{21}$$

где $Q_1^{T0}(\theta,\dot\theta,\ddot\theta) = -r\sin\theta\ddot\theta - r\dot\theta^2\cos\theta$ – обобщенная сила трения покоя.

Анализ уравнений (20) показывает, что для заданных начальных состояний они могут определять либо сразу два движения, либо ни одного. Первый феномен такого рода был открыт Пенлеве [8] и явился парадоксом, который вызвал дискуссию и многочисленные исследования. С математической точки зрения парадоксы Пенлеве связаны с неразрешимостью или неоднозначной разрешимостью уравнений (20) с силами трения (21) относительно $(\ddot x,\ddot\theta, N_1)$. Один из подходов, позволяющий получать условия однозначной разрешимости, основан на преобразовании уравнений движения системы к операторному виду и использовании принципа сжимающих отображений. Дальнейший анализ уравнений в явной форме записи позволяет в рамках тех же самых условий доказать теорему существования правосторонних решений. В общем виде данный подход изложен в обзорной работе [12]. Достаточным условием однозначной разрешимости уравнений (20) относительно $\ddot x,\ddot\theta, N_1$ и условием существования правостороннего решения для любых начальных состояний является неравенство

$$f < \min\frac{1+\cos^2\theta}{|\sin\theta\cdot\cos\theta|} \approx 2{,}8, \qquad (22)$$

задающее оценку коэффициенту трения, в рамках которой парадоксов Пенлеве не возникает. Отметим, что исследование уравнений (20), изложенное в [13, 14], также приводит к неравенству (22).

Заключение. Решение вопросов существования и правой единственности решений является основой для дальнейшего развития теории правосторонних решений уравнения (8), к которому, в частности, приводятся и уравнения Лагранжа второго рода с релейными управлениями (1), и уравнения движения некоторых механических систем с кулоновым трением скольжения. Их исследование базируется на новой неявной схеме доопределения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пятницкий Е. С.** Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции // АиТ. 1989. № 1. С. 87 (Ч. 1); № 2. С. 57 (Ч. 2).
2. **Емельянов С. В.** Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970.
3. **Филаретов В. Ф., Лебедев А. В., Юхимец Д. А.** Устройства и системы управления подводных роботов. М.: Наука, 2005.
4. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.
5. **Матросов В. М.** Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
6. **Матюхин В. И.** Универсальные законы управления механическими системами. М.: МАКС Пресс, 2001.
7. **Матюхин В. И.** Устойчивость многообразий управляемых движений манипулятора // АиТ. 1998. № 4. С. 47.

8. **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
9. **Дискуссия** по докладу А. Ф. Филиппова // Тр. I Междунар. конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 1.
10. **Финогенко И. А.** О правосторонних решениях одного класса разрывных систем // АиТ. 2001. № 9. С. 149 (Ч. 1); № 11. С. 95 (Ч. 2).
11. **Уткин В. И.** Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
12. **Матросов В. М., Финогенко И. А.** Аналитическая динамика систем твердых тел с трением // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2000. С. 39.
13. **Пенлеве П.** Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.
14. **Аппель П.** Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Т. 1, 2.

Поступила в редакцию 3 ноября 2005 г.