

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРОВ СВЯЗНЫХ
ШУМОВЫХ ОБЛАСТЕЙ НА ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ *****А. Л. Резник¹, В. М. Ефимов¹, А. Н. Гинзбург²**¹*Институт автоматизирующей и электротехники СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: reznik@iae.nsk.su*²*Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород*

При обработке цифровых изображений различной физической природы нередко возникает необходимость устранения с анализируемых фрагментов пространственно некоррелированных аддитивных шумов, являющихся, как правило, следствием несовершенства процесса регистрации. Предложены и программно реализованы быстрые алгоритмы расчета геометрических характеристик таких связанных шумовых областей. Полученные результаты использованы для построения оптимальных ранговых фильтров, ориентированных на обнаружение и подавление указанных помех.

Введение. В данной работе обсуждаются быстрые алгоритмы, позволяющие оценивать геометрические параметры искажений, возникающих на цифровых изображениях при прохождении групповых импульсных помех. Возникновение решаемой задачи обусловлено исследованиями по обработке цифровых изображений, проводившимися Институтом автоматизирующей и электротехники СО РАН (г. Новосибирск) совместно с Институтом проблем передачи информации РАН (Москва) и Институтом прикладной физики РАН (г. Нижний Новгород), в ходе которых требовалось знание вероятности возникновения импульсно-шумового кластера заданного размера для правильного подбора параметров ранговых фильтров, используемых для обнаружения и подавления импульсных помех.

Решение схожих по математической постановке вопросов требуется в теории надежности, при исследовании нейросетевых структур, в задачах статистического анализа и при классификации дискретно-импульсных полей, когда необходимо оценить топологические и мощностные свойства возникающих кластеров однородности [1–7]. С физической точки зрения основная задача, для решения которой разрабатывались обсуждаемые быстрые алгоритмы, наиболее наглядно может быть сформулирована следующим образом.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00653), Президиума Российской академии наук (программа № 14.1/2006 г.) и Президиума Сибирского отделения РАН (интеграционный проект №3.9/2006 г.).

Постановка задачи. Имеется прямоугольная решетка, узлы (пиксели) которой связаны между собой горизонтальными и вертикальными «связями». В некоторый момент времени наблюдается импульсная помеха, которая «поражает» каждый из узлов решетки с одинаковой вероятностью P . Необходимо найти вероятность появления связной групповой помехи (кластера) размером M элементов, т. е. вероятность того, что заранее выделенный узел (для определенности будем считать его центром $C(0, 0)$ декартовой системы координат) попадет в «шумовую» область, состоящую в точности из M пораженных элементов (включая самого себя), связанных между собой вертикально-горизонтальными «соседскими» связями.

Для пояснения рассмотрим несколько конкретных примеров. На рис. 1 изображен кластер размером 0. Вероятность такого события, очевидно, равна $(1 - P)$ и не зависит от состояния соседних с узлом $(0, 0)$ элементов. Для образования кластера размером 1 необходимо и достаточно, чтобы узел $(0, 0)$ оказался пораженным, а все его соседи – непораженными (рис. 2). Поскольку по условиям задачи помеха является некоррелированной, то состояние каждого из узлов не зависит от состояния его соседей, так что вероятность образования кластера размером 1 равна $P(1 - P)^4$. Вероятность появления кластера размером 2 равна $4P^2(1 - P)^6$. Коэффициент 4 отражает тот факт, что узел $(0, 0)$ может образовать пару с одним из четырех соседних элементов (рис. 3). Показатель степени 6 в сомножителе $(1 - P)$ свидетельствует о том, что все шесть смежных с пораженным кластером элементов должны быть свободны от воздействия помехи.

Чтобы подойти к задаче с более общих позиций, необходимо ввести несколько понятий, которые потребуются в дальнейшем.

О п р е д е л е н и е 1. Пиксель – узловой элемент прямоугольной решетки, минимальный элемент изображения.

О п р е д е л е н и е 2. Два различных пикселя $v_{k,l}$ и $v_{m,n}$ называются пространственными соседями, если их координаты (k, l) и (m, n) удовлетворяют условию

$$I_2^p[(k, l), (m, n)] = (|k - m|^p + |l - n|^p)^{1/p} \leq \Delta,$$

где $\Delta > 0$ – радиус окрестности, задающий порядок связности, а p – коэффициент, характеризующий тип используемой метрики.

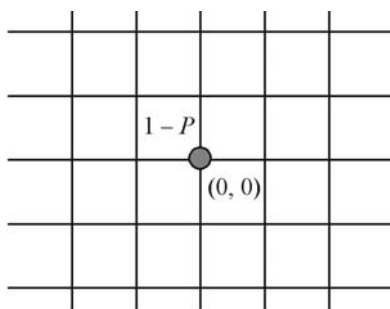


Рис. 1. Кластер нулевого размера (пустой кластер)

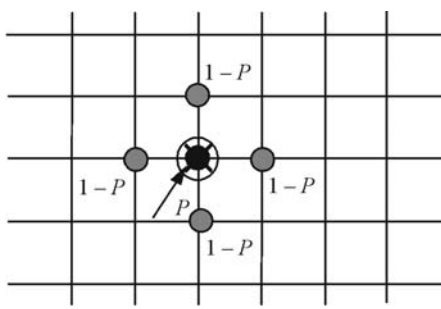


Рис. 2. Кластер единичного размера

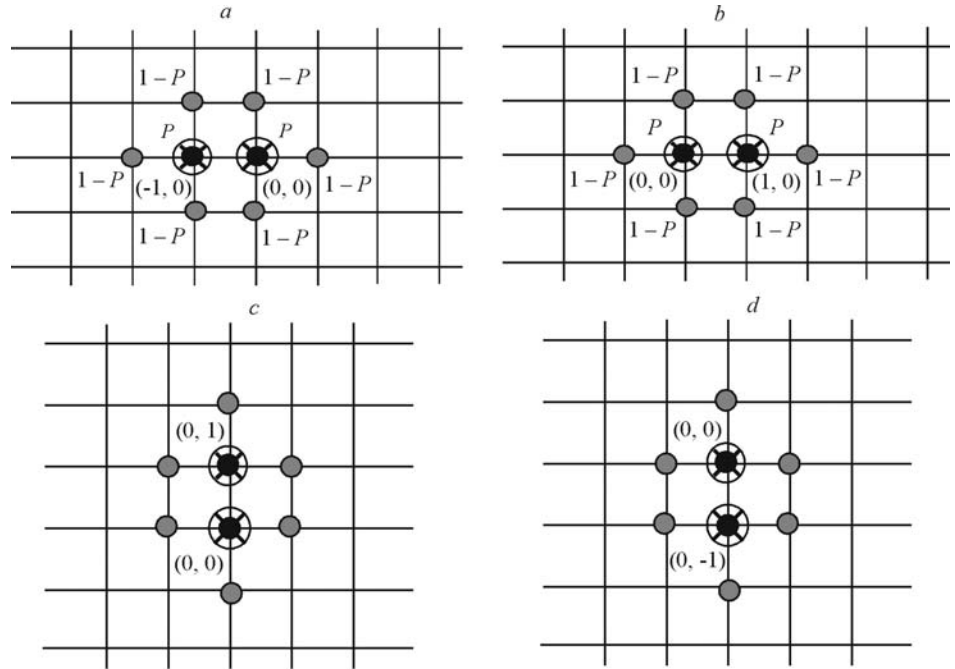


Рис. 3. Четыре варианта образования двухэлементного шумового кластера

Определение 3. Путем от одного пикселя $v_{k,l}$ до другого пикселя $v_{m,n}$ называется последовательность элементов A_1, A_2, \dots, A_h ($A_1 = v_{k,l}$, $A_h = v_{m,n}$), в которой все пары элементов (A_{i+1}, A_i) , $i=1, \dots, h-1$, являются пространственными соседями (рис. 4).

Определение 4. Два пикселя называются пространственно соединенными, или связанными, если между ними существует путь.

Определение 5. Множество элементов называется связной областью, если любые два элемента этого множества пространственно соединены.

Допустим, имеется связная область M с радиусом связности Δ . Параметр Δ удобно использовать для количественного описания пространственных связей выделенного узла с соседними элементами, искажаемыми импульсным шумом. В частности, $p=1$ и $\Delta=1$ определяют 4-связную область, а $p=2$ и $\Delta=\sqrt{2}$ – 8-связную область. В данной работе будут рассматриваться только 4-связные области с евклидовой метрикой (т. е. $p=2$ и $\Delta=1$).

Пусть P – вероятность возникновения импульсного шума в отдельно взятом узле прямоугольной решетки. Вероятность возникновения импульсного кластера размером M (4-связная область размером M) может быть представлена следующим образом:

$$\Pr(M) = P^M \sum_{k=1}^{K(M)} C_k(M) (1-P)^{E_k(M)}. \quad (1)$$

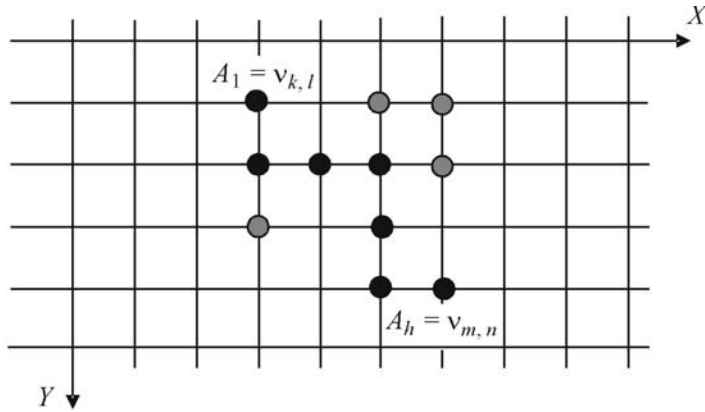


Рис. 4. Путь от пикселя $v_{k,l}$ к пикселю $v_{m,n}$ (элементы пути обозначены черным цветом)

Здесь $\{K(M)\}$, $\{C_k(M), k=1, \dots, K(M)\}$, $\{E_k(M), k=1, \dots, K(M)\}$ – коэффициенты, определяемые геометрией кластера. Рассмотрим подробнее каждый из них. $K(M)$ – это количество разных по геометрии типов кластеров, различающихся между собой числом «окаймляющих» (непораженных) элементов при фиксированном числе внутренних элементов кластера (при фиксированном M). Например, $K(3) = 2$, т. е. для кластеров размером $M = 3$ имеется два разных типа пораженных областей (рис. 5), при этом первый тип имеет семь окаймляющих элементов, а второй тип – восемь окаймляющих элементов. $C_k(M)$ – количество различных областей в M -кластере k -го типа. Параметр $\{E_k(M), k=1, \dots, K(M)\}$ показывает, сколько непораженных узлов-пикселей отделяет пораженный кластер данного типа от «внешнего мира» (т. е. $E_k(M)$ – дискретный аналог «периметра» рассматриваемой области). Из рис. 5 видно, что $E_1(3) = 7$, а $E_2(3) = 8$.

К сожалению, найти аналитические формулы для выражений $\{K(M)\}$, $\{C_k(M), k=1, \dots, K(M)\}$, $\{E_k(M), k=1, \dots, K(M)\}$ как функций целочисленного параметра M не удастся. Поэтому для решения многих теоретических и научно-прикладных задач, относящихся к анализу дискретно-точечных изображений, требуется создание быстродействующего алгоритма рас-

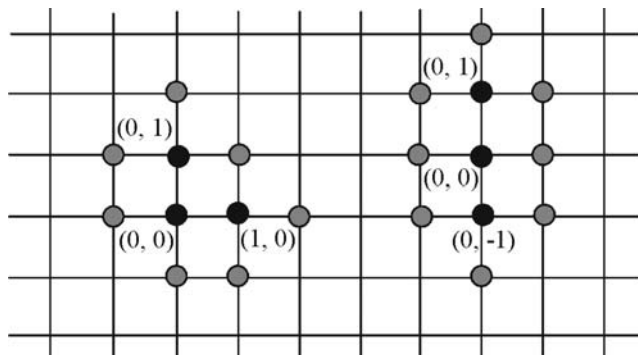


Рис. 5. Два различных типа 3-элементных кластеров

чета вероятности (1) для конкретных размеров шумового кластера M при известной вероятности P поражения одиночного узла решетки. Построение эффективного алгоритма, позволяющего проводить быстрый расчет параметров $K(M)$, $C_k(M)$, $E_k(M)$ для достаточно больших значений M , помогает решить две задачи: во-первых, при определенных значениях исходной вероятности поражения одиночного узла P знание таких формул дает возможность рассчитать с наперед заданной точностью вероятность образования конкретного шумового кластера; во-вторых, продвижение в расчете точных формул $K(M)$, $C_k(M)$, $E_k(M)$ для возрастающих значений M позволяет накопить необходимые данные для установления замкнутых аналитических соотношений, полностью решающих задачу расчета вероятности образования M -элементного импульсно-шумового кластера.

Первый программно-реализованный алгоритм быстрого расчета вероятностей (1) был предложен в [8]. Этот алгоритм позволяет проводить расчет формул $\Pr(M)$ до $M \leq 9$. Следует заметить, что успехи в решении обсуждаемой проблемы за счет применения более совершенной и быстросействующей вычислительной техники или более эффективной программно-языковой среды могут быть весьма относительными, поскольку сложность расчетов в большинстве задач подобного рода растет экспоненциально (в нашем случае такой рост наблюдается относительно параметра M), так что на первый план в таких ситуациях всегда выходят структура и качество построенного вычислительного алгоритма, а не скоростные возможности используемых вычислительных средств.

Главное достоинство построенного нами алгоритма заключается в том, что он имеет значительно более высокое по сравнению с алгоритмом В. И. Кобера [8] быстроедействие, обеспечивающее проведение расчетов вплоть до $M = 13$. Эти расчеты даны в табл. 1. Кроме перечисленных параметров $K(M)$, $C_k(M)$, $E_k(M)$ в таблице содержится также кумулятивный па-

раметр $C(M) = \sum_{k=1}^{K(M)} C_k(M)$, представляющий собой общее число различаю-

щихся между собой связных импульсно-шумовых кластеров размером M .

С помощью этих результатов и соотношения (1) были получены точные формулы, описывающие вероятность $\Pr(M)$ появления групповой помехи размером M элементов. Такие формулы для $M = 0, \dots, 13$ приведены в табл. 2.

Для подавления аддитивных некоррелированных помех на основе адаптивной ранговой фильтрации подвергнутое воздействию помехи цифровое изображение фильтруется скользящим окном, а для расчета оптимальных коэффициентов рангового фильтра необходимо знание вероятности появления групповой помехи определенного размера в скользящем окне. С помощью полученных программно формул из табл. 2 были рассчитаны значения вероятностей образования 4-связных групповых помех. Табулированные по параметру P результаты расчетов сведены в табл. 3. Эти данные показывают, что с увеличением P быстро растет вероятность появления групповых помех больших размеров. Так, уже при $P = 0,5$ помехи размером $M > 5$ более вероятны, чем помехи меньшего размера, а при $P = 0,6$ вероятность помех размером $M > 13$ превосходит вероятность того, что центральный элемент скользящего окна не будет искажен.

Т а б л и ц а 1

Рассчитанные быстрым алгоритмом значения коэффициентов $C_k(M)$, $K(M)$, $C(M)$

$E_k(M)$	Значения коэффициента $C_k(M)$ в зависимости от размера кластера M и его периметра $E_k(M)$																								
	M																								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13												
4	1																								
6		4																							
7			12																						
8			6	36	5																				
9				32	100	24																			
10				8	140	324	154	32																	
11					60	480	952	640	252	40															
12					10	360	1764	3104	2619	1540	572	108	13												
13						96	1596	6216	10368	9860	7084	3900	1456												
14							12	700	6544	21996	36760	38830	31728	21580											
15								140	3840	25236	76120	129492	150024	136240											
16									14	1216	18801	97500	269192	464328	579462										
17										192	7704	81920	366696	956760	1677260										
18											16	1944	43300	343222	1372104	3438266									
19												252	14160	214852	1386024	5088616									
20													18	2920	89430	998196	5509218								
21															320	23980	493632	4382872							
22																20	4180	168768	2519660						
23																		396	38496	1030120					
24																			22	5760	298909				
25																					480	58604			
26																						24	7696		
27																								572	
28																									26

Значения коэффициента $K(M)$

$K(M)$	1	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	17
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

Значения коэффициента $C(M)$

$C(M)$	1	4	18	76	315	1296	5320	21800	89190	364460	1487948	6070332	24750570
--------	---	---	----	----	-----	------	------	-------	-------	--------	---------	---------	----------

**Вероятность появления групповой помехи в зависимости от ее размера M
и вероятности поражения отдельного узла P**

Размер помехи M	Вероятность появления помехи
0	$1 - P$
1	$P(1 - P)^4$
2	$4P^2(1 - P)^6$
3	$12P^3(1 - P)^7 + 6P^3(1 - P)^8$
4	$36P^4(1 - P)^8 + 32P^4(1 - P)^9 + 8P^4(1 - P)^{10}$
5	$5P^5(1 - P)^8 + 100P^5(1 - P)^9 + 140P^5(1 - P)^{10} + 60P^5(1 - P)^{11} + 10P^5(1 - P)^{12}$
6	$24P^6(1 - P)^9 + 324P^6(1 - P)^{10} + 480P^6(1 - P)^{11} +$ $+ 360P^6(1 - P)^{12} + 96P^6(1 - P)^{13} + 12P^6(1 - P)^{14}$
7	$154P^7(1 - P)^{10} + 952P^7(1 - P)^{11} + 360P^7(1 - P)^{12} + 96P^7(1 - P)^{13} +$ $+ 12P^7(1 - P)^{14} + 96P^7(1 - P)^{15} + 12P^7(1 - P)^{16}$
8	$32P^8(1 - P)^{10} + 640P^8(1 - P)^{11} + 3104P^8(1 - P)^{12} + 6216P^8(1 - P)^{13} +$ $+ 6544P^8(1 - P)^{14} + 3840P^8(1 - P)^{15} + 1216P^8(1 - P)^{16} + 192P^8(1 - P)^{17} + 16P^8(1 - P)^{18}$
9	$252P^9(1 - P)^{11} + 2619P^9(1 - P)^{12} + 10368P^9(1 - P)^{13} + 21996P^9(1 - P)^{14} +$ $+ 25236P^9(1 - P)^{15} + 18801P^9(1 - P)^{16} + 7704P^9(1 - P)^{17} +$ $+ 1944P^9(1 - P)^{18} + 252P^9(1 - P)^{19} + 18P^9(1 - P)^{20}$
10	$40P^{10}(1 - P)^{11} + 1540P^{10}(1 - P)^{12} + 9860P^{10}(1 - P)^{13} + 36760P^{10}(1 - P)^{14} +$ $+ 76120P^{10}(1 - P)^{15} + 97500P^{10}(1 - P)^{16} + 81920P^{10}(1 - P)^{17} + 43300P^{10}(1 - P)^{18} +$ $+ 14160P^{10}(1 - P)^{19} + 2920P^{10}(1 - P)^{20} + 320P^{10}(1 - P)^{21} + 20P^{10}(1 - P)^{22}$
11	$22P^{11}(1 - P)^{12} + 396P^{11}(1 - P)^{13} + 4180P^{11}(1 - P)^{14} + 23980P^{11}(1 - P)^{15} +$ $+ 89430P^{11}(1 - P)^{16} + 214852P^{11}(1 - P)^{17} + 343222P^{11}(1 - P)^{18} +$ $+ 366696P^{11}(1 - P)^{19} + 269192P^{11}(1 - P)^{20} + 129492P^{11}(1 - P)^{21} +$ $+ 38830P^{11}(1 - P)^{22} + 7084P^{11}(1 - P)^{23} + 572P^{11}(1 - P)^{24}$
12	$108P^{12}(1 - P)^{12} + 3900P^{12}(1 - P)^{13} + 31728P^{12}(1 - P)^{14} + 150024P^{12}(1 - P)^{15} +$ $+ 464328P^{12}(1 - P)^{16} + 956760P^{12}(1 - P)^{17} + 1372104P^{12}(1 - P)^{18} + 1386024P^{12}(1 - P)^{19} +$ $+ 998196P^{12}(1 - P)^{20} + 493632P^{12}(1 - P)^{21} + 168768P^{12}(1 - P)^{22} +$ $+ 38496P^{12}(1 - P)^{23} + 5760P^{12}(1 - P)^{24} + 480P^{12}(1 - P)^{25} + 24P^{12}(1 - P)^{26}$
13	$13P^{13}(1 - P)^{12} + 1456P^{13}(1 - P)^{13} + 21580P^{13}(1 - P)^{14} + 136240P^{13}(1 - P)^{15} +$ $+ 579462P^{13}(1 - P)^{16} + 1677260P^{13}(1 - P)^{17} + 3438266P^{13}(1 - P)^{18} + 5088616P^{13}(1 - P)^{19} +$ $+ 5509218P^{13}(1 - P)^{20} + 4382872P^{13}(1 - P)^{21} + 2519660P^{13}(1 - P)^{22} +$ $+ 1030120P^{13}(1 - P)^{23} + 298909P^{13}(1 - P)^{24} + 58604P^{13}(1 - P)^{25} + 7696P^{13}(1 - P)^{26} +$ $+ 572P^{13}(1 - P)^{27} + 26P^{13}(1 - P)^{28}$

Т а б л и ц а 3

Вероятность появления групповых помех в скользящем окне

<i>M</i>	<i>P</i>						
	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
0	0,99	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40
1	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$8,2 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$
2	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$
3	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$
4	$7,0 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$
5	$2,9 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$
6	$1,2 \cdot 10^{-9}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$
7	$4,7 \cdot 10^{-11}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	$2,7 \cdot 10^{-3}$
8	$1,9 \cdot 10^{-12}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$
9	$7,7 \cdot 10^{-14}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$8,8 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$
10	$3,1 \cdot 10^{-15}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$
11	$1,3 \cdot 10^{-16}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$
12	$5,0 \cdot 10^{-18}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$
13	$2,0 \cdot 10^{-19}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$7,1 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$
>13	$9,1 \cdot 10^{-18}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	0,018	0,130	0,340	0,550

Заключение. В данной работе предложен и программно реализован ускоренный алгоритм вычисления вероятности образования связанных шумовых областей заданного размера, возникающих на цифровых изображениях в результате воздействия пространственно некоррелированной импульсной помехи. Полученные вероятностные соотношения являются основой для создания оптимальных ранговых фильтров, предназначенных для обнаружения и подавления указанных помех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hoyland A., Rausand M. System Reliability Theory: Models and Statistical Methods. N. Y.: John Willey, 1994.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М.: Сов. радио, 1969.

3. **Гнеденко Б. В., Беляев Ю. И., Соловьев А. Д.** Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
4. **Haykin S.** Neural Networks: A Comprehensive Foundation. N. Y.: MacMillan College Publishing Co., 1994.
5. **Hertz J., Krogh A., Palmer R. G.** Introduction to the Theory of Neural Computation. Redwood City, CA: Addison-Wesley, Reading, Mass., 1991.
6. **Ярославский Л. П.** Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979.
7. **Kober V., Moreno I., Lashin V. et al.** Color component transformations for optical pattern recognition // JOSA (A). 1997. **14**, N 10. P. 2656.
8. **Кобер В. И.** Методы и алгоритмы локально-адаптивной обработки сигналов и изображений: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук /ИППИ РАН. М., 2004. 36 с.

Поступила в редакцию 19 июня 2006 г.
