РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2006, том 42, № 5

УДК 519.7

H_∞-РОБАСТНЫЙ ВЫХОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ КОМПЕНСАТОР ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИХСЯ СИСТЕМ *

С.-Л. Лю, Г.-Ж. Дуань

*Center for Control Theory and Guidance Technology Harbin Institute of Technology,
Harbin, China
E-mail: lxl8333205@sohu.com*

Решается задача L_2-коэффициентного управления переключающимися системами с выходным динамическим компенсатором. Для этого вида систем разрабатывается специальный динамический компенсатор по выходным переменным и синтезируется компенсатор-регулятор с обратной связью по состоянию, который гарантирует L_2-коэффициент замкнутых систем. На основе этих условий реализуется робастное управление переключающимися системами с L_2-коэффициентом. Показаны реализуемость и преимущества такого выходного динамического компенсатора для рассматриваемого класса систем.

Введение. В данной работе разработан специальный выходной динамический компенсатор для переключающихся систем, обладающий лучшими характеристиками, чем обычный компенсатор. (Обзор литературы по проблемам переключающихся систем дан в [1].) На основе этого выходного динамического компенсатора синтезирован регулятор для обратной связи, гарантирующий асимптотическую устойчивость и L_2-коэффициент замкнутой системы. Полученный результат описывается линейными матричными неравенствами. С помощью регулятора в обратной связи достигается робастное управление замкнутой системой. Реализуемость и преимущества выходного динамического компенсатора для переключающихся систем проиллюстрированы численным примером.

Предлагаемая работа построена следующим образом. В разд. 1 дана постановка задачи. Разд. 2 посвящен синтезу выходного динамического компенсатора для дискретных переключающихся систем при произвольных последовательностях переключений с помощью переключаемой квадратичной функции Ляпунова. Разработан регулятор обратной связи с использованием компенсатора, гарантирующий устойчивость и L_2-коэффициент переключающихся систем. Кроме того, рассмотрено робастное управление переключа-

* Работа выполнена при содействии Китайского фонда поддержки выдающейся молодежи (грант № 69925308) и Китайского фонда по естественным наукам (гранты № 60374024 и № 60474015).

ющейся системой. В разд. 3 приведен численный пример, иллюстрирующий реализуемость и преимущество выходного динамического компенсатора для переключающихся систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дискретные линейные переключающиеся системы при произвольных последовательностях переключений, описываемые уравнениями

$$\begin{cases} x(k+1) = \hat{A}_i x(k) + \hat{B}_{1i}\omega(k) + \hat{B}_{2i}u(k); \\ Z(k) = \hat{C}_{1i}x(k) + \hat{D}_{1i}\omega(k) + \hat{D}_{2i}u(k); \\ y(k) = C_{2i}x(k), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(k)\in R^n$ – векторы координат состояния; $u(k)\in R^m$ – векторы управляющих воздействий; $\omega(k)\in R^{\omega}$ – внешнее входное возмущение; $y(k)\in R^p$ – векторы измеряемых выходов; $Z(k)\in R^z$ – управляемый выход. Матрицы коэффициентов системы $(\hat{A}_i, \hat{B}_{1i}, \hat{B}_{2i}, \hat{C}_{1i}, C_{2i}, \hat{D}_{1i}, \hat{D}_{2i})$ соответствующих размеров являются известными:

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_{1i} & \hat{B}_{2i} \\ \hat{C}_{1i} & \hat{D}_{1i} & \hat{D}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{1i} & D_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta B_{1i} & \Delta B_{2i} \\ \Delta C_{1i} & \Delta D_{1i} & \Delta D_{2i} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta B_{1i} & \Delta B_{2i} \\ \Delta C_{1i} & \Delta D_{1i} & \Delta D_{2i} \end{bmatrix} = H_i \Gamma \begin{bmatrix} E_{Ai} & E_{B1i} & E_{B2i} \\ E_{C1i} & E_{D1i} & E_{D2i} \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, D_{1i}, D_{2i}$, $i\in\tilde{N}$,– постоянные матрицы, описывающие i-ю номинальную подсистему; H_i, E_{Ai}, E_{B1i}, E_{B2i}, E_{C1i}, E_{D1i}, E_{D2i} задаются постоянными матрицами, характеризующими вид неопределенности; Γ – неопределенность, удовлетворяющая $\sigma_{\max}(\Gamma)\le 1$. Кроме того, C_{2i}, $i\in\tilde{N}$, имеет полный строчный ранг.

Полагаем, что переключаемый выходной динамический компенсатор задается уравнениями

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = (A_i - L_i C_{2i})\hat{x}(k) + L_i\, y(k) + B_{2i}u(k) + F_i W(k); \\ W(k+1) = \bar{K}_i(y(k) - C_{2i}\hat{x}(k+1)), \end{cases} \tag{1.3}$$

где F_i, $\bar{K}_i, L_i$, $i\in\tilde{N}$, являются матрицами коэффициентов передачи соответствующих размеров. L_2-коэффициент переключающихся систем задается следующим определением.

О п р е д е л е н и е. L_2-коэффициент переключающейся системы определяется как

$$g = \inf\left\{\gamma \ge 0:\ \|Z(k)\|_2 \le \gamma\ \|\omega\|_2, \forall\,\omega\in L_2\right\}, \tag{1.4}$$

где Z вычисляется вдоль решений системы (1.1). С учетом динамического выходного компенсатора закон управления с обратной связью по состоянию для системы (1.1) имеет вид

$$u(k) = K_i\hat{x}(k) + \mathrm{v}(k). \tag{1.5}$$

Замкнутая система, которая представляет собой систему (1.1) без неопределенностей с регулятором по состоянию (1.5) и выходным динамическим компенсатором, описывается уравнениями

$$\begin{cases} X(k+1) = A_c X(k) + B_{1c}\omega(k) + B_{2c}\nu(k); \\ Z(k) = C_c X(k) + D_{1i}\omega(k) + D_{2i}\nu(k); \\ y(k) = C_{2i} X(k), \end{cases} \tag{1.6}$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \\ W(k) \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} A_i & B_{2i}K_i & 0 \\ L_i C_{2i} & A_i - L_i C_{2i} + B_{2i}K_i & F_i \\ \overline{K}_i C_{2i} & -\overline{K}_i C_{2i} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{1c} = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2c} = \begin{bmatrix} B_{2i} \\ B_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [C_{1i} \quad D_{2i}K_i \quad 0].$$

Задача 1. Найти матрицы коэффициентов $K_i, F_i, \overline{K}_i, L_i, \ i \in \widetilde{N}$, такие, чтобы система (1.6) была асимптотически устойчива с L_2-коэффициентом, меньшим, чем γ.

Полагаем, что система (1.1) содержит неопределенность, которая задана (1.2). Поэтому замкнутая система, состоящая из объекта (1.1), (1.2), регулятора по состоянию (1.5) и выходного динамического компенсатора (1.3), представляется следующим образом:

$$\begin{cases} X(k+1) = A_c X(k) + B_{1c}\omega(k) + B_{2c}\nu(k); \\ Z(k) = C_c X(k) + (D_{1i} + \Delta D_{1i})\omega(k) + (D_{2i} + \Delta D_{2i})\nu(k); \\ y(k) = C_{2i} X(k), \end{cases} \tag{1.7}$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \\ W(k) \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i & (B_{2i} + \Delta B_{2i})K_i & 0 \\ L_i C_{2i} & A_i - L_i C_{2i} + B_{2i}K_i & F_i \\ \overline{K}_i C_{2i} & -\overline{K}_i C_{2i} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{1c} = \begin{bmatrix} B_{1i} + \Delta B_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{2c} = \begin{bmatrix} B_{2i} + \Delta B_{2i} \\ B_{2i} + \Delta B_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}, C_c = [C_{1i} + \Delta C_{1i} \quad (D_{2i} + \Delta D_{2i})K_i \quad 0].$$

Задача 2. Найти матрицы коэффициентов $K_i, F_i, \overline{K}_i, L_i, i \in \widetilde{N}$, такие, чтобы замкнутая система (1.7) была робастной и асимптотически устойчивой с L_2- коэффициентом, меньшим, чем γ.

2. Основные результаты. Для решения задач рассмотрим лемму и теорему.

Лемма. Пусть Y, H, E являются матрицами соответствующих размеров, тогда для любого $F(t)$, удовлетворяющего условию $F^T(t)F(t) < I$, неравенство $Y + HFE + (HFE)^T < 0$ выполняется, если и только если существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что $Y + \varepsilon HH^T + \varepsilon^{-1}E^T E < 0$.

Теорема 1 [2]. Состояние равновесия 0 системы

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2.1}$$

является глобальным равномерно асимптотически устойчивым, если существует функция $V:\ Z^{+}\times R^{n}\to R$ такая, что

i) V есть неограниченная положительно-определенная и убывающая функция;

ii) $\Delta V = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))$ является отрицательно-определенной вдоль решений (2.1).

2.1. *Синтез обратной связи по состоянию, обладающей L_2-коэффициентом, с использованием выходного динамического компенсатора.* Рассматривая систему (1.1) и выходной динамический компенсатор (1.3), можем иметь замкнутую систему (1.6) с помощью регулятора по состоянию (1.5). Сформулируем следующую теорему, выполнение которой гарантирует устойчивость замкнутой переключающейся системы. Сначала предположим, что система (1.6) имеет функцию Ляпунова, заданную в виде

$$V(k, x(k)) = x^T(k)P_i x(k), \quad P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & P_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & P_{3i} \end{bmatrix}, \tag{2.1.1}$$

где $P_{1i}, P_{2i}, P_{3i},\ i\in\widetilde{N}$, являются симметричными положительно-определенными матрицами.

Теорема 2. Следующие утверждения являются эквивалентными.

i) Существует функция Ляпунова вида (2.1.1), ее приращение является отрицательно-определенной функцией и доказывает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.6) с L_2-коэффициентом, меньшим, чем γ.

ii) Существуют симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i}\in R^{n\times n}$, $S_{2i}\in R^{n\times n}$ и $S_{3i}\in R^{n\times n}$, матрицы $\widetilde{K}_i, \widetilde{L}_i, \widetilde{F}_i, \widetilde{\widetilde{K}}_i,\ i\in\widetilde{N}$, соответствующих размеров, неособые матрицы $V_i,\ i\in\widetilde{N}$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (2.1.2) и (2.1.3), а также матрицы коэффициентов, заданные в виде $K_i = \widetilde{K}_i S_{2i}^{-1}$, $\overline{K}_i = \widetilde{\widetilde{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \widetilde{L}_i V_i^{-1}$ и $F_i = \widetilde{F}_i S_{3i}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} -S_i & 0 & M_i^T & N_i^T \\ 0 & -\gamma^2 I & \widetilde{B}_c^T & D_{1i}^T \\ M_i & \widetilde{B}_c & -S_j & 0 \\ N_i & D_{1i} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{2.1.2}$$

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & S_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & S_{3i} \end{bmatrix}, \quad M_i = \begin{bmatrix} A_i S_{1i} - \widetilde{L}_i C_{2i} & 0 & -\widetilde{F}_i \\ \widetilde{L}_i C_{2i} & A_i S_{2i} + B_{2i}\widetilde{K}_i & \widetilde{F}_i \\ \widetilde{\widetilde{K}}_i C_{2i} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_c = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_i = [C_{1i}S_{1i} \quad C_{1i}S_{2i} + D_{2i}\widetilde{K}_i \quad 0],$$

$$V_i C_{2i} = C_{2i} S_{1i}. \tag{2.1.3}$$

iii) Существуют симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i}\in R^{n\times n}$, $S_{2i}\in R^{n\times n}$, $S_{3i}\in R^{n\times n}$, $i\in\widetilde{N}$, матрицы $\widetilde{K}_i, \widetilde{L}_i, \widetilde{F}_i, \widetilde{\widetilde{K}}_i,\ i\in\widetilde{N}$, соответствующих размеров, обращаемые матрицы $G_{1i} \in R^{n\times n}$, $G_{2i} \in R^{n\times n}$, $G_{3i} \in R^{n\times n}$, $i \in \widetilde{N}$, удовлетворяющие (2.1.4) и (2.1.5), и матрицы коэффициентов вида $\overline{K}_i = \widetilde{\widetilde{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \widetilde{L}_i V_i^{-1}$, $F_i = \widetilde{F}_i G_{3i}^{-1}$ и $K_i = \widetilde{K}_i G_{2i}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} S_i - G_i^T - G_i^T & 0 & M_i^T & N_i^T \\ 0 & -\gamma^2 I & \widetilde{B}_c^T & D_{1i}^T \\ M_i & \widetilde{B}_c & -S_j & 0 \\ N_i & D_{1i} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{2.1.4}$$

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & S_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & S_{3i} \end{bmatrix}, \; G_i = \begin{bmatrix} G_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & G_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & G_{3i} \end{bmatrix}, M_i = \begin{bmatrix} A_i G_{1i} - \widetilde{L}_i C_{2i} & 0 & -\widetilde{F}_i \\ \widetilde{L}_i C_{2i} & A_i G_{2i} + B_i \widetilde{K}_i & \widetilde{F}_i \\ \widetilde{\widetilde{K}}_i C_{2i} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_c = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; N_i = [C_{1i} G_{1i} \quad C_{1i} G_{2i} + D_{2i} \widetilde{K}_i \quad 0],$$

$$V_i C_{2i} = C_{2i} G_{1i}. \tag{2.1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о i) $\Rightarrow$ ii). Пусть

$$P = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

тогда имеем

$$P^{-1} A_c P = \widetilde{A}_c = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & 0 & -F_i \\ L_i C_i & A_i + B_i K_i & F_i \\ \overline{K}_i C_i & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{2.1.6}$$

$$P^{-1} B_{1c} = \widetilde{B}_{1c} = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} B_{2c} = \widetilde{B}_{2c} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_c P = \widetilde{C}_c = [C_{1i} \quad C_{1i} + D_{2i} K_i \quad 0].$$

Следовательно, система (1.6) эквивалентна системе

$$\begin{cases} X(k+1) = \widetilde{A}_c X(k) + \widetilde{B}_{1c}\omega(k) + \widetilde{B}_{2c} v(k), \\ Z(k) = \widetilde{C}_c X(k) + D_{1i}\omega(k) + D_{2i} v(k), \\ y(k) = [C_{2i} \quad C_{2i} \quad 0] X(k), \end{cases} \quad X(k) = \begin{bmatrix} x(k) - \hat{x}(k) \\ \hat{x}(k) \\ W(k) \end{bmatrix}. \tag{2.1.7}$$

Если система (2.1.7) с L_2-коэффициентом, меньшим, чем γ, асимптотически устойчива, то существует

$$V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) + Z^T(k) Z(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) < 0, \tag{2.1.8}$$

что эквивалентно

$$\begin{bmatrix} -P_i & 0 & \widetilde{A}_c^T & \widetilde{C}_c^T \\ 0 & -\gamma^2 I & \widetilde{B}_c^T & D_{1i}^T \\ \widetilde{A}_c & \widetilde{B}_c & -P_j^{-1} & 0 \\ \widetilde{C}_c & D_{1i} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{2.1.9}$$

Пусть выполняются равенства $P_i = S_i^{-1}$, $P_{1i} = S_{1i}^{-1}$, $P_{2i} = S_{2i}^{-1}$ и $P_{3i} = S_{3i}^{-1}$. Если существуют неособые матрицы V_i такие, что $V_i C_{2i} = C_{2i} S_{1i}$, тогда, умножая слева и справа обе части неравенства (2.1.9) на блочно-диагональную матрицу blockdiag $\{S_i, I, I, I\}$ и полагая $\widetilde{F}_i = F_i S_{3i}$, $\widetilde{L}_i = L_i V_i$, $\widetilde{K}_i = K_i S_{2i}$ и $\widetilde{\overline{K}}_i = \overline{K}_i V_i$, можем получить (2.1.2) и (2.1.3).

ii) $\Rightarrow$ i). Допуская справедливость (2.1.2) и (2.1.3), имеем (2.1.8). На основе теоремы 1 непосредственно может быть получено утверждение i).

iii) $\Rightarrow$ ii). Предположим, что выполняются (2.1.4) и (2.1.5). Вследствие того что S_{1i}, S_{2i} и S_{3i}, $i \in \widetilde{N}$, являются симметричными положительно-определенными матрицами, имеем следующие неравенства:

$$(S_{1i} - G_{1i}^T) S_{1i}^{-1} (S_{1i} - G_{1i}) \geq 0, \tag{2.1.10}$$

$$(S_{2i} - G_{2i}^T) S_{2i}^{-1} (S_{2i} - G_{2i}) \geq 0, \tag{2.1.11}$$

$$(S_{3i} - G_{3i}^T) S_{3i}^{-1} (S_{3i} - G_{3i}) \geq 0, \tag{2.1.12}$$

которые эквивалентны условиям

$$S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T \geq -G_{1i}^T S_{1i}^{-1} G_{1i}, \tag{2.1.13}$$

$$S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T \geq -G_{2i}^T S_{2i}^{-1} G_{2i}, \tag{2.1.14}$$

$$S_{3i} - G_{3i} - G_{3i}^T \geq -G_{3i}^T S_{3i}^{-1} G_{3i}. \tag{2.1.15}$$

Выполняя замену выражений $S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T$, $S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T$ и $S_{3i} - G_{3i} - G_{3i}^T$ из (2.1.4) выражениями (2.1.13)–(2.1.15) соответственно, будем иметь

$$\begin{bmatrix} -G_{1i}^T S_{1i}^{-1} G_{1i} & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & -G_{2i}^T S_{2i}^{-1} G_{2i} & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -G_{3i}^T S_{3i}^{-1} G_{3i} & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ A_i G_{1i} - L_i C_{2i} G_{1i} & 0 & -F_i G_{3i} & B_{1i} & -S_{1j} & 0 & 0 & 0 \\ L_i C_{2i} G_{1i} & A_i G_{2i} + B_{2i} K_i G_{2i} & F_i G_{3i} & 0 & 0 & -S_{2j} & 0 & 0 \\ \overline{K}_i C_{2i} G_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{3j} & 0 \\ C_{1i} G_{1i} & C_{1i} G_{2i} + D_{2i} K_i G_{2i} & 0 & D_{1i} & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0.$$

Пусть выполняются равенства $P_{1i} = S_{1i}^{-1}$, $P_{2i} = S_{2i}^{-1}$ и $P_{3i} = S_{3i}^{-1}$. Умножая левые части (2.1.13)–(2.1.15) на blockdiag$(G_{1i}^{-T}, G_{2i}^{-T}, G_{3i}^{-T}, I, I, I)$ и правые части выражений на blockdiag$(G_{1i}^{-1}, G_{2i}^{-1}, G_{3i}^{-1}, I, I, I)$, можно вывести (2.1.9), которое эквивалентно (2.1.2) и (2.1.3).

ii) $\Rightarrow$ iii). Полагая, что (2.1.2) и (2.1.3) удовлетворяются, можно прийти к (2.1.9). На основе формулы дополнения Шура получим следующий результат:

$$\begin{bmatrix} A_i - L_i C_{2i} & 0 & -F_i & B_{1i} \\ L_i C_{2i} & A_i + B_{2i} K_i & F_i & 0 \\ k_i C_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1i} & C_{1i} + D_{2i} K_i & 0 & D_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{3i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} A_i - L_i C_{2i} & 0 & -F_i & B_{1i} \\ L_i C_{2i} & A_i + B_{2i} K_i & F_i & 0 \\ k_i C_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1i} & C_{1i} + D_{2i} K_i & 0 & D_{1i} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} -S_{1j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{2j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{3j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} = T_{ij} < 0.$$

Пусть $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i} \in R^+ -$ достаточно малые скаляры такие, что

$$\begin{bmatrix} -S_{1i} - 2\beta_{1i} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{2i} - 2\beta_{2i} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{3i} - 2\beta_{3i} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \beta_{1i}(A_i - L_i C_{2i}) & 0 & -\beta_{3i} F_i & B_{1i} \\ \beta_{1i} L_i C_{2i} & \beta_{2i}(A_i + B_{2i} K_i) & \beta_{3i} F_i & 0 \\ \beta_{1i} k_i C_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{1i} C_{1i} & \beta_{2i}(C_{1i} + D_{2i} K_i) & 0 & D_{1i} \end{bmatrix}^T \times$$

$$\times T_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{1i}(A_i - L_i C_{2i}) & 0 & -\beta_{3i} F_i & B_{1i} \\ \beta_{1i} L_i C_{2i} & \beta_{2i}(A_i + B_{2i} K_i) & \beta_{3i} F_i & 0 \\ \beta_{1i} k_i C_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{1i} C_{1i} & \beta_{2i}(C_{1i} + D_{2i} K_i) & 0 & D_{1i} \end{bmatrix} < 0.$$

Выбирая $G_{1i} = S_{1i} + \beta_{1i} I$, $G_{2i} = S_{2i} + \beta_{2i} I$, $G_{3i} = S_{3i} + \beta_{3i} I$ и полагая $\tilde{\tilde{K}}_i = \bar{K}_i V_i$, $\tilde{L}_i = L_i V_i$, $\tilde{F}_i = F_i G_{3i}$, $\tilde{K}_i = K_i G_{2i}$, получим (2.1.4) и (2.1.5).

2.2. *Синтез робастной обратной связи по состоянию, обладающей L_2-коэффициентом, с использованием выходного динамического компенсатора.* В этом разделе представлено решение задачи 2. Полагая, что система (1.7) имеет функцию Ляпунова, и используя теорему 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Если существуют симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i} \in R^{n \times n}$, $S_{2i} \in R^{n \times n}$ и $S_{3i} \in R^{n \times n}$, а также матрицы $\tilde{K}_i, \tilde{L}_i$, $\tilde{F}_i, \tilde{\tilde{K}}_i$ соответствующих размеров, кроме того, существуют постоянные числа $\varepsilon_{ij} \in R^+$, $\forall (i, j) \in \tilde{N} \times \tilde{N}$, и обратимые матрицы V_i, $i \in \tilde{N}$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (2.2.1)–(2.2.3), то замкнутая система

(1.7) является асимптотически устойчивой и матрицы коэффициентов определяются согласно выражениям $K_i = \tilde{K}_i S_{2i}^{-1}$, $\overline{K}_i = \tilde{\tilde{\overline{K}}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \tilde{L}_i V_i^{-1}$ и $F_i = \tilde{F}_i S_{3i}^{-1}$ соответственно:

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_i & M_i^T & N_i^T \\ M_i & \tilde{S}_{ij} & 0 \\ N_i & 0 & \varepsilon_{ij} I \end{bmatrix} < 0, \tag{2.2.1}$$

$$\tilde{S}_i = \begin{bmatrix} -S_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{3i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}; \quad N_i = \begin{bmatrix} E_{Ai} S_{1i} & E_{Ai} S_{2i} + E_{B2i} \tilde{K}_i & 0 & E_{B1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{C1i} S_{1i} & E_{C1i} S_{2i} + E_{D2i} \tilde{K}_i & 0 & E_{D1i} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{S}_{ij} = \begin{bmatrix} -S_{1j} + 3\varepsilon_{ij} H_i H_i^T & 0 & 0 & 3\varepsilon_{ij} H_i H_i^T \\ 0 & -S_{2j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{3j} & 0 \\ 3\varepsilon_{ij} H_i H_i^T & 0 & 0 & -I + 3\varepsilon_{ij} H_i H_i^T \end{bmatrix}; \tag{2.2.2}$$

$$M_i = \begin{bmatrix} A_i S_{1i} - \tilde{L}_i C_{2i} & 0 & -\tilde{F}_i & B_{1c} \\ \tilde{L}_i C_{2i} & A_i S_{1i} + B_{2i} \tilde{K}_i & \tilde{F}_i & 0 \\ \tilde{\tilde{\overline{K}}}_i C_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1i} S_{1i} & C_{1i} S_{2i} + D_{2i} \tilde{K}_i & 0 & D_{1i} \end{bmatrix},$$

$$V_i C_{2i} = C_{2i} S_{1i}. \tag{2.2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основе утверждения ii) теоремы 2 получим неравенство

$$\begin{bmatrix} -S_i & 0 & M_i^T & N_i^T \\ 0 & -\gamma^2 I & \tilde{B}_c^T & D_{1i}^T \\ M_i & \tilde{B}_c & -S_j & 0 \\ N_i & D_{1i} & 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta A_i + \Delta B_{2i} \tilde{K}_i & 0 & \Delta B_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta C_{1i} & \Delta C_{1i} + \Delta D_{2i} \tilde{K}_i & 0 & \Delta D_{1i} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta A_i + \Delta B_{2i} \tilde{K}_i & 0 & \Delta B_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta C_{1i} & \Delta C_{1i} + \Delta D_{2i} \tilde{K}_i & 0 & \Delta D_{1i} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}^T < 0, \tag{2.2.4}$$

которое эквивалентно условиям

$$\begin{bmatrix} -S_i & 0 & M_i^T & N_i^T \\ 0 & -\gamma^2 I & \tilde{B}_c^T & D_{1i}^T \\ M_i & \tilde{B}_c & -S_j & 0 \\ N_i & D_{1i} & 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{H}_i \tilde{\Gamma}_i \tilde{E}_i + \{\tilde{H}_i \tilde{\Gamma}_i \tilde{E}_i\}^T < 0, \tag{2.2.5}$$

где

$$\widetilde{E}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & E_{Ai}S_{1i} & E_{Ai}S_{2i} + E_{B2i}\widetilde{K}_i & 0 & E_{B1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{C1i}S_{1i} & E_{C1i}S_{2i} + E_{D2i}\widetilde{K}_i & 0 & E_{D1i} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{H}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_i & H_i & 0 & H_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_i & H_i & 0 & H_i \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix}.$$

На основе леммы посредством простых преобразований можем получить (2.2.1)–(2.2.3).

Теорема 4. Если существуют симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i} \in R^{n \times n}$, $S_{2i} \in R^{n \times n}$ и $S_{3i} \in R^{n \times n}$, а также матрицы $\widetilde{K}_i, \widetilde{L}_i$, $\widetilde{F}_i, \widetilde{\widetilde{K}}_i$, $i \in \widetilde{N}$, соответствующих размеров, кроме того, постоянные числа $\varepsilon_{ij} \in R^+$ и обратимые матрицы $G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, V_i \in R^{n \times n}$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (2.2.6)–(2.2.11), то замкнутая система (1.7) является асимптотически устойчивой и матрицы коэффициентов определяются как $\overline{K}_i = \widetilde{\widetilde{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \widetilde{L}_i V_i^{-1}$, $F_i = \widetilde{F}_i G_{3i}^{-1}$ и $K_i = \widetilde{K}_i G_{2i}^{-1}$ соответственно:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{S}_i & M_i^T & N_i^T \\ M_i & \widetilde{S}_{ij} & 0 \\ N_i & 0 & \varepsilon_{ij} I \end{bmatrix} < 0, \tag{2.2.6}$$

$$\widetilde{S}_i = \begin{bmatrix} S_{1i} - G_{1i}^T - G_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{2i} - G_{2i}^T - G_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{3i} - G_{3i}^T - G_{3i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \tag{2.2.7}$$

$$\widetilde{S}_{ij} = \begin{bmatrix} -S_{1j} + 3\varepsilon_{ij} H_i H_i^T & 0 & 0 & 3\varepsilon_{ij} H_i H_i^T \\ 0 & -S_{2j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{3j} & 0 \\ 3\varepsilon_{ij} H_i H_i^T & 0 & 0 & -I + 3\varepsilon_{ij} H_i H_i^T \end{bmatrix}, \tag{2.2.8}$$

$$N_i = \begin{bmatrix} E_{Ai}G_{1i} & E_{Ai}G_{2i} + E_{B2i}\widetilde{K}_i & 0 & E_{B1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{C1i}G_{1i} & E_{C1i}G_{2i} + E_{D2i}\widetilde{K}_i & 0 & E_{D1i} \end{bmatrix}, \tag{2.2.9}$$

$$M_i = \begin{bmatrix} A_i G_{1i} - \tilde{L}_i C_{2i} & 0 & -\tilde{F}_i & B_{1c} \\ \tilde{L}_i C_{2i} & A_i G_{1i} + B_{2i}\tilde{K}_i & \tilde{F}_i & 0 \\ \tilde{\tilde{K}}_i C_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1i} S_{1i} & C_{1i} G_{2i} + D_{2i}\tilde{K}_i & 0 & D_{1i} \end{bmatrix}, \tag{2.2.10}$$

$$V_i C_{2i} = C_{2i} G_{1i}. \tag{2.2.11}$$

3. Численный пример. Рассмотрим систему (1.1). Последовательность переключений в системе произвольна, а элементы матриц коэффициентов имеют следующие значения.

Подсистема 1:

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 1,0 \\ -0,2 & 0,4 & 0 \\ -0,8 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}; \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0,13 & 0,23 \\ 0,20 & 0,21 \\ 0,20 & 0,12 \end{bmatrix}; \quad C_{11} = \begin{bmatrix} -0,001 & 0 & 0 \\ 0 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0 & -0,001 \end{bmatrix}; \\ D_{11} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,11 & 0,12 \\ 0,04 & 0,11 \end{bmatrix}; \; C_{21} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}; \; B_{21} = \begin{bmatrix} 0,120 & 0,160 \\ 0,211 & 1,076 \\ 0,801 & 1,256 \end{bmatrix}; \; D_{21} = \begin{bmatrix} 0,2100 & 0,1356 \\ 0,1650 & 0,1570 \\ 0,1643 & 0,1540 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Подсистема 2:

$$\begin{cases} A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 1,1 \\ 1,0 & 0,4 & 0 \\ -0,8 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}; \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0,230 & 0,225 \\ 0,217 & 0,208 \\ 0,120 & 0,200 \end{bmatrix}; \quad C_{12} = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & -0,010 & 0 \\ 0 & 0 & -0,001 \end{bmatrix}; \\ D_{12} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,05 \\ 0,11 & 0,11 \\ 0,11 & 0,12 \end{bmatrix}; \; C_{22} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}; \; B_{22} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,16 \\ 0,17 & 1,76 \\ 1,70 & 1,28 \end{bmatrix}; \; D_{22} = \begin{bmatrix} 0,3100 & 0,1356 \\ 0,1620 & 0,1650 \\ 0,1633 & 0,1530 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Цель работы состоит в проектировании регулятора обратной связи, позволяющего реализовать L_2-управление согласно определению. Общий вид регулятора задан выражением (1.3). Пусть L_2-коэффициент определяется значением $\gamma = 0,8884$. На основе утверждения iii) теоремы 2 можем построить выходной динамический компенсатор предлагаемого вида, матрицы коэффициентов которого имеют вид

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,6337 & 0,3114 & 1,5918 \\ 0,9006 & -0,2537 & -1,3366 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0,3499 & -0,0928 & -0,5438 \\ -0,0820 & -0,0040 & 0,0199 \end{bmatrix};$$

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 113,951 & -11,772 & -85,086 \\ 101,440 & -19,010 & -136,440 \\ -259,590 & 52,920 & 323,200 \end{bmatrix}; \quad \bar{K}_2 = \begin{bmatrix} 139,021 & -20,9570 & -144,318 \\ -139,980 & 27,4985 & 157,754 \\ -18,4510 & 8,8013 & 52,606 \end{bmatrix};$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 5,8222 & 1,3605 & 4,6590 \\ 0,2553 & -4,0340 & -20,2700 \\ -4,8164 & 0,9729 & 6,1951 \end{bmatrix}; \quad L_2 = \begin{bmatrix} 2,391 & 1,9799 & 9,1638 \\ 3,813 & -5,5700 & -29,6800 \\ -4,996 & 1,5481 & 9,3662 \end{bmatrix};$$

$$F_1 = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0,3 & -0,2 & -0,2 \\ -0,3 & 1,6 & -0,4 \\ 0,2 & -0,4 & 0,2 \end{bmatrix}; \quad F_2 = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 2,3 & -0,4 \\ 0 & -0,4 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Заключение. В данной работе использован выходной динамический компенсатор, чтобы обеспечить L_2-коэффициент усиления переключающейся системы, а затем для нее синтезирован робастный автоматический регулятор. На основе некоторых прикладных задач было установлено, что выходной динамический компенсатор имеет лучшие рабочие характеристики, чем обычный компенсатор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лю С.-Л., Дуань Г.-Ж.** Робастный пропорционально-интегральный наблюдатель для переключающихся систем // Автометрия. 2006. **42**, № 5. С. 121.
2. **Vidyasagar M.** Nonlinear Systems Analysis. Upper Saddle River. N. J.: Prentice-Hall, 1993.

Поступила в редакцию 12 сентября 2005 г.