РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2006, том 42, № 4

УДК 621.391.266

СИНТЕЗ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ОБЪЕМЕ АЛФАВИТА, НЕ СОВПАДАЮЩЕМ С РАЗМЕРНОСТЬЮ СИГНАЛА*

А. А. Роженцов

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола
E-mail: rts@marstu.mari.ru

Обобщаются результаты синтеза помехоустойчивых сигналов, полученных для случая равенства объема алфавита и размерности сигнала. Решается задача синтеза дискретных комплекснозначных сигналов с максимальными взаимными расстояниями, когда размерности алфавита и сигнала не совпадают. Решение базируется на результатах, полученных при синтезе симплексных сигналов. Показано, что при размерности сигнала k объем алфавита симплексных сигналов составляет $k + 1$, а общее количество алфавитов бесконечно. Полученные результаты позволяют выполнять оценку потенциальной помехоустойчивости системы распознавания изображений в случае произвольных размерностей сигналов и объемов алфавита.

Введение. Определение потенциально достижимых характеристик является одной из важнейших задач при разработке практически любых технических систем, в том числе систем машинного зрения, базирующихся на методологии контурного анализа. В работе [1] изложены подходы к решению данной задачи для случая, когда объем алфавита и размерность сигнала совпадают. Было показано, что для оценки помехоустойчивости необходимо синтезировать алфавит сигналов, расстояние между которыми в выбранном комплексном линейном пространстве максимально. Такой алфавит был синтезирован на базе сигналов из полного семейства элементарных контуров, и найдены аналитические соотношения и результаты экспериментальных исследований по оценке потенциальной помехоустойчивости. Однако ряд вопросов, связанных с синтезом сигналов и интерпретацией полученных результатов, не был решен.

Целью данной работы является создание общих методов синтеза помехоустойчивых контурных сигналов, в том числе для случаев несовпадения размерностей сигнала и алфавита, определения количества алфавитов симплексных сигналов и объема алфавита при заданной размерности сигнала.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 04-01-00243, № 05-01-96510р_поволжье_а).

Постановка задачи синтеза алфавита симплексных сигналов. Пусть необходимо синтезировать алфавит сигналов $\{\mathbf{\Gamma}_m\}_{0,\ M-1}$ таких, что

$$(\mathbf{\Gamma}_m, \mathbf{\Gamma}_n) = \begin{cases} \|\mathbf{\Gamma}_n\|^2 & \text{при } m = n; \\ -1 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

В качестве ограничений, учитываемых при синтезе, примем $|\gamma_m(s)| = 1$, значение минимальной разности фаз между соседними векторами может составлять $\Delta\varphi_{\min} = \frac{2\pi}{N}$, а сами значения фаз принадлежат множеству $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n} s$, $s = 0, 1, \ldots, N-1$, где N – положительное целое число.

Значение скалярного произведения сигналов $\mathbf{\Gamma}_m$ и $\mathbf{\Gamma}_n$ определяется соотношением

$$(\mathbf{\Gamma}_m, \mathbf{\Gamma}_n) = \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_m(s)\gamma_n^*(s) = \sum_{s=0}^{k-1} \exp\{i\varphi_m(s)\}\exp\{-i\varphi_n(s)\} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-1} \exp\{i(\varphi_m(s) - \varphi_n(s))\} = \sum_{s=0}^{k-1} \exp\{i\Delta\varphi_{mn}(s)\},$$

где k – размерность сигнала. Принимая во внимание требования к значениям аргументов векторов, т. е. $\varphi_m(s) = \frac{2\pi}{N} r_m(s)$, $\varphi_n(s) = \frac{2\pi}{N} r_n(s)$, где $r_m(s)$ – целочисленная функция, определяющая значение аргумента текущего вектора, последнее выражение можно записать в виде

$$(\Gamma_m, \Gamma_n) = \sum_{s=0}^{k-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}(r_m(s) - r_n(s)) \right\} = \sum_{s=0}^{k-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}\Delta r_{mn}(s) \right\}.$$

С учетом цикличности функции $\exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}\Delta r_{mn}(s) \right\}$ функция $\Delta r_{mn}(s)$ может принимать значения $\Delta r_{mn}(s) = 0, 1, \ldots, N-1$.

Из требований к симплексным сигналам вытекает

$$\sum_{s=0}^{k-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}\Delta r_{mn}(s) \right\} = \begin{cases} k & \text{при } m = n; \\ -1 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \tag{1}$$

Таким образом, решение задачи синтеза симплексных сигналов должно осуществляться в два этапа. На первом этапе выполняется поиск таких значений чисел $\Delta r_{mn}(s)$, при которых сумма $\sum_{s=0}^{k-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}\Delta r_{mn}(s) \right\}$ принимает значение, равное -1. Любая найденная комбинация значений $\Delta r_{mn}(s)$, $s = 0, 1, \ldots, k-1$, называемая базовой и удовлетворяющая данному условию, может порождать некоторое множество симплексных сигналов за счет перестановок членов суммы (1).

На втором этапе синтеза выполняется поиск перестановок значений Δr, образующих группу. При выполнении данного условия значения $\Delta r_{mn}(s)$ будут непосредственно задавать комбинации, определяющие искомые сигналы.

Поиск базовых комбинаций. При небольших значениях k и N комбинации $\Delta r_{mn}(s)$, удовлетворяющие (1), могут быть найдены непосредственным перебором, поскольку количество возможных комбинаций составляет N^k. С ростом размерности сигнала и уменьшением дискретности фазы количество комбинаций будет быстро расти, и непосредственный перебор становится невозможным. Поэтому при больших значениях k и N искомые комбинации необходимо найти из уравнения деления круга.

Уравнение деления круга на N равных частей записывается в виде

$$\Phi_N = x^{\varphi(N)} + \alpha_1 x^{\varphi(N)-1} + \alpha_2 x^{\varphi(N)-2} + \ldots + \alpha_{\varphi(N)-1} x + \alpha_{\varphi(N)} = 0, \qquad (2)$$

где $\varphi(N)$ – функция Эйлера, α – целые числа. Корни данного уравнения определяются из условия $x_l = \exp\left\{ i \frac{2\pi}{N} \lambda_l \right\}$, где λ_l, $l = 1, \ldots, \varphi(N)$, – число, взаимно простое с числом N. Наша задача состоит в определении коэффициентов a. Можно показать, что эти коэффициенты принадлежат полю целых чисел, взятых по модулю k.

Конкретные значения коэффициентов $\Delta r_{mn}(s)$ определяются из условия формирования кодовой комбинации симплексного сигнала из подгрупп и их смежных классов аддитивной группы порядка N, необходимые количество и порядок которых определяются из возможных разложений числа $k+1$. Количество смежных классов подгруппы (ее индекс) равно отношению порядка группы к порядку подгруппы [2]. Поскольку сумма нетривиальных аддитивных характеров некоторого поля равна нулю, то в пределах каждой невырожденной подгруппы и ее смежного класса сумма вида $\sum_{n=0}^{|H|-1} \exp\left\{ i \frac{2\pi}{N} (h_n + a) \right\}$, где $|H|$ – порядок подгруппы, h_n – элемент подгруппы H, a – элемент группы G, $G = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, будет равна нулю. Поэтому при поиске базовых комбинаций необходимо число $k+1$ представить в виде суммы порядков подгрупп данной группы G и выстроить все возможные комбинации подгрупп и их смежных классов, удовлетворяющих данному условию разбиения.

При поиске искомой комбинации первоначально примем, что сумма $\sum_{n=0}^{k} \exp\left\{ i \frac{2\pi}{N} \Delta r_{mn}(s) \right\}$ должна иметь нулевое значение и одно из слагаемых равно единице, т. е. один из коэффициентов $\Delta r_{mn}(s)$ должен быть равен нулю. Данное условие исключает из рассмотрения последовательности, получаемые циклическими сдвигами и поворотами на угол $\frac{2\pi}{N}$. Отбрасывание элемента $\Delta r_{mn}(s) = 0$ из полученной последовательности приведет к тому, что искомая сумма станет равной –1.

П р и м е р. Пусть необходимо найти базовые последовательности для $k = 5$, $N = 4$. Группа $G_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Ее подгруппы и смежные классы приведены в таблице.

Число $k+1 = 6$ с учетом порядков невырожденных подгрупп и их смежных классов можно представить в виде разбиений 6 = 4 + 2 = 2 + 2 + 2.

Подгруппа	Порядок	Смежные классы
$H_0 = \{0\}$	$\lvert H_0 \rvert = 1$	$\{1\}\ \ \{2\}\ \ \{3\}$
$H_1 = \{0, 1, 2, 3\}$	$\lvert H_1 \rvert = 4$	–
$H_2 = \{0, 2\}$	$\lvert H_2 \rvert = 2$	$\{1, 3\}$

Тогда искомые комбинации (кроме получаемых перестановками) будут иметь следующий вид:

$$\Delta r_{mn} = \{\underbrace{0,1,2,3,}_{H_0}\ \underbrace{0,2}_{H_2}\}, \qquad \Delta r_{mn} = \{\underbrace{0,1,2,3,}_{H_0}\ \underbrace{1,3}_{H_2+1}\}, \qquad \Delta r_{mn} = \{\underbrace{0,2,}_{H_2}\ \underbrace{0,2,}_{H_2}\ \underbrace{0,2}_{H_2}\}.$$

Исключая по одному нулевому элементу из каждой комбинации, окончательно получим:

$$\Delta r_{mn} = \{0,1,2,2,3\}, \qquad \Delta r_{mn} = \{1,1,2,3,3\}, \qquad \Delta r_{mn} = \{0,0,2,2,2\}.$$

На рис. 1 представлен один из синтезированных алфавитов симплексных сигналов для $k = 5,\ M = 3$.

Формирование алфавитов симплексных последовательностей на основе базовых комбинаций. *Формирование алфавита симплексных последовательностей на базе унитарных матриц.* Набор экспонент вида $\exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}mn \right\},\ m, n = 0, 1, \ldots, N-1$, задает некоторую унитарную матрицу **O** размера $N \times N$. Порождающей матрицей для нее является матрица **I** произведений индексов m, n, взятых по модулю числа N. Если каждый элемент матрицы **O** заменить его произведением на некоторую другую унитарную подматрицу **O′**, то полученная матрица также будет ортогональной. Элементы порождающей матрицы **O** будут определяться суммой элементов матрицы **I**, порождающей эту унитарную матрицу, и подматрицы **I′**, порождающей унитарную подматрицу **O′**. Поскольку при синтезе симплексных сигналов необходимо обеспечить равенство всех элементов одного из столбцов в полученной матрице единице, то в сформированной матрице в каждой строке требуется выполнить обратный поворот всех векторов на угол, равный аргументу первого в данной строке элемента.

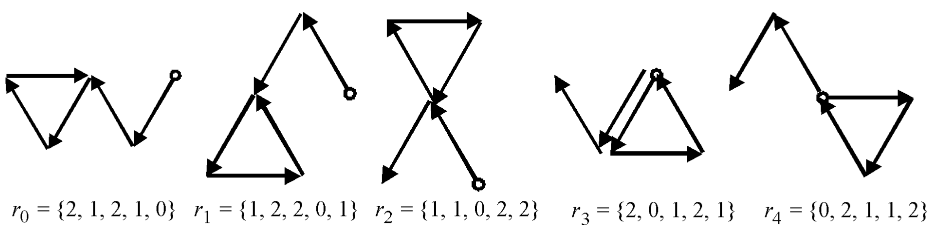

Рис. 1. Контурное представление синтезированных сигналов для $k = 5,\ M = 3$

Например, при $N = 4$ можно сформировать следующий алфавит симплексных сигналов:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i \\ -1 & i & -i & -1 & 1 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i \\ -1 & -i & i & -1 & 1 & i & -i \end{bmatrix}.$$

Формирование алфавитов симплексных последовательностей с помощью матриц Адамара. Одной из разновидностей ортогональных матриц являются матрицы Адамара, на основе которых может быть получен алфавит ортогональных бинарных сигналов размерностью 2^n, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ – любое положительное целое число [3]. Сами матрицы формируются на основе рекуррентных соотношений:

$$\mathbf{H}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m & \mathbf{H}_m \\ \mathbf{H}_m & -\mathbf{H}_m \end{bmatrix}. \tag{3}$$

При этом предполагается, что $\mathbf{H}_0 = 1$. Полученные на основе матриц Адамара ортогональные последовательности сами по себе могут быть основой для построения алфавита симплексных бинарных сигналов, поскольку сформированные по правилу (3) кодовые последовательности имеют равный 1 первый элемент. При его отбрасывании скалярное произведение последовательностей, задаваемых матрицей Адамара, станет равно –1.

Рассмотренный подход может быть распространен на фазокодированные сигналы, размерность которых равна $m2^n - 1$, где m и n – натуральные числа. Для этого в качестве матрицы $\mathbf{H}_0$ необходимо брать не 1, а некоторую унитарную матрицу $\mathbf{H}_0 = \mathbf{O}$ размера $m \times m$. Конкретные значения элементов $o_{mn} = \exp\left\{ i \frac{2\pi}{N} r_{mn} \right\}$ матрицы $\mathbf{O}$ выбираются из условия принадлежности порождающих их значений кода r_{mn} подгруппам, относящимся к группе, образованной взятием чисел по модулю числа N, причем $\mathbf{O}^{\langle 0 \rangle} = 1$.

Например, для $N = 3$ могут быть получены следующие алфавиты симплексных сигналов:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}5 + 0{,}866i & -0{,}5 - 0{,}866i \\ -0{,}5 - 0{,}866i & -0{,}5 + 0{,}866i \end{bmatrix},$$

$$
\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5+0{,}866i & -0{,}5-0{,}866i & 1 & -0{,}5+0{,}866i & -0{,}5-0{,}866i \\ -0{,}5-0{,}866i & -0{,}5+0{,}866i & 1 & -0{,}5-0{,}866i & -0{,}5+0{,}866i \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -0{,}5+0{,}866i & -0{,}5-0{,}866i & -1 & 0{,}5-0{,}866i & 0{,}5+0{,}866i \\ -0{,}5-0{,}866i & -0{,}5+0{,}866i & -1 & 0{,}5+0{,}866i & 0{,}5-0{,}866i \end{bmatrix}
$$

и т. д.

На основе полученных кодовых комбинаций могут быть найдены новые кодовые комбинации, поскольку добавление на любом (или каждом) кодовом интервале ко всем кодовым комбинациям произвольного числа не изменит свойств суммы (1), так как

$$
\sum_{n=0}^{k-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}((\Delta r_m(s)+c(s))-(\Delta r_n(s)+c(s)))\right\} =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{k-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}(\Delta r_m(s)-\Delta r_n(s))\right\}. \tag{4}
$$

Соотношение (4) позволяет сделать важный вывод: при фиксированной размерности сигнала можно сформировать неограниченное количество алфавитов симплексных сигналов с $|\gamma|=1$. Задавая закон изменения параметра $c(n)$, можно получить минимальные фазовые сдвиги между векторами на соседних кодовых интервалах, отличные от определяемых базовыми комбинациями. Кроме того, поскольку кодовые последовательности формируются путем отбрасывания одного кодового интервала от ортогональных последовательностей, то при данной размерности сигнала существует не k, а $k+1$ симплексный сигнал.

Формирование алфавитов симплексных последовательностей на базе сигналов с равномерным энергетическим спектром (РЭС). В работе [4] получено полное решение задачи синтеза сигналов с РЭС и дельтовидной АКФ и показано, что ряд кодовых комбинаций образует алфавит сигналов, скалярное произведение которых равно нулю. Поскольку в качестве условия синтеза таких сигналов было принято $\gamma(0)=1$, то очевидно, что отбрасывание из таких кодовых комбинаций нулевого отсчета приведет к тому, что величина скалярного произведения станет равной –1. Базовые кодовые комбинации сигналов с РЭС определяются из следующего соотношения [4]: $r_l(n)=\lambda_l n^2 (\mathrm{mod}\, k_1)$, где $l=1,2,\ldots,\varphi(k_1)$, $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера; $n=0,1,\ldots,k-1$; λ_l – число, взаимно простое с числом k_1, $k_1 =$
$= \begin{cases} 2k, \text{ если } k \text{ четное;} \\ k, \text{ если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$ Существует также ряд особых случаев для определенных размерностей k, которые также исследованы в [4]. Дополнительные кодовые комбинации на основе базовых кодовых комбинаций, образующие

алфавит ортогональных сигналов, могут быть получены из соотношений

$$r_l(n+lk,\ k-n+m(\mathrm{mod}k)) = r_l(m) - r_l(n),$$
$$n=0,1,\ldots,k-1,\ m=0,1,\ldots,k-1 \ \text{для нечетных}\ k,$$

$$r_l(n+lk/2,\ k-n+m(\mathrm{mod}k)) = r_l(m) - r_l(n),$$
$$n=0,1,\ldots,k/2-1,\ m=0,1,\ldots,k-1 \ \text{для четных}\ k.$$

П р и м е р. Рассмотрим пример формирования алфавита симплексных сигналов на базе сигналов с РЭС. Например, для $k=5$ получим симплексные последовательности

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0{,}86+0{,}5i & -0{,}5+0{,}86i & -i & -0{,}5+0{,}86i & 0{,}86+0{,}5i \\ i & -0{,}5-0{,}86i & i & 1 & 0{,}86-0{,}5i \\ -0{,}86+0{,}5i & 1 & -i & -0{,}5-0{,}86i & -i \\ -0{,}86-0{,}5i & -0{,}5+0{,}86i & i & -0{,}5+0{,}86i & -0{,}86-0{,}5i \\ -i & -0{,}5-0{,}86i & -i & 1 & -0{,}86+0{,}5i \\ 0{,}86-0{,}5i & 1 & i & -0{,}5-0{,}86i & i \end{bmatrix}.$$

Синтез симплексных кодирующих последовательностей на базе магических квадратов. Под магическим квадратом понимается матрица, у которой суммы элементов строк, столбцов и главных диагоналей одинаковы. Общие подходы к синтезу магических квадратов изложены в [5]. Известные магические квадраты могут быть получены на основе линейного метода построения при подстановке соответствующих коэффициентов:

$$x \equiv a_1\left[\frac{z-1}{n}\right] + b_1(z-1) + c_1(\mathrm{mod}n),$$

$$y \equiv a_2\left[\frac{z-1}{n}\right] + b_2(z-1) + c_2(\mathrm{mod}n),$$

где x, y – координаты клетки, в которую вписывается число z; $n\times n$ – размер квадрата; a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – некоторые коэффициенты, определяемые из условия правильности линейного метода.

Как видно из приведенных соотношений, элементы магического квадрата образуют арифметические прогрессии, компоненты которых располагаются в строках, столбцах и по диагоналям.

При синтезе будем опираться на свойство суммы арифметической прогрессии S с основанием q, согласно которому разность элементов этой суммы, взятых с некоторым сдвигом s, образует арифметическую прогрессию с основанием, равным произведению основания исходной арифметической прогрессии и величины сдвига, т. е. $q_s = qs$. Если элементы суммы арифметической прогрессии брать по модулю некоторого числа k, то через интервал, равный k для нечетных k и равный $2k$ для четных k, они начнут повторяться. Разности элементов сумм прогрессий, взятых со сдвигами, будут образовывать группы чисел по модулю k, причем при $s>1$ – подгруппы и их смежные классы. Как было показано выше, сумма характеров подгруппы равна нулю, поэтому разности элементов арифметической прогрессии, взятые со всеми возможными сдвигами, исключающими появление повторяющихся подгрупп, образуют алфавит ортогональных сигналов. Тогда если выполнить последовательное суммирование элементов в строках магического квадрата и взять эти суммы по модулю n, то полученная матрица будет порождающей для некоторой унитарной матрицы. Поскольку суммы элементов в строках одинаковы, то последний столбец матрицы будет состоять из одинаковых элементов и после его вычитания из всех элементов матрицы при синтезе симплексных сигналов должен быть отброшен. Также отметим, что строки полученной унитарной матрицы задают сигналы с равномерным энергетическим спектром, обладающие дельтовидной автокорреляционной функцией.

Например, для магического квадрата вида

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}17 & 24 & 1 & 8 & 15\\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16\\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22\\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3\\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9\end{bmatrix}$$

алфавит симплексных последовательностей на его основе имеет вид

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-0{,}809+0{,}588i & 0{,}309+0{,}951i & -0{,}809+0{,}588i & 1\\ -0{,}809-0{,}588i & -0{,}809-0{,}588i & 1 & 0{,}309-0{,}951i\\ 0{,}309-0{,}951i & 1 & -0{,}809-0{,}588i & -0{,}809-0{,}588i\\ 1 & -0{,}809+0{,}588i & 0{,}309+0{,}951i & -0{,}809+0{,}588i\\ 0{,}309+0{,}951i & 0{,}309-0{,}951i & 0{,}309-0{,}951i & 0{,}309+0{,}951i\end{bmatrix}.$$

Решение задачи синтеза для случая *M*< *k*. Когда размерность сигнала больше размерности алфавита, задача синтеза алфавита оптимальных с позиции распознавания сигналов решается путем конкатенации симплексных сигналов меньшей размерности. Минимальная размерность используемых при этом сигналов должна быть на единицу меньше количества сигналов в синтезируемом алфавите и равна $M-1$. Количество таких сигналов определяется из выражения

$$M'=\begin{cases}]k/(M-1)[-1, & \text{если } k(\operatorname{mod}(M-1))\neq 0;\\ k/(M-1), & \text{если } k(\operatorname{mod}(M-1))=0.\end{cases}$$

При выполнении первого условия в данном выражении недостающие кодовые интервалы сигнала дополняются отсчетами симплексных сигналов большей, чем $M-1$, размерности, которая определяется соотношением

$$k'=k-M'(M-1).$$

Ряд дополнительных комбинаций может быть получен за счет перестановок внутри каждой комбинации размерности M или k'.

Решение задачи синтеза для случая $M > k$ требует минимизации функции вида

$$\varepsilon = \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{n=m+1}^{M-1} \sum_{s=0}^{k-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}(r_m(s) - r_n(s)) \right\}. \quad (5)$$

Для симплексных сигналов величина ε минимальна при $M = k$ и определяется соотношением

$$\varepsilon_{\text{сим}} = -(M^2 - M)/2.$$

При $M > k$ вследствие сближения сигналов в признаковом пространстве ε будет увеличиваться. Выражение (5) можно переписать в виде

$$\varepsilon = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{n=m+1}^{M-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}(r_m(s) - r_n(s)) \right\} = \sum_{s=0}^{k-1} \varepsilon_s,$$

где ε_s – величина, характеризующая меру различия сигналов на s-м кодовом интервале. Следовательно, задачу минимизации ε можно рассматривать как задачу совместной минимизации величин ε_s, $s = 0, 1, \ldots, k-1$. Последняя задача сводится к поиску кодовых комбинаций размерности $K = (M^2 - M)/2$ с помощью формулы (5), но условие равенства нулю суммы

$$\sum_{m=0}^{M-2} \sum_{n=m+1}^{M-1} \exp\left\{ i\frac{2\pi}{N}\Delta r_{mn}(s) \right\}, \; s = 0, 1, \ldots, k-1,$$

заменяется условием минимизации этой суммы, т. е. поиском таких комбинаций, при которых она не превышает некоторого значения. Для перехода от полученной комбинации к конкретным значениям, задающим кодовую последовательность на s-м кодовом интервале, необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&r_0(s) - r_1(s) = b_0(s),\\
&r_0(s) - r_2(s) = b_1(s),\\
&\qquad\ldots\\
&r_0(s) - r_{M-1}(s) = b_{M-2}(s),\\
&r_1(s) - r_2(s) = b_{M-1}(s),\\
&r_1(s) - r_3(s) = b_M(s),\\
&\qquad\ldots\\
&r_{M-2}(s) - r_{M-1}(s) = b_{K-1}(s).
\end{aligned}$$

В матричном представлении данная система запишется как

$$\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{b}, \tag{6}$$

где матрица **A** имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

В системе (6) количество уравнений больше количества неизвестных переменных, но ее решение на основе метода наименьших квадратов или через псевдообратные матрицы наталкивается на сложности, поскольку ранг матрицы **A** равен $k-1$. Решение системы (6) оказывается возможным, если положить одну из переменных равной нулю, например $r_0(s)=0$. В этом случае матрица **A** может быть преобразована к виду

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Псевдообратная по отношению к $\mathbf{A}'$ матрица находится из соотношения [6] $\mathbf{A}'^{+} = (\mathbf{A}'^{\mathrm{T}}\mathbf{A}')\mathbf{A}'^{\mathrm{T}}$, а решение системы (5) – из условия

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}'^{+}\,\mathbf{b}. \tag{7}$$

В общем случае найденное в соответствии с (7) решение является приближенным, поскольку принципиально не все возможные значения вектора **b** могут быть получены из системы (6), однако полученное решение удовлетворяет условию минимальной среднеквадратической ошибки [7], поэтому может считаться наилучшим.

Таким образом, поскольку на каждом шаге синтеза обеспечивается наилучшее приближение к минимизируемой величине ε_s, то обеспечивается и общая минимизация величины ε.

Заключение. В работе решена задача синтеза комплекснозначных сигналов, обеспечивающих максимальную помехоустойчивость при распознавании. В случае совпадения размерности сигнала с размерностью алфавита решение сведено к поиску симплексных сигналов, формируемых либо на базе кодовых комбинаций, обеспечивающих нулевую сумму ее векторов, либо на базе унитарных и ортогональных матриц. Показано, что при размерности k объем алфавита симплексных сигналов составляет $k+1$, а общее количество алфавитов бесконечно. Полученные симплексные последовательности являются основой для формирования помехоустойчивых сигналов с размерностями как меньше, так и больше объема алфавита. При $M<1$ синтез помехоустойчивых сигналов осуществляется путем конкатенации симплексных сигналов меньшей размерности. При $M>1$ синтез сводится к минимизации частных скалярных произведений сигналов на каждом кодовом интервале. Поскольку синтезированные в работе сигналы имеют одинаковые модули отсчетов на каждом кодовом интервале и не содержат фигур, обладающих свойствами подобий, то они допускают простую и однозначную интерпретацию в виде визуальных образов, помехоустойчивых при распознавании.

Синтезированные симплексные сигналы в признаковом пространстве максимально удалены друг от друга при произвольных соотношениях размерности сигнала и объема алфавита и обеспечивают предельно достижимые вероятности правильного распознавания, конкретные значения которых вычисляются в соответствии с методикой, рассмотренной в работе [1] для частного случая, когда объем алфавита равен размерности сигнала. В качестве примера оценки предельно достижимых значений $P_{\text{пр}}$ для полученных в данной работе сигналов можно привести результаты, представленные на рис. 2. Ортогональные сигналы с ростом размерности обеспечивают вероятность правильного распознавания, близкую к вероятности правильного распознавания симплексных сигналов. Практически такие близкие результаты достигаются при размерности $k>10$. Значительный выигрыш симплексных сигналов в эффективности достигается при меньших размерностях алфавита. Именно такой случай и представляет интерес, например, когда размерность группового точечного объекта имеет величину порядка 5–7. В связи с этим

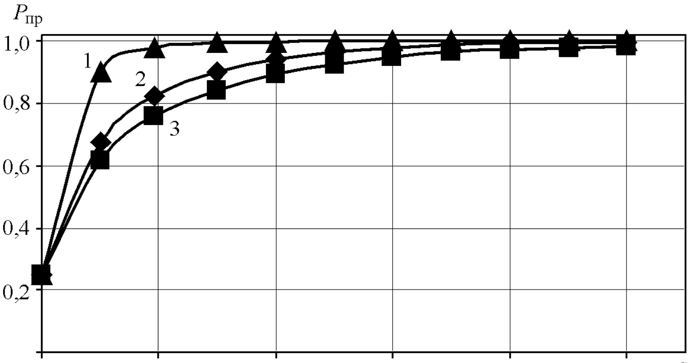

Рис. 2. Графики зависимостей вероятностей правильного распознавания: 1 – квазисимплексные сигналы ($M=4$, $k=9$); 2 – ортогональные ($M=k=4$) и симплексные ($M=k+1=4$) сигналы; 3 – квазисимплексные сигналы ($M=4$, $k=3$): $\mathbf{\Gamma}_0=\{1,1,1\}$, $\mathbf{\Gamma}_1=\{-1,-1,1\}$, $\mathbf{\Gamma}_2=\{1,-1,1\}$, $\mathbf{\Gamma}_3=\{-1,1,-1\}$

основное внимание уделено симплексным сигналам как обеспечивающим предельно достижимые вероятности правильного распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фурман Я. А., Роженцов А. А.** О предельно достижимых вероятностях правильного распознавания многомерных векторных сигналов // Автометрия. 2004. **40**, № 3. С. 31.
2. **Лидл Р., Нидеррайтер Г.** Конечные поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
3. **Баскаков С. И.** Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк., 2000.
4. **Леухин А. Н.** Синтез *N*-позиционных фазокодированных сигналов с нулевыми боковыми лепестками циклической автокорреляционной функции // Межвуз. сб. науч. тр. «Методы и устройства передачи и обработки информации». С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 2004. С. 53.
5. **Постников М. М.** Магические квадраты. М.: Наука, 1964.
6. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1976.
7. **Тихонов А. Н., Арсеньев В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 27 июля 2005 г.