Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2006, том 42, № 3

УДК 519.68

# ПРИМЕНЕНИЕ КЛЕТОЧНО-АВТОМАТНОЙ МОДЕЛИ ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ИССЛЕДОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД *

**Ю. Г. Медведев**

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск*
*E-mail: medvedev@ssd.sscc.ru*

Рассмотрена проблема клеточно-автоматного моделирования потоков жидкости в пористых средах. Для исследований использована трехмерная клеточно-автоматная модель RD-I. Кратко описана структура этой модели, подробно рассмотрены граничные условия и способ осреднения по времени. Представлена серия вычислительных экспериментов по моделированию потока жидкости через пористую среду. Произведено сравнение его характеристик с законом Дарси и другими физическими законами. Приведены иллюстрации поля скорости модельного потока в пористой среде.

**Введение.** Клеточно-автоматное (КА) моделирование потоков жидкости в последнее время получило большое развитие. Известен ряд двумерных моделей, а также четырехмерная, моделирующая трехмерные потоки [1]. В работе [2] предложена трехмерная КА-модель, имеющая гораздо меньшую сложность, чем четырехмерная. Результаты экспериментальных исследований подтверждают, что трехмерная КА-модель адекватно описывает поток вязкой жидкости. В [3] получены количественные характеристики модельных параметров и выведены соотношения между ними и физическими характеристиками потока, такими как вязкость, геометрические размеры, давление.

В предлагаемой работе описаны граничные условия трехмерной модели RD-I, рассмотрены способы осреднения по пространству и по времени. Представленные материалы относятся к области изучения пористых сред. В связи с этим введены некоторые понятия, используемые в динамике пористых сред, описаны способы задания пористой среды в КА-модели. Работа содержит следующие результаты численного моделирования: поле скорости потока в пористой среде, зависимость скорости фильтрации от напорного градиента и зависимость коэффициента фильтрации от плотности заполнения среды.

* Работа выполнена при поддержке Президиума РАН «Программа фундаментальных исследований № 14.15» (2006).

**Модель RD-I.** Трехмерная модель RD-I задается следующим образом. Клетки $w \in W$ автомата расположены в трехмерных декартовых координатах так же, как и центры ромбических додекаэдров, плотно заполняющих трехмерное пространство. Соседними с клеткой $w$ являются клетки $N_l(w)$, $l = 1, 2, \dots, 12$, которые находятся в центрах ромбододекаэдров, имеющих с $w$ общую грань.

Для определения координат* $x, y, z \in R$ клетки $w$ в трехмерной декартовой системе каждой клетке $w \in W$ ставится во взаимно однозначное соответствие тройка целочисленных индексов $i, j, k \in Z$. С учетом этого соответствия множество $W$ клеток автомата обозначается как $W = \{w_{i,\ j,\ k} : i, j, k \in Z\}$. Координаты $x, y$ и $z$ клетки $w_{i,\ j,\ k}$ находятся в следующих соотношениях с ее индексами:

$$x(w_{i,\ j,\ k}) = i; \quad y(w_{i,\ j,\ k}) = j; \quad z(w_{i,\ j,\ k}) = 2k + ((i + j) \bmod 2). \qquad (1)$$

Индексы клетки $w_{i,\ j,\ k}$ зависят от ее координат следующим образом:

$$i(x, y, z) = x; \quad j(x, y, z) = y; \quad k(x, y, z) = \lfloor z/2 \rfloor, \qquad (2)$$

где $\lfloor z/2 \rfloor$ – наименьшее ближайшее целое от $z/2$.

На рис. 1 кружками изображены клетки в декартовой системе координат, ось $Ox$ направлена от наблюдателя, наклонной штриховкой помечены клетки

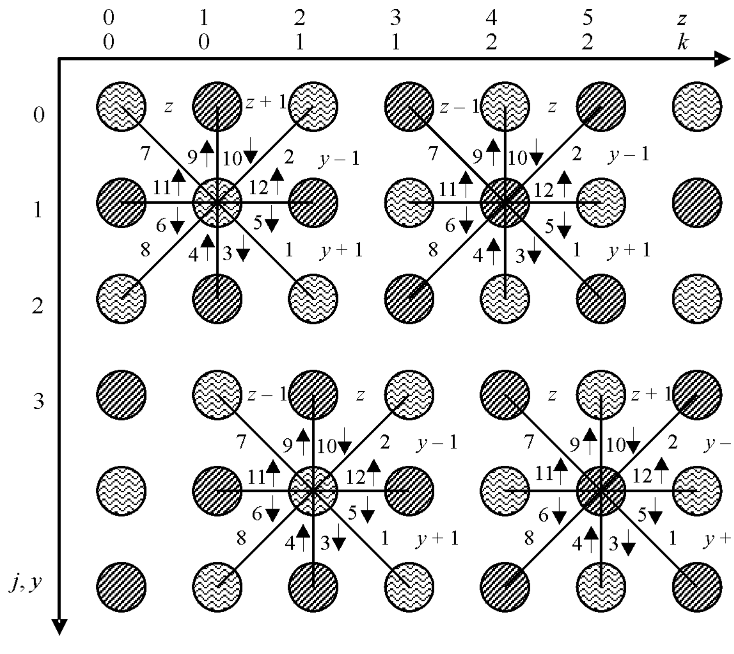


*Рис. 1.* Координаты клеток в трехмерном декартовом пространстве

---

* Расположение клеток модели RD-I в трехмерном пространстве, предлагаемое в данной работе, отличается от описанного в [2] ориентацией системы ромбододекаэдров относительно координатных осей.

Таблица 1

**Разность координат соседей**

| $((i+j)\bmod 2)=0$ | | | | $((i+j)\bmod 2)=1$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | $\Delta x_l$ | $\Delta y_l$ | $\Delta z_l$ | $l$ | $\Delta x_l$ | $\Delta y_l$ | $\Delta z_l$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | –1 | 1 | 2 | 0 | –1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | –1 | 1 | 0 | 4 | –1 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | –1 |
| 7 | 0 | –1 | 0 | 7 | 0 | –1 | –1 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 8 | 0 | 1 | –1 |
| 9 | –1 | –1 | 0 | 9 | –1 | –1 | 0 |
| 10 | 1 | –1 | 0 | 10 | 1 | –1 | 0 |
| 11 | –1 | 0 | 0 | 11 | –1 | 0 | –1 |
| 12 | –1 | 0 | 1 | 12 | –1 | 0 | 0 |

Таблица 2

**Проекции векторов скорости на декартовы оси**

| $l$ | $c_{lx}$ | $c_{ly}$ | $c_{lz}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | –1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | –1 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 0 | –1 |
| 7 | 0 | –1 | –1 |
| 8 | 0 | 1 | –1 |
| 9 | –1 | –1 | 0 |
| 10 | 1 | –1 | 0 |
| 11 | –1 | 0 | –1 |
| 12 | –1 | 0 | 1 |

в тех слоях, где $x$ нечетное, волнистой штриховкой – где $x$ четное. Цифрами $l$ обозначены направления к соседним клеткам $N_l$, стрелки возле цифр указывают, как меняется координата $x$: в сторону увеличения (стрелка вверх) или в сторону уменьшения (стрелка вниз) на единицу. В табл. 1 приведены разности $\Delta x_l, \Delta y_l$ и $\Delta z_l$ координат $x$, $y$ и $z$ клетки $w_{i,\,j,\,k}$ и координат каждой $l$-й ($l = 1, 2, \ldots, 12$) соседней клетки:

$$\Delta x_l = x(N_l(w_{i,\,j,\,k})) - x(w_{i,\,j,\,k}); \qquad \Delta y_l = y(N_l(w_{i,\,j,\,k})) - y(w_{i,\,j,\,k});$$

$$\Delta z_l = z(N_l(w_{i,\,j,\,k})) - z(w_{i,\,j,\,k}), \tag{3}$$

где $x(N_l(w_{i,\,j,\,k}))$, $y(N_l(w_{i,\,j,\,k}))$ и $z(N_l(w_{i,\,j,\,k}))$ – координаты $N_l(w_{i,\,j,\,k})$, т. е. $l$-го соседа клетки $w_{i,\,j,\,k}$. Случаи, когда четности $x$ и $y$ совпадают, даны в левой части табл. 1, когда не совпадают – в правой. В табл. 2 приведены значения проекций $c_{lx}$, $c_{ly}$ и $c_{lz}$ векторов скорости $\mathbf{c}_l$, направленных к соседям $N_l$, $l = 1, 2, \ldots, 12$, на декартовы оси $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно.

Расстояние $d$ между любыми двумя клетками $w_{i_1,\,j_1,\,k_1}$ и $w_{i_2,\,j_2,\,k_2}$ в декартовой системе координат определяется по формуле

$$d^2 = (i_2 - i_1)^2 + (j_2 - j_1)^2 +$$

$$+(2(k_2 - k_1) + ((i_2 + j_2)\bmod 2) - ((i_1 + j_1)\bmod 2))^2, \qquad (4)$$

где $(i_1, j_1, k_1)$ и $(i_2, j_2, k_2)$ – индексы клеток $w_{i_1, j_1, k_1}$ и $w_{i_2, j_2, k_2}$. Если ровно одно из значений $i_1$ или $j_1$ четное, то $((i_1 + j_1)\bmod 2)$ принимает значение, равное единице, и нулевое в противном случае. Аналогичные значения принимает член $((i_2 + j_2)\bmod 2)$. Таким образом, расстояние между любыми двумя соседними клетками в декартовой системе координат составляет $d = \sqrt{2}$.

Состояние $s$ клетки $w \in W$ в каждый момент времени определяется набором некоторых содержащихся в ней модельных частиц, обладающих следующими свойствами.

1. Масса частицы единична, $m = 1$.

2. Модуль вектора скорости частицы единичный, $|\mathbf{c}| = 1$, либо нулевой, $|\mathbf{c}| = 0$. Частицы с нулевым вектором скорости называют частицами покоя.

3. Вектор скорости $\mathbf{c}$ частицы может быть направлен только в сторону одной из соседних клеток $N_l(w)$, $l = 1, 2, \ldots, 12$.

4. В один момент времени в одной и той же клетке $w$ не может быть двух или более частиц с одинаковыми векторами скорости $\mathbf{c}$.

В модели RD-I состояние $s$ каждой клетки $w \in W$ представлено тринадцатиразрядным булевым вектором $(s_1, s_2, \ldots, s_{13})$. Каждый его разряд $s_l$, $l = 1, 2, \ldots, 12$, связан с направлением $\mathbf{c}_l$ от клетки $w$ к $l$-й соседней клетке $N_l(w)$ следующим образом: если частица с направлением $\mathbf{c}_l$ отсутствует, то $s_l = 0$, в противном случае $s_l = 1$. Разряд $s_{13}$ соответствует частице покоя: если частица покоя отсутствует, то $s_{13} = 0$, если частица покоя присутствует, то $s_{13} = 1$.

Каждый такт работы клеточного автомата разбит на две фазы: столкновение и сдвиг. Функция переходов $\delta$ клетки состоит, таким образом, из суперпозиции функций $\delta_1$ (столкновение) и $\delta_2$ (сдвиг):

$$s(t+1) = \delta(s) = \delta_2(\delta_1(s)). \qquad (5)$$

Каждая из них должна удовлетворять законам сохранения массы и импульса:

$$\begin{gathered}\sum_{w \in W} \sum_{l=1}^{b} s_l(w, t+1) = \sum_{w \in W} \sum_{l=1}^{b} s_l(w, t); \\ \sum_{w \in W} \sum_{l=1}^{b} \mathbf{c}_l(w, t+1) = \sum_{w \in W} \sum_{l=1}^{b} \mathbf{c}_l(w, t),\end{gathered} \qquad (6)$$

а также не нарушать ни одного из четырех вышеприведенных свойств. С точки зрения динамики потока жидкости наличие этих двух фаз интерпретируется следующим образом. Столкновения реализуют диффузию в жидкости, а сдвиг – процесс переноса вещества в потоке. Рассмотрим подробно эти фазы.

В фазе столкновения происходит изменение состояния клеток автомата согласно некоторым правилам столкновения, не зависящим от состояний соседних клеток, т. е. $s' = \delta_1(s)$ зависит только от внутреннего состояния своей клетки. Функция $\delta_1(s)$ выбирается такой, чтобы сохранялись масса и импульс частиц в клетке:

$$\sum_{l=1}^{b} s'_l(w) = \sum_{l=1}^{b} s_l(w), \quad \forall w \in W;$$
$$\sum_{l=1}^{b} \mathbf{c}'_l(w) = \sum_{l=1}^{b} \mathbf{c}_l(w), \quad \forall w \in W, \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{c}_l$ и $\mathbf{c}'_l$ – векторы скорости $l$-й частицы до и после столкновения, а $s'_l$ – $l$-й компонент вектора $s$. В модели RD-I функция $\delta_1(s)$ вероятностная.

В фазе сдвига каждая частица перемещается на одну клетку в направлении вектора ее скорости. Значение функции сдвига $\delta_2(s)$ определено для каждого $l$-го разряда $s''_l$ вектора состояния после сдвига $s''$ следующим образом:

$$s''_l = \begin{cases} s'_l(N_l(w)), & l = 1, 2, \ldots, 12; \\ s'_l(w), & l = 13. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $s'_l(N_l(w))$ – $l$-й разряд вектора состояния $l$-го соседа клетки $w$ (его вектор скорости $\mathbf{c}_l$ направлен в сторону клетки $w$). Таким образом, при сдвиге масса и импульс частиц в клетке изменяются, т.е. нарушаются условия (7), но в пределах всего КА они сохраняются, т. е. условия (6) выполняются.

**Граничные условия.** Одно из преимуществ КА-моделей – простые граничные условия. Они задаются введением в модель клеток, поведение которых отличается от описанного выше. Определены следующие типы клеток: рабочие клетки, клетки-стенки и клетки-источники частиц. Клетки каждого из этих типов на фазе столкновения имеют различные таблицы переходов. Фаза сдвига в клетках всех типов происходит одинаково. Поведение клеток стенки и источников задает граничные условия автомата.

Функционирование клеток-стенок определяется способом отражения частиц от препятствий, зависящим от свойств стенки. Первым из них, как это было отмечено выше, является отражение в обратном направлении. При втором, более сложном способе частицы отражаются по законам геометрической оптики. Здесь необходимо учитывать не только состояние рассматриваемой клетки, но и положение соседних клеток препятствия. Третий способ – частица отражается в любом допустимом (где нет препятствия) направлении равновероятно. Четвертый (интегрированный) способ состоит из этих трех способов отражения с заданной вероятностью срабатывания каждого из них при каждом конкретном столкновении.

С точки зрения практического применения наибольший интерес представляет первый способ отражения. Именно такие стенки были использованы в экспериментах данной работы. При осреднении скоростей частиц на расстоянии до стенки $d = 0$ их значения равны нулю, что соответствует условию равенства нулю скорости потока жидкости возле стенки [4]. Правила столкновения $\delta_2$ для отражения в обратном направлении выглядят следующим образом:

$$s'_l = \begin{cases} s_{(l+6) \bmod 12}, & l = 1, 2, \dots, 12; \\ s_l, & l = 13, \end{cases} \tag{9}$$

где $s_l$ – состояние $l$-го разряда клетки перед столкновением, а $s'_l$ – состояние $l$-го разряда клетки после столкновения.

Функционирование клеток-источников обеспечивает с определенной условиями эксперимента вероятностью $p$ генерацию частиц со всевозможными направлениями вектора скорости. Это означает, что вектор состояния клетки-источника с вероятностью $p$ устанавливается в $s' = 1111111111110$. Выстроив клетки-источники в пространстве в одной плоскости, можно получить источник равномерного потока частиц. Изменяя вероятность рождения частиц, можно варьировать их концентрацию в потоке.

Из правил поведения автомата следует, что объем вычислений при моделировании зависит только от общего количества клеток в автомате, но не от их типов. Поэтому сколь сложными ни были бы граничные условия, время моделирования от этого не увеличится.

**Осреднение модельных величин по времени.** Параметрам моделируемой жидкости соответствуют не микроскопические параметры модели, такие как масса и скорость частицы, а их макроскопические (осредненные) значения, причем осредненная скорость модельных частиц соответствует скорости потока, а осредненная концентрация частиц – давлению. Существует два способа осреднения: по пространству и по времени.

Окрестностью осреднения с центром в клетке $w_0 \in W$ является множество клеток автомата, удовлетворяющее условию

$$A\mathrm{v}(w_0, r) = \{w\colon (w_x - w_{0x})^2 + (w_y - w_{0y})^2 + (w_z - w_{0z})^2 \le r^2\}, \tag{10}$$

где $w_x, w_y, w_z$ и $w_{0x}, w_{0y}, w_{0z}$ – координаты клеток $w$ и $w_0$ соответственно, а $r \in R$ – радиус осреднения. Таким образом, окрестность осреднения составляют все клетки, находящиеся внутри шара радиуса $r$ с центром $w_0$. При осреднении по пространству результатом является сумма векторов скорости частиц $\mathbf{u}_{\text{мод}}$ во всех клетках, попадающих в окрестность осреднения $A\mathrm{v}(w_0)$ клетки $w_0$ в определенный момент времени $t$, деленная на количество клеток в окрестности:

$$\mathbf{u}_{\text{мод}} = \frac{1}{|A\mathrm{v}|} \sum_{k \in A\mathrm{v}(w_0)} \sum_{l=1}^{b_m} \mathbf{c}_{l,k}(t), \tag{11}$$

где $\mathbf{c}_{l,k}$ – вектор скорости $l$-й частицы в клетке $w_k \in A\mathrm{v}(w_0)$, $b_m$ – количество соседних клеток, а $|A\mathrm{v}|$ – количество клеток в окрестности осреднения.

Важным параметром является радиус осреднения $r$. Чем больше $r$, тем меньше влияние дискретности модели, называемой автоматным шумом, на результат. Количество клеток в окрестности осреднения $|A\mathrm{v}|$ для разных радиусов приведено в табл. 3.

Таблица 3

**Размер окрестности осреднения**

| Радиус $r$ | Количество клеток $\lvert A\text{v}\rvert$ | Радиус $r$ | Количество клеток $\lvert A\text{v}\rvert$ | Радиус $r$ | Количество клеток $\lvert A\text{v}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 7 | 1737 | 14 | 13087 |
| 1 | 13 | 8 | 2523 | 15 | 16133 |
| 2 | 55 | 9 | 3545 | 16 | 19447 |
| 3 | 157 | 10 | 4899 | 17 | 23245 |
| 4 | 333 | 11 | 6455 | 18 | 27485 |
| 5 | 667 | 12 | 8273 | 19 | 32339 |
| 6 | 1109 | 13 | 10511 | 20 | 37693 |

При экспериментальном исследовании модели RD-I выяснилось, что полученные значения скорости, как и ожидалось, коррелируют с расчетными тем лучше, чем больше радиус осреднения $r$, и, как видно из рис. 2, при $r > 6$ корреляция почти полная.

Следует заметить, что при осреднении по пространству для достаточно больших размеров окрестности получить осредненные значения вблизи границ невозможно. Расстояние $d$ от центра $w_0$ окрестности осреднения $A\text{v}(w_0)$ до ближайшей границы должно превышать радиус осреднения $r$ ($d > r$), иначе в окрестность осреднения войдут клетки-стенки. Поэтому вблизи границ следует использовать осреднение по времени.

При осреднении по времени результатом является сумма векторов скорости частиц, находящихся в заданной клетке $w$ на протяжении определенного количества $T$ подряд идущих итераций, называемых временем осреднения:

$$\mathbf{u}_{\text{мод}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \sum_{l=1}^{b_m} \mathbf{c}_l(t), \tag{12}$$

где $\mathbf{c}_l$ – вектор скорости $l$-й частицы в клетке $w$. Точность результата в этом способе зависит от времени осреднения $T$. Для достижения такой же точности, как и при осреднении по пространству с радиусом $r$, необходимо произвести осреднение по времени на протяжении $T = \lvert A\text{v}\rvert$ итераций.

Осреднение по времени требует больше машинного времени, чем осреднение по пространству, так как при этом приходится еще и производить $T$ дополнительных после установления стационарного режима тактов столкновений и сдвигов, но зато с его помощью можно получить осредненные значения в любой клетке КА, даже на границах. Поэтому при моделировании пористых сред используют осреднение по времени.

**Экспериментальное исследование пористой среды.** *Некоторые определения и задание условий экспериментов.* Под плотностью заполнения пористой среды $\rho_{\text{пор}}$ понимают отношение объема твердого вещества к общему объему среды. Внутри КА, моделирующего пористую среду, случайным

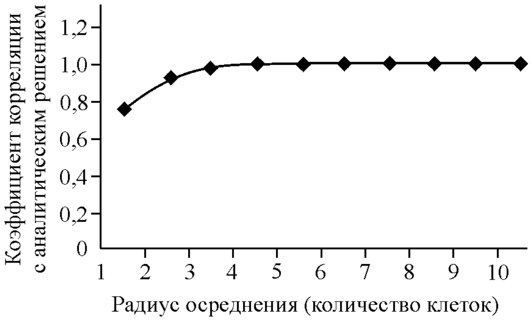


*Рис. 2.* Зависимость корреляции модельной и физической скоростей от радиуса осреднения $r$

образом выбираются сферические области заданного радиуса $r_{сф}$, которые заполняются клетками-стенками. Пространство между этими областями имитирует поры. Модельная плотность заполнения $\rho_{пор}$ тогда вычисляется как отношение количества клеток-стенок к общему количеству клеток в автомате. Напорным градиентом $i = \Delta p / l$ называют отношение разности давлений жидкости $\Delta p$ на некотором участке к длине $l$ этого участка. Закон Дарси связывает напорный градиент со скоростью движения жидкости в пористой среде [5]:

$$\mathbf{u} = k(i - i_0), \tag{13}$$

где $\mathbf{u}$ – скорость просачивания; $k$ – некоторая величина, зависящая от параметров среды и называемая коэффициентом фильтрации; $i$ – напорный градиент; $i_0$ – пороговый напорный градиент, определяемый минимальным давлением, при котором начинается фильтрация.

В ходе исследований пористой среды сформулировано три задачи для верификации модели и определения характеристик среды.

1. Построение поля скорости в пористой среде.

2. Построение зависимости скорости $\mathbf{u}_{мод}$ прохождения вязкой жидкости через пористую среду от напорного градиента $i$ и сравнение ее с законом Дарси (13).

3. Построение зависимости коэффициента фильтрации $k$ от коэффициента заполнения среды $\rho_{пор}$.

Для решения поставленных задач была проведена серия экспериментов. КА, используемый в экспериментах, имеет вид прямоугольного параллелепипеда размером $800 \times 50 \times 800$ клеток и ориентирован вдоль декартовых осей. Плоскости $x = 1$, $x = 800$, $y = 1$, $y = 50$ состоят из клеток-стенок. Плоскость $z = 1$ состоит из клеток-источников, таким образом, поток распространялся вдоль оси $Oz$ в положительном направлении. Столь малый размер автомата вдоль оси $Oy$ (50 клеток) обусловлен симметрией направлений $Ox$ и $Oy$, поля скорости в сечениях $Oxz$ и $Oyz$ совпадают. Для имитации пористой среды был выбран радиус сферических областей, заполненных клетками-стенками, $r_{сф} = 5$ клеток. Экспериментально установлено, что после $t = 150000$ итераций процесс приходит к стационарному виду. После этого количества итераций выполнялось осреднение по времени. Время осредне-

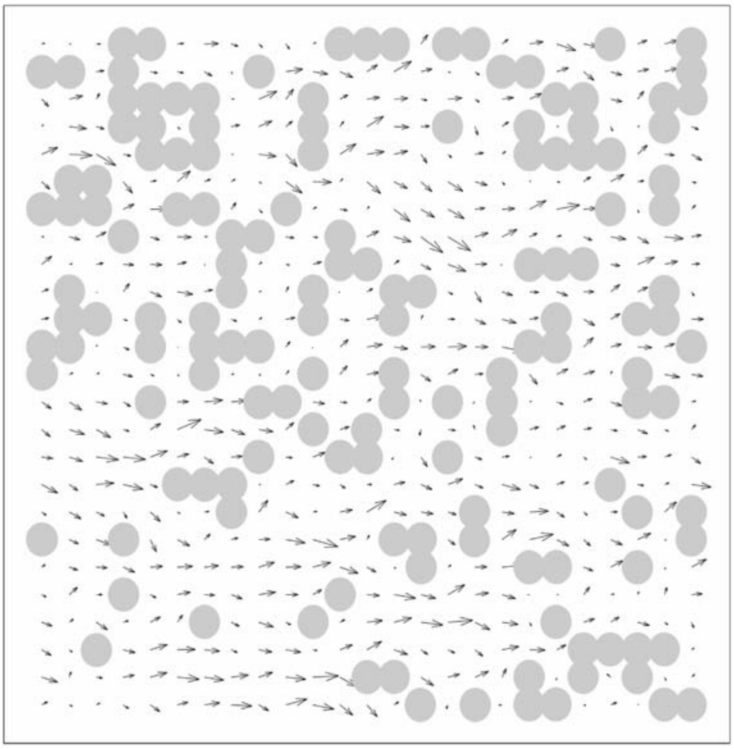

*Рис. 3.* Проекция поля скорости потока в пористой среде на плоскость сечения

ния выбрано $T = 4899$, что соответствует такой же точности, которая достигается при осреднении по пространству радиусом $r = 10$ клеток (см. табл. 3).

*Поле скорости потока в пористой среде.* Первая задача решалась при следующих условиях. Количество сферических областей $n_{сф} = 16000$. Плотность заполнения $\rho_{пор} = 19{,}8$ %. На рис. 3 изображено поле скорости потока в сечении $Oxz$ при $y = 25$ клеток. Серыми областями обозначены участки твердой породы, а белыми – поры. Длина и направление стрелок соответствуют модулю и направлению проекции скорости потока на плоскость $Oxz$. На рисунке не видны составляющая скорости, направленная вдоль $Oy$, и расположение пор в соседних по координате $y$ слоях, поэтому некоторые стрелки, направленные в сторону препятствий, нужно воспринимать как обтекание потоком препятствия сверху или снизу.

*Зависимость скорости потока от напорного градиента. Закон Дарси.* Вторая задача (построение зависимости скорости потока от разности давлений на концах участка) решалась при следующих параметрах эксперимента. Границы участка, на котором измерялась концентрация модельных частиц, были выбраны $z_1 = 100$ клеток, $z_2 = 700$ клеток. Количество сферических областей $n_{сф} = 16000$. Плотность заполнения $\rho_{пор} = 19{,}8$ %. Для изменения концентрации частиц производилась генерация частиц клетками-источниками с разной вероятностью (от 20 до 90 %), что соответствует различным напорным градиентам $i$. На рис. 4 приведена зависимость нормированной средней по сечению $z = 400$ скорости потока от градиента концентрации модельных частиц на единицу длины. Эта зависимость получилась линейной. Концент-

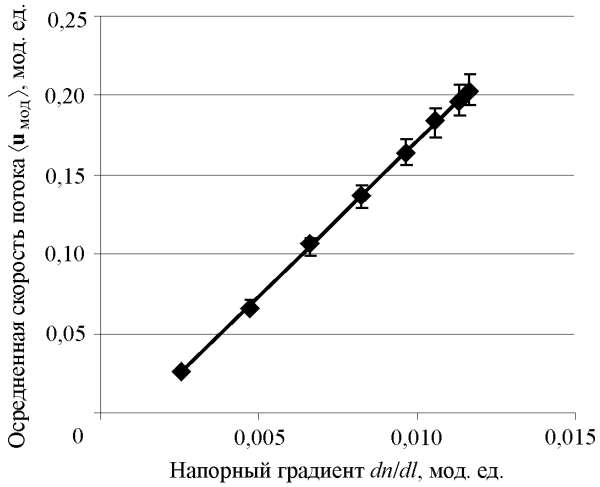


*Рис. 4.* Закон Дарси и экспериментальные точки ($\langle \mathbf{u}_{\text{мод}} \rangle = 19{,}5 dn/dl - 0{,}0237$)

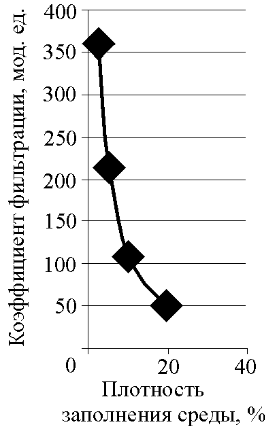


*Рис. 5.* Модельный коэффициент фильтрации

рация модельных частиц связана с давлением моделируемой жидкости также линейно [3], следовательно, получившаяся экспериментальная зависимость (см. рис. 4) аппроксимирует закон Дарси (13). Путем экстраполяции графика вычислен пороговый напорный градиент $i_0$ для моделируемой пористой среды $i_0 = 0{,}0237$ модельных единиц.

*Зависимость коэффициента фильтрации от плотности заполнения среды.* Для решения третьей задачи (построения зависимости коэффициента фильтрации $k$ в пористой среде от плотности заполнения среды $\rho_{\text{пор}}$) посредством изменения количества областей $n_{\text{сф}}$ менялась плотность заполнения $\rho_{\text{пор}}$ и определялись напорный градиент $i$ и скорость просачивания жидкости $\mathbf{u}_{\text{мод}}$ в сечении $z = 400$. Вероятность генерации частиц составляла 60 %. Для каждой пары $i$ из (13) и $\mathbf{u}_{\text{мод}}$ вычислялся коэффициент фильтрации $k$. Получившаяся экспериментальная зависимость оказалась гиперболической (рис. 5). Из графика видно, что коэффициент фильтрации $k$ для исследуемой модели обратно пропорционален плотности заполнения $\rho_{\text{пор}}$. Такая зависимость характерна для большинства естественных пористых сред, для которых она была получена экспериментально [5].

**Заключение.** В ходе вычислительных экспериментов с КА-моделью RD-I построено поле скорости просачивания жидкости через пористую среду. Показано соответствие ее скорости просачивания и скорости, найденной по закону Дарси. Получена зависимость коэффициента фильтрации от плотности заполнения среды. Таким образом, модель RD-I позволяет решать задачи в пористых средах с такими же затратами машинного времени, как и не в пористых средах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Rothman D. H., Zaleski S.** Lattice-Gas Cellular Automata. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

2. **Медведев Ю. Г.** Трехмерная клеточно-автоматная модель потока вязкой жидкости // Автометрия. 2003. **39**, № 3. С. 43.

3. **Медведев Ю. Г.** Соотношение модельных и физических величин для трехмерной клеточно-автоматной модели потока жидкости // Вестн. ТГУ. Томск: Изд-во ТГУ, 2004. № 9(1). С. 223.

4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

5. **Sahami M.** Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, cellular automata, and simulated annealing // Rev. in Modern Phys. 1993. **65**, N 4. P. 1393.

*Поступила в редакцию 3 ноября 2005 г.*