Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2006, том 42, № 2

УДК 517.977.58

Г. В. Шевченко

(Новосибирск)

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПО МИНИМУМУ РАСХОДА РЕСУРСОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА*

Предлагается итерационный метод решения нелинейных задач минимизации расхода ресурсов. Он является обобщением метода решения линейных задач минимизации ресурсов [1] на класс нелинейных систем с разделенной по состоянию и управлению правой частью, линейной по управлению.

Введение. Задача минимизации расхода ресурсов представляет значительный теоретический и практический интерес [2–10]. Аналитическое решение этой задачи для систем высокого порядка невозможно.

Метод покрытия внутренностей строго выпуклых тел семейством n-мерных смежных симплексов [1] обобщен на невыпуклые тела. Используя этот модифицированный метод при обосновании и построении метода решения нелинейных задач минимизации расхода ресурсов, удалось создать эффективный численный метод. Он обладает определенными достоинствами, например остается численно устойчивым даже тогда, когда заданное время окончания процесса управления T близко или совпадает с оптимальным по быстродействию. Другие методы в этом случае не могут получить решение из-за очень больших по норме начальных условий сопряженной системы. Кроме того, описываемый метод при достаточно общих предположениях о системе управления обладает глобальной сходимостью.

1. Постановка задачи и геометрическая интерпретация. Пусть управляемый объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(x) + B(t)u(t), \quad x(0) = x^0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор состояния объекта; $f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$ – заданная непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $f(0) = 0$ и $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$; $B(t)$ – заданная непрерывная матрица раз-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00776).

мера $n \times s$; $u \in \mathbb{R}^s$ – кусочно-непрерывное управление, стесненное ограничением

$$\left|u_j(t)\right| \le 1, \quad j = \overline{1, s}. \tag{2}$$

Задача. Требуется найти допустимое управление $u^0(t)$, $t \in [0, T]$, переводящее систему (1) из начального состояния $x(0) = x^0$ за время T в начало координат и минимизирующее функционал

$$I(u) = \int\limits_0^T \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \left| u_j(t) \right| dt, \tag{3}$$

где $\alpha_j \ge 0$ – заданные действительные числа, причем $\sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_j \ne 0.$

Предполагается, что система (1) управляема в начало координат и $T > T_*$, где T_* – время оптимального по быстродействию перевода системы (1) из состояния $x(0) = x^0$ в начало координат.

Обозначим через $\Re(T)$ область достижимости системы (1) из начального состояния $x(0) = x^0$ за время T допустимыми управлениями. В силу того что $T > T_*$, $f(x) \ne 0$ при $x \ne 0$ и $f(0) = 0$, имеет место включение $0 \in \operatorname{int} \Re(T)$. Через $\operatorname{int} A$ здесь и далее обозначается внутренность множества A. Ввиду непрерывности правой части системы (1) множество $\Re(T)$ компактно и непрерывно зависит от T. Более того, поскольку система (1) управляема в начало координат, $\Re(T)$ есть тело.

Введем согласно принципу максимума Понтрягина [11] сопряженную систему

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \psi_j(t), \qquad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

и выпишем гамильтониан задачи

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = -\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \left|u_j(t)\right| + (\psi(t), f(x(t))) + (\psi(t), B(t)u(t)).$$

Тогда для оптимальности управления $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, и траектории $x^*(t)$, $t \in [0, T]$, необходимо и достаточно существования такой ненулевой вектор-функции $\psi^*(t)$, являющейся решением сопряженной системы (4) при некотором вполне определенном граничном условии $\psi(T) = c^*_{,}$ что почти при всех $t \in [0, T]$ функция $H(\psi^*(t), x^*(t), u)$ по переменной $u \in U = \{u \in \mathbb{R}^S \mid |u_j| \le 1,$ $j = \overline{1, s}\}$ достигает в точке $u = u^*(t)$ максимума, т. е.

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u).$$

Отсюда следует, что оптимальное управление принадлежит множеству допустимых управлений, имеющих следующую структуру:

$$u_j(t)=\begin{cases}-1, & (\psi(t), B_j(t))<-\alpha_j;\\ 0, & -\alpha_j \le (\psi(t), B_j(t)) \le \alpha_j, \quad j=\overline{1,s};\\ 1, & (\psi(t), B_j(t))>\alpha_j,\end{cases} \tag{5}$$

где $B_j(t)$ – j-й столбец матрицы $B(t)$, $j=\overline{1,s}$; $\psi(t)$ – решение сопряженной системы (4) с граничным условием $\psi(T)=c$ ($c\in\mathbb{R}^n$ – некоторый ненулевой вектор).

В силу однородности системы (4) можно рассматривать только граничные условия $\psi(T)=c$ с единичными нормами $\|c\|=1$, заменив (5) следующими выражениями:

$$u_j(t)=\begin{cases}-1, & (\psi(t), B_j(t))<-\mu\alpha_j;\\ 0, & -\mu\alpha_j \le (\psi(t), B_j(t)) \le \mu\alpha_j, \quad j=\overline{1,s};\\ 1, & (\psi(t), B_j(t))>\mu\alpha_j,\end{cases} \tag{6}$$

где $\mu\ge 0$ – действительное число.

З а м е ч а н и е. Если $T=T_*$, то оптимальное управление будет релейным. А это в силу (6) и непрерывности выражений $(\psi(t), B_j(t))$, $j=\overline{1,s}$, означает, что $\mu=0$. Но тогда соответствующее ему $\psi(T)=c$ для (5) имеет норму $\|c\|=\infty$. Поэтому при $T>T_*$, но близких к T_*, возникают трудности, связанные с очень большими нормами граничных условий сопряженной системы при использовании представления (5). Представление (6) позволяет обойти эти трудности.

Пусть вектор-функции $\overline{\psi}=\overline{\psi}(t)$ и $\overline{x}=\overline{x}(t)$ – решение задачи Коши (1), (4) с начальными условиями $\psi(0)=c$ при управлении $u=\overline{u}=\overline{u}(t)$, где

$$\overline{u}_j(t)=\begin{cases}-1, & (\overline{\psi}(t), B_j(t))<-1;\\ 1, & (\overline{\psi}(t), B_j(t))\ge 1,\end{cases} \quad j=\overline{1,s}, \tag{7}$$

при любом $t\in[0,T]$. Обозначим через $u(t,c,\mu)$ управление, компоненты которого удовлетворяют (6) при $\psi=\overline{\psi}$ и действительном числе $\mu\ge 0$. Тогда из (6) следует, что для $\alpha_j>0$ при $\mu\ge\mu_j(c)\overset{\Delta}{=}\frac{1}{\alpha_j}\max\limits_{0\le t\le T}\left|(\overline{\psi}(t), B_j(t))\right|$ имеет место тождество $u_j(t, c, \mu)\equiv 0$, $t\in[0, T]$. А при $\mu\ge\mu(c)$, где $\mu(c)\overset{\Delta}{=}$ $\overset{\Delta}{=}\max\limits_{j\in\{i=\overline{1,s}\,|\,\alpha_i>0\}}\mu_j(c)$, все компоненты вектор-функции $u(t,c,\mu)$, для которых соответствующие $\alpha_j>0$, тождественно равны нулю.

Рассмотрим функцию

$$G(c,\mu)=I(u(t,c,\mu))=\int\limits_0^T\sum_{j=1}^s\alpha_j\left|u_j(t,c,\mu)\right|dt$$

при фиксированном $c \in \mathbb{R}^n$ ($\|c\| = 1$). Функция $G(c, \mu)$ на интервале $[0, \mu(c)]$ является непрерывной по μ в силу (6). Более того, если $\mu_1 > \mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \in \in [0, \mu(c)]$, то $G(c, \mu_1) > G(c, \mu_2)$. Таким образом, функция $G(c, \mu)$ на $[0, \mu(c)]$ строго убывает по μ. Следовательно, при любом фиксированном $c \in \mathbb{R}^n$ ($\|c\| = 1$) и любом положительном $\Im \le \Im_{\max} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{j=1}^{s} \alpha_j T$ числах существует единственное число $\mu_*(c) \in [0, \mu(c)]$ такое, что $G(c, \mu_*(c)) = \Im$.

Пусть $\Omega(\Im)$ – множество точек, в которые можно попасть из начального состояния $x(0) = x^0$ допустимыми управлениями за время T со значением функционала (3), меньшим или равным $\Im$. Другими словами,

$$\Omega(\Im) = \{x \in \Re(T) \mid x = x(T, \mathrm{v}),\ \mathrm{v} = \mathrm{v}(t) \in U,\ t \in [0, T],\ I(\mathrm{v}) \le \Im\},$$

где $x(T, \mathrm{v})$ – решение системы (1) в момент времени $t = T$ при допустимом управлении $u = \mathrm{v}$. Очевидно, что $\Omega(\Im_1) \subset \Omega(\Im_2)$ при $\Im_1 < \Im_2$.

Как отмечалось выше, начало координат пространства $\mathbb{R}^n$ является внутренней точкой области достижимости $\Re(T)$. В свою очередь, область достижимости $\Re(T)$ совпадает с $\Omega(\Im_{\max})$. Поэтому существует такое единственное число $\Im_{\min}$, $0 < \Im_{\min} < \Im_{\max}$, при котором 0 лежит на границе множества $\Omega(\Im_{\min})$. Таким образом, исходная задача (1)–(3) эквивалентна задаче поиска числа $\Im_{\min}$.

Для решения поставленной задачи предлагается итерационный метод. Он основан на симплексных покрытиях множеств $\Omega(\Im)$. Описание и обоснование предлагаемого метода требует введения некоторых понятий.

Пусть $z^1, \ldots, z^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ – такие различные точки, что линейная выпуклая оболочка $\sigma = [z^1, \ldots, z^{n+1}]$ этих точек является телом в $\mathbb{R}^n$. Будем называть множество σ n-мерным симплексом с вершинами $z^1, \ldots, z^{n+1}$. Два n-мерных симплекса $\sigma^1 = [z^1, \ldots, z^{n+1}]$ и $\sigma^2 = [\mathrm{v}^1, \ldots, \mathrm{v}^{n+1}]$ называются смежными, если у них n общих вершин и их пересечение есть $(n-1)$-мерный симплекс. Из определения следует, что это пересечение является общей гранью максимальной размерности.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – компактное тело, $\sigma^0 = [z_0^1, \ldots, z_0^{n+1}]$ есть n-мерный симплекс с вершинами, лежащими на границе Ω. По каждой его грани максимальной размерности $\sigma_j^0 = [z_0^1, \ldots, z_0^{j-1}, z_0^{j+1}, \ldots, z_0^{n+1}]$, $j = \overline{1, n+1}$, строим смежный ему симплекс с вершинами $z_0^1, \ldots, z_0^{j-1}, \tilde{z}^j, z_0^{j+1}, \ldots, z_0^{n+1}$, у которого «новая» вершина $\tilde{z}^j$ является граничной точкой Ω, максимально удалена от гиперплоскости, проходящей через остальные вершины, и расположена по разные стороны с точкой z_0^j относительно данной гиперплоскости. Это означает, что для построенного симплекса выполнены следующие условия: существуют такое число $d \ne 0$ и такой вектор коэффициентов $\tilde{c}^j \in \mathbb{R}^n$ указанной гиперплоскости, что

$$(\tilde{c}^j, z_0^i) = d, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad i \ne j; \qquad (\tilde{c}^j, z_0^j) < d;$$

$$(\tilde{c}^{\,j},\ \tilde{z}^{\,j}) = \max_{x\in\Omega}(\tilde{c}^{\,j},\ x) > d, \qquad \tilde{z}^{\,j} \in \partial\Omega.$$

Назовем построенные симплексы, которые смежны σ^0, симплексами первого слоя, а σ^0 будем считать симплексом нулевого слоя.

Затем для каждого симплекса первого слоя строим по его $(n-1)$-мерным граням, не являющимся общими с $(n-1)$-мерными гранями симплекса σ^0, по той же схеме смежные симплексы, которые составят второй слой. Ясно, что во втором слое содержится ровно $n(n+1)$ симплексов. Аналогично для каждого симплекса k-го слоя ($k \geq 2$) строятся смежные ему симплексы $(k+1)$-го слоя.

Обозначим через $\mathbb{S}_k$ объединение всех симплексов k-го слоя. Понятно, что в k-м слое будет $n^{k-1}(n+1)$ симплексов. По построению в силу компактности Ω видно, что $\operatorname{co}\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{S}_k$, где $\operatorname{co}\Omega$ – выпуклая оболочка множества Ω.

Таким образом, множество Ω оказывается покрытым n-мерными симплексами с вершинами на границе Ω. (Далее под покрытием n-мерными симплексами понимаем построенное покрытие.) Имеет место, следовательно,

Теорема 1 (о покрытии). Внутренность любого компактного тела Ω в $\mathbb{R}^n$ можно покрыть n-мерными симплексами с вершинами на границе Ω.

Из теоремы вытекает

Следствие 1. Пусть Ω – компактное тело в $\mathbb{R}^n$ и $z^0 \in \operatorname{int}\Omega$. Тогда в любом покрытии $\mathbb{S} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{S}_k$ тела Ω имеется такое конечное $k_0 \geq 0$ и такой n-мерный симплекс $\sigma \in \mathbb{S}_{k_0}$, что $z^0 \in \sigma$.

Область достижимости при сделанных предположениях о линейности по управлению правой части и телесности множества U является компактным телом в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, к ней применимы теорема о покрытии и ее следствие.

Предлагаемый метод решения основан на построении последовательности симплексов $\{\sigma^k\}$ с вершинами, лежащими на границе множеств $\Omega(\Im)$. Перед его полным формальным описанием дадим краткое описание.

Полагаем $\Im := \Im_{\max}$. На *первом этапе* строится последовательность смежных симплексов $\{\sigma^k\}$, $\rho(\sigma^k) \geq \rho(\sigma^{k+1})$, где $\rho(\sigma^k)$ – расстояние от симплекса σ^k до начала координат, с вершинами на границе множества $\Re(T)$ до момента, когда очередной построенный симплекс σ^{k_0} будет содержать 0.

Отметим, что в силу следствия 1 эта последовательность конечна. Вершины симплексов последовательности являются решениями задачи Коши (1) при вполне определенных релейных управлениях.

Пусть $z^i = x(T,\ u^i)$ – вершины симплекса σ^{k_0} (здесь и далее через $x(T,\ u)$ обозначается решение задачи Коши (1) в момент времени $t = T$ при воздействии управления u); $u^i = u^i(t),\ t \in [0, T]$, – релейное допустимое управление, т. е. $u^i_j(t) = \max\limits_{u\in U}(\psi^i(t), B_j(t)),\ j = \overline{1, s}$, где $\psi(t)$ – решение сопряженной системы (4) с начальным условием $\psi(0)=\tilde{c}^{\,i}$; $i=\overline{1,n+1}$; $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_{n+1}^0$ – решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i z^i=0;\qquad \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1. \tag{8}$$

Так как $0\in\operatorname{int}\sigma^{k_0}$, то все $\lambda_i^0\ge 0$, $i=\overline{1,n+1}$.

Второй этап. Полагаем $\bar{c}:=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i^0\tilde{c}^{\,i}$ и находим решение $\bar{x}(t)$, $\overline{\psi}(t)$, $t\in[0,T]$, задачи Коши (1), (4) с начальными условиями $\psi(0)=\bar{c}$ при управлении $u=\bar{u}(t)$ (7). Затем полагаем $c:=\overline{\psi}(T)$ и находим такое число $\mu_0(c)$, $0\le\mu_0(c)<\mu(c)$, при котором выполнено равенство

$$(c, x(T, u(t,c,\mu_0(c))))=0. \tag{9}$$

Пусть $z^*=x(T, u(t,c,\mu_0(c)))$. Если $\left\|z^*\right\|\le\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – необходимая точность попадания в начало координат, то процесс вычислений заканчивается. Полученное управление $u(t,c,\mu_0(c))$, $t\in[0,T]$, приближенно оптимально, а $I(u(t,c,\mu_0(c)))$ – приближенно-оптимальное значение функционала (3).

Если $\left\|z^*\right\|>\varepsilon$, то среди точек z^i, $i=\overline{1,n+1}$, выбираем n точек таких $z^{i_1},\ldots$ $\ldots,z^{i_n}$, при которых симплексу $\sigma^*=[z^{i_1},\ldots,z^{i_n},z^*]$ принадлежит 0. Точки $z^{i_1},\ldots,z^{i_n},z^*$ и соответствующие им параметры ($\tilde{c}^{\,i_1},\ldots,\tilde{c}^{\,i_n},\tilde{c}^{\,i_n+1}=\bar{c}$) перенумеровываются по порядку. Находим решение $(\lambda_1^0,\ldots,\lambda_{n+1}^0)$ системы (8) и переходим на начало второго этапа.

2. Вычислительный алгоритм решения задачи (1)–(3). Введем следующие обозначения:

– $c^{(k)}$ – k-е приближение оптимальных значений начальных условий для сопряженной системы (4);

– $u_0^k=u_0^k(t)$, $t\in[0,T]$, – допустимое управление вида

$$u_0^k(t)=\arg\max_{u\in U}(\overline{\psi}_k(t), B(t)u),$$

где $\overline{\psi}_k$ – решение сопряженной системы (4) с начальным условием $\psi(0)=c^{(k)}$;

– μ^1, μ^2 – нижняя и верхняя граница локализации решения μ уравнения

$$(\overline{\psi}_k(T), x(T, u(t, c^{(k)},\mu)))=0; \tag{10}$$

– k – номер итерации.

А л г о р и т м.

1. Полагаем $k:=1$, $c^{(k)}:=-x^0\big/\left\|x^0\right\|$, $p:=1$.

2. Интегрируя совместно системы (1) и (4) с начальными условиями $\psi(0)=c^{(k)}$ при управлении $u=u_0^k$ по t от 0 до T, находим их решения $x(T, u_0^k)$

и $\overline{\psi}_k(T)$ в момент времени $t=T$ и полагаем $z^p := x(T, u_0^k)$, $\widetilde{c}^{\,p} := c^{(k)} \big/ \left\| c^{(k)} \right\|$, $k := k+1$.

3. Если $p \le n$ и система линейных алгебраических уравнений

$$(c, z^i) = -1, \quad i = \overline{1, p}, \tag{11}$$

совместна, то, найдя ее решение $\widetilde{c}$, переходим к шагу 7.

4. Находим решение $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0)$ системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i z^i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1. \tag{12}$$

Если мощность множества $\Lambda = \{i\colon \lambda_i^0 < 0\}$ равна 1, то полагаем $i_0 := i \in \Lambda$ и переходим к шагу 6. Если множество Λ пусто, то переходим к шагу 8.

5. Находим решение $\eta^* = (\eta_1^*, \ldots, \eta_p^*)$ задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями:

$$\min_{\sum_{i=1}^{p} \eta_i = 1,\ \eta_i \ge 0} \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{p} \eta_i z^i \right\|^2. \tag{13}$$

(Заметим, что задачу (13) можно решить с помощью конечного метода [12].) Берем любой индекс $i_0 \in \{i\colon \eta_i^* = 0\} \cap \{i\colon \lambda_i^0 < 0\}$.

6. Полагаем $z^i := z^{i+1}$, $\widetilde{c}^{\,i} := \widetilde{c}^{\,i+1}$, $i = \overline{i_0, p-1}$; $p := p-1$ и переходим к шагу 4.

7. Интегрируем совместно системы (1), (4) в обратном времени от T до 0 с граничными условиями $x(T) = z^p$, $\psi(T) = \widetilde{c}$ при управлении $u = u^p$. Полагаем $c^{(k)} := \psi(0)$, $p := p+1$ и переходим к шагу 2.

8. Полагаем $c^* := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^0 \widetilde{c}^{\,i} \Big/ \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^0 \widetilde{c}^{\,i} \right\|$.

9. Интегрируя совместно системы (1) и (4) с начальными условиями $\psi(0) = c^*$ при $u = \overline{u}$ (7) от 0 до T, находим решение $\overline{\psi}(t)$, $t \in [0, T]$, системы (4). Полагаем $\overline{c} := \overline{\psi}(T)$, $\mu^1 := 0$, $\mu^2 := \mu(\overline{c})$.

10. Полагаем $\mu := 0{,}5(\mu^1 + \mu^2)$ и находим управление $u(t, \overline{c}, \mu)$, $t \in [0, T]$, и соответствующий этому управлению правый конец траектории системы (1), т. е. $z_\mu = x(T, u(t, c, \mu))$.

11. Если $\| z_\mu \| \le \varepsilon$, то процесс вычислений заканчивается. Управление $u(t, \overline{c}, \mu)$, $t \in [0, T]$, приближенно оптимально, а $I(u(t, \overline{c}, \mu))$ – приближенно-оптимальное значение функционала (3).

12. Если $(\overline{c}, z_\mu) > 0$, то полагаем $\mu^1 := \mu$, иначе $\mu^2 := \mu$.

13. Находим решение $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{n+1}^*)$ системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z^i = z_\mu; \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1. \tag{12*}$$

14. Если $\lambda_i^* \geq 0,\ i = \overline{1, n+1}$, то полагаем $i_0 := \arg \min_{\{i=\overline{1,n+1}:\ \lambda_i^*>0\}} \lambda_i^0 / \lambda_i^*,\ \gamma :=$ $:= \lambda_{i_0}^0 / \lambda_{i_0}^*$, иначе переходим к шагу 15. Полагаем $z^{i_0} := z_\mu,\ \tilde{c}^{i_0} := c^*,\ \lambda_i^0 :=$ $:= \lambda_i^0 - \gamma\lambda_i^*\ (i = \overline{1, n+1}$ и $i \neq i_0), \lambda_{i_0}^0 := \gamma$. Если $\lambda_{i_0}^0 = 0$, то $k := k+1,\ c^* := \tilde{c}^j$, где $j = \arg \max_{i=\overline{1,n+1}} \lambda_i^0$, и переходим к шагу 9. Если $\left|\lambda_{i_0}^* - 1\right| > \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ – заданное достаточно малое число, то $k := k+1$, и переходим к шагу 8. Если хотя бы для одного $i,\ 1 \leq i \leq n+1$, величина λ_i^0 равна нулю, переходим к шагу 10. В противном случае находим решение $\tilde{c}$ системы

$$(c, \tilde{x} + 0{,}5(z^i - \tilde{x})) = -1, \qquad i \neq i_1,\ 1 \leq i \leq n+1,$$

где $i_1 = \arg \min_{i=\overline{1,n+1}} \lambda_i^0$, $\tilde{x}$ – правый конец траектории свободного движения системы (1) (при управлении $u = u(t) \equiv 0,\ t \in [0, T]$), и нормируем его. Если $(\tilde{c}, \tilde{x}) < 0$, меняем знак у вектора $\tilde{c}$. Интегрируем совместно системы (1), (4) в обратном времени от T до 0 с граничными условиями $x(T) = z_\mu,\ \psi(T) = \tilde{c}$ при управлении $u = u(t, c^*, \mu)$. Далее полагаем $k := k+1,\ c^* := \dfrac{\psi(0) + \lambda_{i_1}^0 \tilde{c}^{i_1} + \lambda_j^0 \tilde{c}^j}{\left\|\psi(0) + \lambda_{i_1}^0 \tilde{c}^{i_1} + \lambda_j^0 \tilde{c}^j\right\|}$,

где $j = \arg \max_{i=\overline{1,n+1}} \lambda_i^0$, и переходим к шагу 9.

15. Если $\left|(\tilde{c}, z_\mu)\right| > \varepsilon_1$, где ε_1 – заданная априори точность выполнения равенства (10), то переходим к шагу 10.

16. Находим такое минимальное число $\tau,\ 0 < \tau \leq 1$, что для каждого $i = \overline{1, n+1}$ имеет место неравенство $\tau\lambda_i^0 + (1-\tau)\lambda_i^* \geq 0$. Далее полагаем $\lambda_i^* :=$ $:= \tau\lambda_i^0 + (1-\tau)\lambda_i^*,\ i = \overline{1, n+1},\ i_0 = \arg \min_{\{i=\overline{1,n+1}:\ \lambda_i^*>0\}} \lambda_i^0 / \lambda_i^*,\ z^{i_0} := z_\mu,\ \tilde{c}^{i_0} := c^*$. Затем находим решение $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{n+1}^0)$ системы уравнений (12) и переходим к шагу 8.

Сделаем некоторые замечания к алгоритму.

Отметим, что не требуется хранить все симплексы генерируемой алгоритмом последовательности симплексов. Сохраняется только последний построенный симплекс, точнее, его вершины.

Ясно, что шаги 1–7 алгоритма – это первый этап, шаги 8–16 – второй этап (см. разд. 1, краткое описание алгоритма).

На первом этапе для построения новой вершины симплекса требуются:

а) задание граничного условия $\psi(T)$ сопряженной системы (4) (шаг 3);

б) интегрирование в обратном времени (шаг 7) сопряженной системы (4) вдоль траектории системы (1), полученной на предыдущей итерации для того, чтобы найти начальное условие $c^{(k)}$;

в) интегрирование совместно прямой (1) и сопряженной (4) систем в прямом времени при соответствующем допустимом управлении u_k^0 (шаг 2).

Исключением является первая итерация, на которой начальное условие $c^{(k)}$ задается на шаге 1, поэтому пункты «а» и «б» не требуются.

На втором этапе для построения новой вершины симплекса необходимы:

а) задание граничного условия $\psi(0)$ сопряженной системы (4) (шаги 8 и 14);

б) интегрирование совместно прямой (1) и сопряженной (4) систем в прямом времени при соответствующем допустимом управлении $\overline{u}$ (шаг 9 и (7)) для получения решения сопряженной системы (4) $\overline{\psi}(t), t \in [0, T]$;

в) поиск решения уравнения (10) эквивалентен многократному нахождению управления $u(t, c, \mu)$ при различных μ и соответствующего ему конца траектории z_μ системы (1) (шаг 10) и осуществляется на шагах 10–15 алгоритма;

г) замена одной из вершин симплекса точкой z_μ (шаги 14 и 16 алгоритма).

3. Доказательство сходимости алгоритма. Пусть $\sigma = [z^1, \dots, z^p]$ – $(p-1)$-мерный симплекс, где $z^i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, p}$, $p \le n+1$.

Лемма 1 [1]. Система линейных алгебраических уравнений (11) несовместна тогда и только тогда, когда совместна система линейных алгебраических уравнений (12).

Лемма 2 [1]. Пусть $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0)$ – решение системы (12), причем $\lambda_{i_0}^0 < 0$, $i_0 \in \{1, \dots, p\}$. Тогда точки z^{i_0} и 0 лежат в разных полупространствах относительно любой гиперплоскости вида $(c, x) = -1$, проходящей через точки z^i, $i \ne i_0$, $i = \overline{1, p}$.

Лемма 3 [1]. Пусть $\rho(\sigma) = \left\| x^* \right\|$, $x^* \in \sigma$, $x^* = \sum\limits_{i=1}^{p} \eta_i^* z^i$, $\sum\limits_{i=1}^{p} \eta_i^* = 1$, $\eta_i^* \ge 0$, и пусть $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0)$ – решение системы (12), причем $\lambda_{i_1}^0, \dots, \lambda_{i_l}^0 < 0$. Тогда среди $\eta_{i_1}^*, \dots, \eta_{i_l}^*$ найдется по крайней мере одно η_i, равное нулю.

Лемма 4. Пусть $0 \in \operatorname{int} \sigma$, где $\sigma = [z^1, \dots, z^{n+1}]$ – n-мерный симплекс, $z^* \ne 0$ – произвольная точка из $\mathbb{R}^n$. Тогда среди вершин симплекса σ найдется такой набор $z^{i_1}, \dots, z^{i_n}$ длины n, что $0 \in \sigma^* = [z^{i_1}, \dots, z^{i_n}, z^*]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что существует такое целое число j, $1 \le j \le n+1$, при котором система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1,\, i \ne j}^{n+1} \lambda_i z^i + \lambda_j z^* = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \tag{14}$$

имеет неотрицательное решение $(\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_{n+1}^{(j)})$, т. е. $\lambda_i^{(j)} \ge 0$, $i = \overline{1, n+1}$.

Рассмотрим отдельно два случая: $z^* \in \operatorname{int}\sigma$ и $z^* \notin \operatorname{int}\sigma$. Пусть $z^* \in \operatorname{int}\sigma$. Это означает, что решение $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{n+1}^*)$ системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z^i = z^*, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

неотрицательно. Подставив представление точки z^* в (14), будем иметь

$$\sum_{i=1,\, i\neq j}^{n+1} \lambda_i^{(j)} z^i + \lambda_j^{(j)} z^* = \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n+1} (\lambda_i^{(j)} + \lambda_j^{(j)} \lambda_i^*) z^i + \lambda_j^{(j)} \lambda_j^* z^* = 0. \tag{15}$$

Пусть $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{n+1}^0)$ – решение системы (12). Тогда из (15) получим равенства $\lambda_i^0 = \lambda_i^{(j)} + \lambda_j^{(j)} \lambda_i^*,\ i \neq j, \lambda_j^0 = \lambda_j^{(j)} \lambda_j^*$. Отсюда следует, что $\lambda_i^{(j)} = \lambda_i^0 - \lambda_j^{(j)} \lambda_i^*,\ i \neq j$, и $\lambda_j^{(j)} = \lambda_j^0 / \lambda_j^*$. Взяв $j = \arg \min\limits_{i=\overline{1,\, n+1}} \lambda_i^0 / \lambda_i^*$, получим

$$\lambda_i^{(j)} = \lambda_i^0 - \lambda_j^{(j)} \lambda_i^* \geq \lambda_i^{(j)} = \lambda_i^0 - (\lambda_i^0 / \lambda_i^*) \lambda_i^* = 0, \quad i \neq j,\ \lambda_j^{(j)} > 0,$$

так как $0 \in \sigma$. При выбранном j система (14) имеет неотрицательное решение.

Рассмотрим второй случай, а именно $z^* \notin \operatorname{int}\sigma$. Так как $0 \notin \operatorname{int}\sigma$, существует действительное число β, $0 < \beta \leq 1$, при котором точка $\beta z^* \in \partial\sigma$, где $\partial\sigma$ – граница симплекса σ. Для точки βz^*, как показано выше, существует набор $z^{i_1}, \ldots, z^{i_n}$ длины n такой, что $0 \in \sigma_\beta^* = [z^{i_1}, \ldots, z^{i_n}, \beta z^*]$. С другой стороны, $\sigma_\beta^* \subset \sigma^*$. Следовательно, и в этом случае утверждение леммы имеет место. Лемма 4 доказана.

Пусть $\{\sigma^k\}$, $\sigma^k = [z_k^1, \ldots, z_k^{n+1}]$,– последовательность симплексов, сгенерированная алгоритмом. Обозначим через x_k^* точку, принадлежащую симплексу σ^k, с нормой $\left\| x_k^* \right\| = \rho_k \equiv \rho(\sigma^k)$, а через y_k – точку с минимальной нормой на гиперплоскости, проходящей через все вершины симплекса σ^k, кроме вершины $z_k^{i_0}$ (индекс i_0 определяется на шаге 4 (случай $|\Lambda| = 1$) или 5 (случай $|\Lambda| > 1$) алгоритма).

Вначале покажем, что через конечное число итераций $k = k_0$ будет иметь место включение $0 \in \operatorname{int}\sigma^{k_0}$. Далее будет установлена сходимость по функционалу к оптимуму, т. е. слабая сходимость алгоритма.

В силу леммы 3 и шагов 4 и 5 алгоритма при любом $k > n+1$ имеет место неравенство

$$\rho_{k+1} \leq \rho_k. \tag{16}$$

Покажем, что из последовательности $\{\rho_k\}$ можно выделить строго убывающую подпоследовательность. Предположим противное, т. е. с некоторого номера итерации k_0 соотношение (16) выполняется как равенство для всех $k \geq k_0$, причем $\rho_{k_0} \neq 0$.

По построению симплекса выполнены следующие соотношения: $(\tilde{c}, z_k^i) = -d_k,\ i = \overline{1, n}$, и $(\tilde{c}, z_{k+1}^{n+1}) > 0$, где $d_k > 0$ – некоторое действительное число. Отсюда и из определений точек $x_{k_0}^*$ и y_k следует, что $\left\| x_{k_0}^* - y_k \right\| >$ $> \left\| x_{k_0}^* - y_{k+1} \right\|$. С другой стороны, имеют место равенства $\left\| x_{k_0}^* \right\|^2 = \| y_k \|^2 +$ $+ \left\| x_{k_0}^* - y_k \right\|^2$. Но тогда $\| y_k \| < \| y_{k+1} \|$, кроме того, последовательность $\{\| y_k \|\}$ ограничена сверху числом $\left\| x_{k_0}^* \right\|$. Последовательность смежных симплексов $\{\sigma^k\}$, которым соответствует последовательность $\{\| y_k \|\}$, входит естественным образом в покрытие области достижимости $\Re(T)$ n-мерными смежными симплексами. По предположению $T > T_*$, поэтому $0 \in \operatorname{int} \Re(T)$ и в силу следствия 1 на некоторой конечной итерации $k_1 \geq k_0$ выполнено неравенство

$$(x_{k_0}^*, z_{k_1}^{n+1}) < (x_{k_0}^*, x_{k_0}^*). \tag{17}$$

Рассмотрим выражение $\left\| \zeta x_{k_0}^* + (1-\zeta) z_{k_1}^{n+1} \right\|^2$. Минимум по ζ это выражение достигает при

$$\zeta = \zeta^* = \frac{(z_{k_1}^{n+1},\ z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*)}{(z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*,\ z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*)}.$$

Отсюда

$$\zeta^* < \frac{(z_{k_1}^{n+1},\ z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*) - (x_{k_0}^*,\ z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*)}{(z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*,\ z_{k_1}^{n+1} - x_{k_0}^*)} = 1$$

в силу неравенства (17). Последнее означает, что

$$\left\| x_{k_0}^* \right\| = \rho_{k_0} > \left\| \bar{\zeta}^* x_{k_0}^* + (1 - \bar{\zeta}^*) z_{k_1}^{n+1} \right\| \geq \rho_{k_1},$$

где $\bar{\zeta}^* = \max(0, \zeta^*)$. Противоречие с предположением, что при $k \geq k_1$ выражение (16) является равенством.

Итак, из последовательности $\{\rho_k\}$ можно выделить строго убывающую подпоследовательность $\{\rho_{k_j}\}$, которая ограничена снизу нулем. Согласно следствию 1 последовательности $\{\rho_k\}$ и $\{\rho_{k_j}\}$ конечны и их общий последний элемент равен нулю.

Пусть $\Lambda_k = \{i: \lambda_i^0 < 0\}$, где $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{n+1}^0)$ – решение системы (12) при $z^i = z_k^i,\ i = \overline{1, n+1}$. Как показано выше, найдется такое $k_0 \geq 1$, что $\rho_{k_0} =$ $= \rho(\sigma^{k_0}) = 0$. Это означает, что $0 \in \sigma^{k_0}$. Поэтому $\Lambda_{k_0} = \emptyset$ и $\Lambda_k \neq \emptyset$ при $k < k_0$.

В силу шагов 8–16 алгоритма при любом $k \geq k_0$ имеет место включение $0 \in \sigma^k$. Это означает, что множество $\Lambda_k = \emptyset$ при любом $k \geq k_0$.

Пусть $k \geq k_0$ фиксировано. На k-й итерации при поиске решения μ_k уравнения (10) методом дихотомии возможны два случая:

1) $z_\mu \in \sigma^k$ при некоторой очередной аппроксимации μ решения μ_k;

2) $z_{\mu_k} \neq \sigma^k$.

Рассмотрим случай 1. По лемме 4 среди вершин симплекса σ^k найдется такой набор вершин $z_k^1, \ldots, z_k^{i_0-1}, z_k^{i_0+1}, \ldots, z_k^{n+1}$, что $0 \in \sigma^{k+1} = [z_k^1, \ldots, z_k^{i_0-1}, z_k^{i_0+1}, \ldots, z_k^{n+1}, z_\mu]$, где $i_0 = i_0(k)$ – индекс, определяемый на шаге 14 алгоритма. По построению имеем $\sigma^{k+1} \subset \sigma^k$, поэтому $\sigma^{k+1} \cap \sigma^k = \sigma^{k+1}$.

В случае 2 (аналогично случаю 1) среди вершин симплекса σ^k найдется такой набор вершин $z_k^1, \ldots, z_k^{i_0-1}, z_k^{i_0+1}, \ldots, z_k^{n+1}$, что $0 \in \sigma^{k+1} = [z_k^1, \ldots, z_k^{i_0-1}, z_k^{i_0+1}, \ldots, z_k^{n+1}, z_{\mu_k}]$, где $i_0 = i_0(k)$ – индекс, определяемый на шаге 16 алгоритма. Так как $z_{\mu_k} \notin \sigma^k$, пересечение $\sigma^{k+1} \cap \sigma^k \neq \sigma^{k+1}$ и σ^{k+1} содержит внутри начало координат.

Предположим, что существует такой конечный номер $k_1 \geq k_0$, что $i_0 = i_0(k)$ не зависит от номера итерации k при $k \geq k_1$. Обозначим через $\tilde{c}_k^i$ соответствующие векторы $\tilde{c}^i$, $i = \overline{1, n+1}$, на k-й итерации. Тогда очевидно, что $z_k^i \equiv z_{k_1}^i$, $\tilde{c}_k^i \equiv \tilde{c}_{k_1}^i$, $i = \overline{1, n+1}$, $i \neq i_0$, для любого $k \geq k_1$.

Пусть $\lambda^{0,k} = (\lambda_i^{0,k}, \ldots, \lambda_{n+1}^{0,k})$ и $\lambda^{*,k} = (\lambda_i^{*,k}, \ldots, \lambda_{n+1}^{*,k})$ – решения систем линейных алгебраических уравнений (12) и (12^*) соответственно при $z^i = z_k^i$, $i = \overline{1, n+1}$. Покажем, что $\lambda_{i_0}^{0,k_1} > 0$. Предположим противное, т. е. $\lambda_{i_0}^{0,k_1} = 0$. Тогда при любом μ, $0 \leq \mu \leq \mu(\bar{c})$, за исключением такого $\mu = \mu'$, при котором $z^j = z_{\mu'}$, где $j = \arg \max\limits_{i = \overline{1, n+1}} \lambda_i^0$ (см. шаг 14 алгоритма), вектор $\lambda^{*,k}$ имеет по меньшей мере одну отрицательную компоненту. Это означает, что на (k_1+1)-й итерации мы попадаем на шаг 16 алгоритма. Так как $z_{k_1+1}^i = z_{k_1}^i$, $i = \overline{1, n+1}$, $i \neq i_0$, и $\lambda_{i_0}^{0,k_1} = 0$, то и $\lambda_{i_0}^{0,k_1+1} = 0$. Но тогда $\tau = 1$ и λ_i^{*,k_1} станут равными λ_i^{0,k_1}, $i = \overline{1, n+1}$. Отсюда, в силу того что $\lambda_{i_0}^{0,k_1+1} = 0$, получим $i_0(k_1+1) \neq i_0 = i_0(k_1)$. Это противоречит предположению о том, что при $k \geq k_1$ величина $i_0 = i_0(k)$ не зависит от k. Следовательно, $\lambda_{i_0}^{0,k_1} > 0$. Нетрудно видеть, что величина $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$ для любого $k \geq k_1$, для которого найдется такое $\mu = \mu(k)$, что система (12^*) имеет неотрицательное решение λ^*, т. е. $\lambda_i^* \geq 0$, $i = \overline{1, n+1}$. Поскольку $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$, то величина $\gamma = \lambda_{i_0}^{0,k} / \lambda_{i_0}^{*,k}$ также положительна. Поэтому (см. шаг 14 алгоритма) справедливы неравенства

$$\lambda_i^{0,k+1} = \lambda_i^{0,k} - \gamma \lambda_i^{*,k} \leq \lambda_i^{0,k} \tag{18}$$

при i, $1 \leq i \leq n+1$, $i \neq i_0$. Отсюда следует, что

$$\lambda_{i_0}^{0,k+1} = 1 - \sum_{i=1,\, i \neq i_0}^{n+1} \lambda_i^{0,k+1} \geq 1 - \sum_{i=1,\, i \neq i_0}^{n+1} \lambda_i^{0,k} = \lambda_{i_0}^{0,k}.$$

Величина $\lambda_{i_0}^{*,k} < 1$ по крайней мере при одном $i \neq i_0$, $1 \le i \le n+1$, поэтому неравенство (18) является строгим. Но тогда $\lambda_{i_0}^{0,k} < \lambda_{i_0}^{0,k+1}$.

Последовательность $\{\lambda_{i_0}^{0,k}\}$ строго возрастающая и ограничена сверху единицей, поэтому существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{i_0}^{0,k} = \overline{\lambda}_{i_0}^{0}$. Следовательно, существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_i^{0,k} = \overline{\lambda}_i^{0}$, $i = \overline{1, n+1}$, $i \neq i_0$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_i^{*,k} = \overline{\lambda}_i^{*}$, $i = \overline{1, n+1}$.

Далее справедливы равенства

$$\overline{\lambda}_i^{0} = \lim_{k\to\infty} \lambda_i^{0,k+1} = \lim_{k\to\infty} (\lambda_i^{0,k} - \gamma_k \lambda_i^{*,k}) = \overline{\lambda}_i^{0} - \lim_{k\to\infty} \gamma_k \lim_{k\to\infty} \lambda_i^{*,k} =$$

$$= \overline{\lambda}_i^{0} - \gamma^* \overline{\lambda}_i^{*}, \quad 1 \le i \le n+1,\ i \neq i_0,$$

где $\gamma_k = \lambda_{i_0}^{0,k} \big/ \lambda_{i_0}^{*,k}$, $\gamma^* = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k$.

Величина $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$ для любого $k \ge k_1$, поэтому $\gamma^* > 0$ и $\overline{\lambda}_i^{*} = 0$, $i \neq i_0$, $1 \le i \le n+1$. Отсюда следует, что $\overline{\lambda}_{i_0}^{*} = 1$. Это означает, что найдется такое конечное $k = k(\varepsilon_0)$, при котором $\left|\lambda_{i_0}^{0,k(\varepsilon_0)} - 1\right| \le \varepsilon_0$.

Покажем, что не существует такого i_2, $1 \le i_2 \le n+1$, для которого $\lambda_{i_2}^{0,k} = 0$ при всех $k \ge k(\varepsilon_0)$. Легко видеть, что $i_2 \neq i_0$, так как $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$ для любого $k \ge k_1$. В данном случае алгоритм на $k(\varepsilon_0)$-й итерации продолжит поиск решения $\mu_{k(\varepsilon_0)}$ уравнения (10) (см. шаг 14). Полученная точка $z_{\mu_{k(\varepsilon_0)}}$ такова, что решение системы линейных алгебраических уравнений (12^*) при $\mu = \mu_{k(\varepsilon_0)}$ имеет по меньшей мере одну отрицательную компоненту. Поскольку точки $z_{k_1}^{i_2}$ и $z_{\mu_{k(\varepsilon_0)}}$ лежат по разные стороны относительно гиперплоскости, проходящей через точки $z_{k(\varepsilon_0)}^{i}$, $1 \le i \le n+1$, $i \neq i_2$, величина $\lambda_{i_2}^{*,k(\varepsilon_0)} < 0$ (см. лемму 2). Отсюда, в силу равенства $\lambda_{i_2}^{0,k(\varepsilon_0)} = 0$, получаем на шаге 16 алгоритма $\tau = 1$. Поэтому точка $z_{k(\varepsilon_0)}^{i_0}$ будет заменена точкой $z_{\mu_{k(\varepsilon_0)}}$. На $(k(\varepsilon_0)+1)$-й итерации решение $\lambda^{0,k(\varepsilon_0)+1}$ системы линейных алгебраических уравнений (12) будет таково, что $\lambda_{i_2}^{0,k(\varepsilon_0)+1} > 0$. Следовательно, число нулевых компонент в решении системы (12) на $(k(\varepsilon_0)+1)$-й итерации уменьшилось по крайней мере на единицу по сравнению с $k(\varepsilon_0)$-й итерацией. При этом, поскольку по предположению $i_0(k)$ постоянна при $k \ge k_1$, величина $\lambda_{i_0}^{0,k} > 0$.

Так как число нулевых компонент решения системы (12) убывает, то найдется такой номер $k_2 \ge k(\varepsilon_0)$, при котором все компоненты этого решения будут положительны, что и требовалось показать.

Пусть $\lambda_i^{0,k(\varepsilon_0)} > 0$, $i = \overline{1, n+1}$, тогда на $(k(\varepsilon_0)+1)$-й итерации величина

$$\gamma = \arg \min_{i \in \{i:\ \lambda_i^{*,k(\varepsilon_0)+1} > 0\}} \lambda_i^{0,k(\varepsilon_0)+1} \big/ \lambda_i^{*,k(\varepsilon_0)+1} > 0,$$

а $\left|\lambda_i^{*,\,k(\varepsilon_0)+1}-1\right|\le\varepsilon_0$. Очевидно, что при $k=k(\varepsilon_0)$ имеет место строгое включение

$$\sigma^{k+1}\subset\sigma^k. \tag{19}$$

Далее на шаге 14 находим вектор c^*, который существенно отличается от вектора $\tilde{c}^{\,i_0}_{k(\varepsilon_0)+1}$, полученного на $k(\varepsilon_0)$-й итерации на шаге 8. При $k=k(\varepsilon_0)+2$ либо справедливо неравенство $\left|\lambda_i^{*,\,k}-1\right|>\varepsilon_0$, либо осуществляется переход к шагу 16.

Пусть при $k=k(\varepsilon_0)+2$ справедливо неравенство $\left|\lambda_i^{*,\,k}-1\right|>\varepsilon_0$. Предположив обратное, приходим к выводу, что точка $z_{\mu_{k(\varepsilon_0)+2}}$ совпадает с вершиной $z^{i_0}_{k(\varepsilon_0)+1}$ симплекса $\sigma^{k(\varepsilon_0)+1}$, а это противоречит тому, что вектор c^* существенно отличается от $\tilde{c}^{\,i_0}_{k(\varepsilon_0)+1}$. Поэтому, поскольку все $\lambda_i^{0,\,k(\varepsilon_0)+2}>0,\ i=\overline{1,n+1}$, при $k=k(\varepsilon_0)+1$ имеет место строгое включение (19).

Переход к шагу 16 алгоритма возможен только тогда, когда при поиске методом дихотомии решения системы (10) с необходимой точностью все выбираемые значения μ из интервала $[0,\mu(c^*)]$ таковы, что решение системы (12^*) имеет по меньшей мере одну отрицательную компоненту. Величина $\tau_k=\tau$, определяемая на этом шаге, положительна и строго меньше единицы, поскольку $\lambda_i^{0,\,k}>0,\ i=\overline{1,n+1}$, при $k\ge k(\varepsilon_0)$. Но тогда $\tau_k\lambda_{i_0}^{0,\,k}+(1-\tau_k)\lambda_{i_0}^{*,\,k}>0$ по определению величины i_0 и того, что $i_0=i_0(k)$ не зависит от номера итерации k по предположению. Пусть $l_k=\arg\min\limits_{1\le i\le n+1}\{\tau_k\lambda_i^{0,\,k}+(1-\tau_k)\lambda_i^{*,\,k}\}$. В силу определения точки z_{μ_k} и того, что симплекс $\sigma^{k+1}=[z_k^1,\dots,z_k^{i_0-1},z_{\mu_k},z_k^{i_0+1},\dots,z^{n+1}]$ содержит начало координат пространства $\mathbb{R}^n$ внутри по построению, справедливы неравенства $(\bar{c}_k,z_k^{l_k})>0$ и $(\bar{c}_k,z_k^{i_0})>0$ либо неравенства противоположного знака $(\bar{c}_k,z_k^{l_k})<0$ и $(\bar{c}_k,z_k^{i_0})<0$, где $\bar{c}_k=\bar{c}$ (см. шаг 9 алгоритма). Поэтому на $(k+1)$-й итерации решение $\lambda^{0,\,k+1}$ системы (12) таково, что $\lambda_{i_0}^{0,\,k+1}>\lambda_{i_0}^{0,\,k}$.

Предположим, что на каждой итерации $k\ge k(\varepsilon_0)+2$ происходит переход к шагу 16 алгоритма. Тогда последовательность $\{\lambda_{i_0}^{0,\,k}\}$ имеет предел. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_{i_0}^{0,\,k}=\bar{\lambda}_{i_0}^{0,\,k}$. Очевидно, что существуют и пределы $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{0,\,k}=\bar{\lambda}_i^{0,\,k},\ i\ne i_0$, $1\le i\le n+1$. Взяв на шаге 8 в качестве c^* вектор $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i^0\tilde{c}^{\,i}\Big/\left\|\sum\limits_{i=1}^{n+1}\bar{\lambda}_i^0\tilde{c}^{\,i}\right\|$, получим точку z_{μ_k}, которая совпадает с i_0-й вершиной предельного симплекса. Отсюда следует, что система (12^*) имеет неотрицательное решение. Противоречие с предположением о том, что на каждой итерации $k\ge k(\varepsilon_0)+2$ происходит переход к шагу 16 алгоритма. Следовательно, найдется такой конечный номер $k=k_2\ge k(\varepsilon_0)+2$, при котором система (12^*) будет иметь неотрицательное решение. Поэтому справедливо строгое включение (19).

В силу (19) нетрудно видеть, что не существует таких номеров $k' \geq k_1$ и $k'' > k'$, что $\sigma^{k'} \subseteq \sigma^{k''}$. Отсюда и ввиду того, что $0 \in \sigma^k$ при всех $k \geq k_0$, следует сходимость последовательности симплексов $\{\sigma^k\}$. Ее «точкой сгущения» является некоторый предельный симплекс $\sigma^* = [z_*^1, \ldots, z_*^{n+1}]$, вершина $z_*^{i_0}$ которого совпадает с началом координат пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому найдется такой конечный номер $k_3 \geq k_1$, при котором $\left\| z_{k_3}^{i_0} \right\| \leq \varepsilon$.

Пусть $I_k = \max\limits_{1 \leq i \leq n+1} I(u^{i,k})$, где $u^{i,k}$ – управление, соответствующее i-й вершине симплекса σ^k. Последовательность чисел $\{I_k\}$ сходится к вполне определенному пределу, поскольку сходится последовательность $\{\sigma^k\}$. Когда выполнено (19), то $I_k > I_{k+1}$, так как $z_\mu \in \operatorname{int} \sigma^k$. Более того, $\{I_k\}$ ограничена снизу нулем. Следовательно, она имеет единственный предел, совпадающий с $\mathfrak{I}_{\min}$.

Таким образом, сходимость алгоритма, в случае когда $i_0 = i_0(k)$ не зависит от k, доказана. Аналогично с некоторыми упрощениями доказывается сходимость для случая, когда $i_0 = i_0(k)$ зависит от k. Сходимость алгоритма доказана.

Из доказательства непосредственно следует справедливость

Теоремы 2. Последовательность управлений, генерируемая вышепредложенным алгоритмом, при любом $\varepsilon > 0$ сходится к ε-оптимальному решению за конечное число итераций.

Под ε-оптимальным решением понимается субоптимальное управление, переводящее систему (1) в ε-окрестность начала координат со значением функционала (3), отличающимся от оптимального значения на величину, не превосходящую ε.

4. Численное решение конкретных задач минимизации расхода ресурсов. В этом разделе проиллюстрирован ход решения задач минимизации расхода ресурсов. Для интегрирования прямой и сопряженной систем применялся метод Рунге – Кутты четвертого порядка с постоянным шагом интегрирования $h = h_0 = 0{,}01$. За критерии останова взяты следующие выражения: $\left\| z^{n+1} \right\| \leq \varepsilon$ и $\left| z_j^{n+1} \right| \leq \varepsilon_j$, $j = \overline{1, n}$.

П р и м е р 1 [13]. Рассматривается задача

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -x_3 + u, \\ &x(0) = (-\pi^2/4, 0, 0, -6); \quad x(T) = (0, 0, 0, 0); \\ &|u| \leq 1; \quad \mathcal{F}(u) = \int_0^T |u(\tau)| d\tau \to \min, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где T фиксировано, $T > T_* \approx 9{,}42478$ (T_* – время оптимального по быстродействию перевода линейной системы в начало координат).

Отметим, что задача (20) интересна еще тем, что матрица управляемой системы имеет комплексные корни, поэтому число переключений оптимального (ε-оптимального) управления зависит не только от размерности

Таблица 1

k	$u(0)$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	I_k	$\|z^{n+1}\|$
1	1	8,37970	–	–	–	–	–	9,6	42,9355
3	–1	4,18985	–	–	–	–	–	9,6	19,8460
4	1	0,46985	3,12055	6,53680	–	–	–	9,6	10,4061
5	1	1,57068	4,94617	7,81895	–	–	–	9,6	2,51253
9	1	1,09744	4,33142	8,46397	–	–	–	9,6	2,48715
11	1	1,60179	4,42626	8,112617	–	–	–	9,59483	4,30868
19	1	1,44272	1,55652	4,53461	4,64262	7,90138	8,01670	9,26286	0,485528
27	1	1,42007	1,65538	4,56997	4,79722	7,81399	8,05000	8,90143	0,137838
53	1	1,33067	1,75013	4,47061	4,87531	7,72825	8,14943	8,35465	0,137379
61	1	1,33981	1,77840	4,49363	4,92378	7,68391	8,12281	8,29235	0,135412
81	1	1,29361	1,75933	4,44226	4,88879	7,71092	8,17902	8,21965	0,0266648
99	1	1,29347	1,76358	4,43952	4,89191	7,69914	8,17131	8,20532	0,0207973
125	1	1,29210	1,76509	4,43494	4,89041	7,69586	8,17096	8,19644	0,0102722
157	1	1,29285	1,76649	4,43708	4,89309	7,69707	8,17279	8,19451	0,00102945
237	1	1,29232	1,76610	4,43676	4,89276	7,69761	8,17351	8,19433	0,000398825
267	1	1,29229	1,76607	4,43676	4,89274	7,69762	8,17352	8,19433	$6{,}43788 \cdot 10^{-5}$

системы, но и от времени окончания процесса управления T. Как показали расчеты (см. далее), число точек переключений при $T = 9{,}6$ равно шести, при $T = 12{,}0$ – восьми, а при $T = 15{,}0$ – десяти.

Значения величин ε и ε_j, $j = \overline{1, n}$, выбраны равными 10^{-8} и 10^{-4}. Точки переключения уточнялись до ε. Задача (20) была решена при различных значениях T: 9,6; 12,0; 15,0 алгоритмом из [1] (табл. 1, 2) и методом, предложенным в разд. 2 (табл. 3, 4). Ход решения отражен только для времени $T = 9{,}6$, поскольку для других значений T таблицы очень громоздки. Поэтому приводят-

Таблица 2

T		n_{it}		$\|x(T)\|$		$I_{n_{it}}$		$u(0)$	
12,0		137		$6{,}05548 \cdot 10^{-5}$		7,11958		1	
15,0		111		$1{,}77038 \cdot 10^{-5}$		6,67377		1	
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
0,979536	2,20602	4,03819	5,24698	7,31087	8,54161	10,2692	11,4836	–	–
0,856190	2,47243	3,80402	5,50589	6,96577	8,57138	10,2736	12,0096	13,0304	14,6969

Т а б л и ц а 3

k	$u(0)$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	I_k	$\lVert z^{n+1} \rVert$
1	1	8,37970	–	–	–	–	–	9,6	42,9355
3	–1	4,18985	–	–	–	–	–	9,6	19,8460
4	1	0,46985	3,12055	6,53680	–	–	–	9,6	10,4061
5	1	1,57068	4,94617	7,81895	–	–	–	9,6	2,51253
9	1	1,09744	4,33142	8,46397	–	–	–	9,6	2,48715
12	1	1,26204	4,40725	4,93109	7,64721	8,18977	–	7,99272	0,0896215
19	1	1,29398	1,76779	4,43766	4,89481	7,69155	8,16722	8,19337	0,0152331
35	1	1,29427	1,76550	4,43801	4,89195	7,69698	8,17023	8,20159	0,0053512
40	1	1,29243	1,75623	4,43675	4,89285	7,79733	8,17322	8,19421	0,00107206
46	1	1,29236	1,76618	4,43673	4,89283	7,69742	8,17334	8,19417	0,000698864
50	1	1,29236	1,76618	4,43673	4,89283	7,69742	8,17334	8,19417	0,000697692
57	1	1,29232	1,76606	4,43673	4,89272	7,69763	8,17348	8,19441	0,000438871
60	1	1,29228	1,76605	4,43673	4,89274	7,69763	8,17351	8,19432	$6,59209 \cdot 10^{-5}$

ся только ε-оптимальные управления, значения функционала (3) и число итераций, потребовавшихся для их поиска. Использованы следующие обозначения: k – номер итерации; $u(0)$ – значение управления на первом интервале $[0, t_1]$; t_i – i-я точка переключения управления; I_k – значение функционала k-й итерации; n_{it} – число итераций, потребовавшихся для поиска ε-оптимального решения.

Как видно из сравнения табл. 1 и 3, предложенный в данной работе численный метод эффективнее метода [1]. Решение задачи (20) при $T = 9{,}6$ получено за 60 итераций, что меньше на 207 итераций.

Сравнение табл. 2 и 4 также позволяет сделать вывод о том, что предложенный метод эффективнее метода [1], так как ему потребовалось для нахождения решения задачи (20) при $T = 12{,}0$ на 66 итераций меньше, а при $T = 15{,}0$ на 41 итерацию.

Т а б л и ц а 4

T	n_{it}	$\lVert x(T) \rVert$	$I_{n_{it}}$	$u(0)$
12,0	71	$8{,}06427 \cdot 10^{-5}$	7,11958	1
15,0	70	0,000127704	6,67376	1

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
0,979538	2,20602	4,03817	5,24698	7,31086	8,54157	10,2692	11,4836	–	–
0,856193	2,47247	3,80403	5,50593	6,96574	8,57141	10,2736	12,0096	13,0305	14,6969

П р и м е р 2 [14]. Рассматривается задача успокоения за фиксированное время $T = 25{,}0$ с минимальным расходом топлива колебательной двухмассовой системы. Математическая модель системы имеет вид

$$\int_0^T u(t)\,dt \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = x_4,\ \ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + u,\ \ \dot{x}_4 = 0{,}1x_1 - 1{,}02x_2, \tag{21}$$

$$x(0) = (0, 0, 2, 1),\ \ x(T) = (0, 0, 0, 0),\ \ 0 \le u(t) \le 1,\ \ t \in [0, T],$$

где $x_1 = x_1(t)$ – отклонение от положения равновесия первой массы; $x_2 = x_2(t)$ – отклонение от положения равновесия второй массы; $x_3 = dx_1/dt$; $x_4 = dx_2/dt$; $u = u(t)$ – секундный расход топлива.

Задача (21) была решена в [14] методом с элементарной заменой опоры. Полученное приближение оптимального управления имеет четыре точки переключения и значение функционала, равное 6,330938. Однако, как показали расчеты, проведенные предлагаемым методом, ε-оптимальное управление

Т а б л и ц а 5

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	I_k	$\left\|z^p\right\|$
1	2,56437	5,88214	9,21461	12,7763	18,0044	21,5193	24,8466	–	–	–	25	2,01588
9	0,0846254	1,13260	3,27916	6,43908	9,60304	12,7675	15,9312	19,0892	20,8231	22,2804	25	2,67968
11	1,13977	6,59528	9,90153	13,1555	16,4252	19,8770	–	–	–	–	22,7961	0,897896
22	2,93227	6,03428	9,68627	12,7197	16,4287	19,6697	–	–	–	–	9,37651	0,446768
32	3,21466	5,73470	9,79521	12,5062	16,9178	19,1473	–	–	–	–	7,46053	0,229872
50	3,25572	5,45953	9,92961	12,4124	17,5237	19,1213	–	–	–	–	6,28416	0,0065479
60	3,25766	5,45348	9,93302	12,4114	17,5260	19,1214	–	–	–	–	6,26967	0,00149599
70	3,25761	5,45227	9,93348	12,4113	17,5260	19,1222	–	–	–	–	6,26872	$7{,}05282 \cdot 10^{-5}$
78	3,25762	5,45220	9,93351	12,4113	17,5260	19,1222	–	–	–	–	6,26860	$8{,}29345 \cdot 10^{-6}$

имеет шесть точек переключения и значение функционала, равное 6,2686. Ход решения задачи (21) отражен в табл. 5. Начальное значение управления на всех итерациях $u(0)=0$.

Следует отметить, что в [14] получен локальный минимум функционала.

Заключение. Метод симплексного покрытия внутренностей тел в n-мерном евклидовом пространстве послужил основой для создания численного метода решения задач минимизации расхода ресурсов для систем с разделенной по состоянию и управлению правой частью. Предложенный метод обладает численной устойчивостью и глобальной сходимостью. Даже для линейных систем он оказался намного эффективнее ранее разработанного метода решения собственно линейных задач [1]. Предложенный метод можно модифицировать и для решения более общих нелинейных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shevchenko G. V.** Algorithm for solving linear problem of minimizing resources consumption // Proc. of the IASTED Intern. Conf. "Automation, Control, and Information Technology" (ACIT 2002). Anaheim – Calgary – Zurich: ACTA Press, 2002. P. 224.
2. **Foy W. H.** Fuel minimization in flight vehicle attitude control // IEEE Trans. Automat. Control. 1963. **AC-8**. P. 84.
3. **Hales K. A., Flugge-Lotz I., Lange B. D.** Minimum-fuel attitude control of a spacecraft by an extended method of steepest-descend // Intern. Journ. Non-linear Mech. 1968. **3**, N 4. P. 413.
4. **Heinen J. A.** An optimal control theory solution a practical minimum fuel consumption problem // Intern. Journ. Math. Educ. Sci. Technol. 1976. **7**. P. 10.
5. **Liu S.-W., Singh T.** Fuel-time optimal control of spacecraft maneuvers // Journ. Guid. Control Dyn. 1997. **20**, N 2. P. 394.
6. **Redmond J., Silverberg L.** Fuel consumption in optimal control // Journ. Guid. Control Dyn. 1992. **15**, N 2. P. 424.
7. **Ryah E. P.** Synthesis of time-fuel-optimal control: a second-order example // Intern. Journ. Control. 1980. **31**. P. 379.
8. **Singh T.** Fuel-time optimal control of the benchmark problem // Journ. Guid. Control Dyn. 1995. **18**, N 6. P. 1225.
9. **Snow D. R.** Singular optimal controls for a class of minimum effort problems // Journ. Soc. Industr. and Appl. Math. 1964. **A2**, N 2.
10. **Иванов В. А., Кожевников С. А.** Одна задача синтеза оптимального по расходу топлива управления линейными объектами второго порядка с производными управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 4. С. 77.
11. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1982.
12. **Von Hohenbalken B.** A finite algorithm to maximize certain pseudoconcave functions on polytopes // Math. Program. 1975. **9**. P. 189.
13. **Киселев Ю. Н., Орлов М. В.** Численные алгоритмы линейных быстродействий // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1991. **31**, № 12. С. 1763.
14. **Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2000. **40**, № 6. С. 838.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
E-mail: shevch@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
27 сентября 2005 г.