РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я
2006, том 42, № 2

УДК 621.865

А. В. Лебедев, В. Ф. Филаретов
(Владивосток)

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И НЕИДЕАЛЬНОСТЬЮ ПЕРЕКЛЮЧАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА*

Проведено исследование системы второго порядка с переменной структурой и неидеальностью переключающего устройства при ее движении в режиме переключений. Дано определение режима, получены условия его существования и устойчивости, а также условия попадания изображающей точки в область переключений. Сформулировано и доказано свойство робастности системы с переменной структурой в режиме переключений, и получена предельная оценка точности ее работы в сравнении с идеальным режимом скольжения. Определен способ уменьшения амплитуды автоколебаний системы.

Введение. В настоящее время для управления нестационарными динамическими объектами весьма успешно используются системы с переменной структурой (СПС) [1, 2], которые благодаря специально организованному режиму скольжения [3] обеспечивают высокие показатели качества и робастность по отношению к изменяющимся параметрам объекта управления (ОУ). В работах [4, 5] предложены методы синтеза СПС для нелинейных и многомерных объектов.

Несмотря на то что общие принципы построения СПС достаточно хорошо изучены, их реализация зачастую наталкивается на существенные трудности, связанные, в частности, с наличием неидеальности переключающего устройства, обеспечивающего заданный закон изменения структуры системы. Указанная неидеальность не позволяет использовать классическое понятие скользящего режима и непосредственно применять многие известные теоретические положения.

Как следствие, появляется необходимость дать строгое определение реального режима переключений, возникающего в СПС, сформулировать условия его возникновения, существования и устойчивости, а также исследовать движение системы в указанном режиме. Для определения степени робастности СПС следует оценить максимальное отклонение ошибки системы в режиме переключений от ее ошибки в режиме идеального скольжения и доказать справедливость полученной оценки. Кроме того, требуется найти па-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-07-90027, № 05-08-33627).

раметры установившихся колебаний системы около положения равновесия. Решение перечисленных задач является целью предлагаемой работы.

1. Постановка задачи. Исследуем работу СПС, управляющей динамическим объектом второго порядка, который описывается дифференциальным уравнением общего вида:

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = b(t)u, \qquad (1)$$

где x – выходная координата объекта; u – сигнал управления; $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b(t)$ – переменные положительные параметры ОУ, принимающие любые значения в заданных диапазонах.

Указанные диапазоны изменения параметров объекта определим следующим образом:

$$0 < a_{1\,\min} \le a_1 \le a_{1\,\max}, \quad 0 < a_{2\,\min} \le a_2 \le a_{2\,\max}, \quad 0 < b_{\min} \le b \le b_{\max},$$

где $a_{1\,\min}$, $a_{1\,\max}$, $a_{2\,\min}$, $a_{2\,\max}$, $b_{\min}$, $b_{\max}$ – заданные постоянные значения.

В соответствии с известной методикой [2] сформируем управление:

$$u = k_u |e| g(s), \qquad (2)$$

$$e = x_d - x, \qquad (3)$$

$$s = \dot{e} + k_s e, \qquad (4)$$

где x_d – задающее воздействие по координате; e – ошибка системы; s – линейная комбинация ошибки и ее производной; k_u, k_s – постоянные положительные коэффициенты управляющего устройства; $g(s)$ – нелинейная (релейная) функция, задающая закон изменения структуры СПС.

Будем полагать, что переключающий элемент имеет наиболее распространенную неидеальность типа гистерезис. Как известно, в реле с гистерезисом, как и в любом релейном элементе, выходной сигнал $g(s)$ может принимать значение в зависимости от входного сигнала s только $+1$ или -1. Однако вследствие так называемого координатного запаздывания изменение знака $g(s)$, т. е. переключение реле, в случае возрастания входного сигнала s (когда $\dot{s} > 0$) происходит при $s = \Delta s$, а в случае его убывания (когда $\dot{s} < 0$) – при $s = -\Delta s$ (здесь Δs – некоторая положительная константа). С учетом отмеченного свойства переключающего элемента, имеющего принципиальное значение для исследуемой модели, зависимость $g(s)$ определяется следующими соотношениями:

$$g(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s > \Delta s \text{ и } \dot{s} > 0 \text{ или } s > -\Delta s \text{ и } \dot{s} < 0; \\ -1, & \text{если } s < -\Delta s \text{ и } \dot{s} < 0 \text{ или } s < \Delta s \text{ и } \dot{s} > 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим свободное движение системы (1)–(5), полагая в выражении (3) $x_d = 0$. С учетом этого уравнение (1) перепишем относительно ошибки и подставим в него управление (2), принимая во внимание равенство $|e| = e\,\mathrm{sign}(e)$. В результате окончательно получим

$$\ddot{e} + a_1\dot{e} + a_2 e = -bk_u e\,\mathrm{sign}(e) g(s). \qquad (6)$$

Уравнения (4)–(6) полностью определяют динамику рассматриваемой СПС и будут использоваться далее в качестве ее математической модели.

В соответствии с этими выражениями на фазовой плоскости системы имеются три прямые переключения: $\dot e = -k_s e + \Delta s$ (т. е. $s = \Delta s$), $\dot e = -k_s e - \Delta s$ (т. е. $s = -\Delta s$) и $e = 0$, разбивающие ее на области с различными законами движения (различными типами фазовых траекторий).

Устойчивым режимом переключений назовем такой режим движения системы (4)–(6), при котором в любой момент времени выполняется неравенство $-\Delta s \le s \le \Delta s$ (т. е. изображающая точка не покидает зону $-\Delta s \le s \le \Delta s$, ограниченную на фазовой плоскости двумя параллельными прямыми $s = \Delta s$ и $s = -\Delta s$) и для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $t_1 > 0$, что при любом $t \ge t_1$ выполняется неравенство $|e(t)| \le \varepsilon$.

Отметим, что значение константы ε не может быть меньше определенной величины, которая зависит от параметров управляющего устройства и ОУ и будет получена далее.

В соответствии с поставленной целью сформулируем условия возникновения и существования в системе (4)–(6) устойчивого режима переключений. Затем получим и строго докажем неравенство, дающее оценку степени робастности СПС в указанном режиме в зависимости от коэффициентов управляющего устройства. На основании этой оценки определим параметры автоколебаний, имеющих место в СПС.

2. Условия возникновения и существования режима переключений. Как известно, именно режим переключений является основным для СПС с неидеальностью переключающего устройства. В соответствии с приведенным в разд. 1 определением получим условия существования этого режима в виде системы неравенств

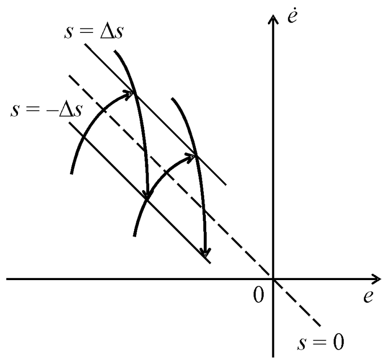
$$\begin{cases} \dot s < 0, & \text{если } s - \Delta s \ge 0; \\ \dot s > 0, & \text{если } s + \Delta s \le 0. \end{cases} \tag{7}$$

Геометрически условия (7) интерпретируются следующим образом: в малой окрестности зоны переключений, задаваемой неравенством $-\Delta s \le s \le \Delta s$, фазовые траектории системы направлены внутрь этой зоны (см. рисунок).

Найдем ограничения, которым должны удовлетворять коэффициенты k_u и k_s управляющего устройства для выполнения неравенств (7) при любых a_1, a_2 и b из заданных диапазонов. Для этого вычислим производную функции $s(t)$ в силу уравнения (6):

$$\dot s = (k_s - a_1)\dot e - a_2 e - b k_u e \operatorname{sign}(e) g(s). \tag{8}$$

Рассмотрим первое неравенство системы (7). Очевидно, что в случае выполнения условия $s - \Delta s \ge 0$ (в любой точке вне зоны переключения) имеет место равенство $s = \Delta s + h$, т. е. $\dot e = -k_s e + \Delta s + h$, где $h \ge 0$ – некоторая вспомогательная



Фазовые траектории системы в окрестности зоны переключений функция, принимающая только неотрицательные значения, зависящие от величины отклонения изображающей точки от прямой $s=\Delta s$ при ее выходе из зоны переключения. Подставим последнее соотношение в (8), проведем необходимые преобразования и получим

$$\dot{s}=\left(\frac{((a_1-k_s)k_s-a_2)\,\mathrm{sign}\,(e)}{g(s)}-bk_u\right)|e|g(s)-(a_1-k_s)(\Delta s+h). \tag{9}$$

Отметим, что при $s-\Delta s\geq 0$ согласно соотношениям (5) автоматически обеспечивается $g(s)=1>0.$ Поэтому в соответствии с выражением (9) для выполнения условия $\dot{s}<0$ достаточно гарантировать справедливость следующих неравенств:

$$\frac{((a_1-k_s)k_s-a_2)\,\mathrm{sign}\,(e)}{g(s)}-bk_u<0,$$

$$(a_1-k_s)(\Delta s+h)>0.$$

Отсюда (с учетом $\Delta s+h>0$) уже нетрудно получить соотношения для расчета коэффициентов k_u и k_s управляющего устройства, которые должны выполняться при любых изменениях параметров a_1, a_2 и b в заданных диапазонах:

$$k_u>\max_{a_1,\,a_2,\,b}\left|\frac{(a_1-k_s)k_s-a_2}{b}\right|, \tag{10}$$

$$k_s<a_{1\,\min}\,. \tag{11}$$

Аналогично доказывается, что второе неравенство системы (7) также выполняется при значениях k_u и k_s, удовлетворяющих соотношениям (10), (11), поэтому их можно рассматривать как условия существования режима переключений, записанные относительно параметров системы управления.

Очевидно, что изображающая точка из любого начального положения обязательно попадет в область $-\Delta s\leq s\leq\Delta s$, если выполняется условие попадания этой точки на прямую $s=0.$ Как известно [2], для этого необходимо и достаточно, чтобы характеристическое уравнение линейной структуры, реализуемой в СПС при условии $\mathrm{sign}(s)g(s)=1$, не имело положительных действительных корней. Таким образом, приведенная формулировка представляет собой условие гарантированного возникновения в системе (4)–(6) режима переключений при любых начальных условиях (любом начальном положении изображающей точки на фазовой плоскости).

3. Робастность системы с переменной структурой и неидеальностью переключающего устройства. Согласно уравнению (6) характер движения СПС в режиме переключений определяется не только коэффициентами закона управления (4), (5), но и параметрами ОУ, поэтому в данном случае вопрос о сохранении свойства робастности относительно изменений этих параметров, присущего СПС с идеальным скольжением, требует специального исследования.

Пусть ошибка e системы (4)–(6), работающей в режиме переключений, и ее производная $\dot{e}$ в некоторый произвольный момент времени t_a имеют следующие значения: $e(t_a)=e_a$, $\dot{e}(t_a)=e'_a$, где e_a, e'_a – константы, задающие положение изображающей точки на фазовой плоскости при $t=t_a$.

Будем полагать, что эти константы удовлетворяют неравенствам

$$|e_a|>\varepsilon \quad \text{и} \quad -k_s e_a-\Delta s\le e'_a\le -k_s e_a+\Delta s.$$

Пусть также заведомо выполняются определенные выше условия существования (7) режима переключений для любых значений параметров объекта управления (1) из заданных диапазонов.

Тогда в момент времени t_a изображающая точка будет находиться внутри или на границе зоны переключения (вне ε-окрестности начала координат), и при любом $t>t_a$ она гарантированно не покинет эту зону, т. е. система будет двигаться в режиме переключений.

В соответствии с определением данного режима $(-\Delta s\le s\le \Delta s)$ и формулой (4) для функции $s(t)$ в любой момент времени $t\ge t_a$ ошибка системы $e(t)$ и ее производная $\dot{e}(t)$ независимо от текущего значения s удовлетворяют неравенству

$$-k_s e(t)-\Delta s\le \dot{e}(t)\le -k_s e(t)+\Delta s. \tag{12}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $e^*(t)$, являющуюся решением уравнения $s=0$ идеального скольжения (при $\Delta s=0$) и поэтому зависящую только от величины коэффициента k_s.

Значение $e^*(t_a)=e^*_a$ функции $e^*(t)$ в момент времени t_a определим из условия $e^*_a=e_a$. Тогда для этой функции нетрудно получить выражение

$$e^*(t)=e_a\exp(-k_s(t-t_a)). \tag{13}$$

Отметим, что производная $\dot{e}^*(t)$ функции $e^*(t)$ в соответствии с уравнением идеального скольжения имеет вид

$$\dot{e}^*(t)=-k_s e^*(t). \tag{14}$$

Сформулируем и докажем важное свойство системы с переменной структурой, работающей в режиме переключений: при движении изображающей точки системы (4)–(6) в зоне $-\Delta s\le s\le\Delta s$ фазовой плоскости в любой момент времени $t\ge t_a$ выполняется неравенство $\left|e(t)-e^*(t)\right|\le \Delta s/k_s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сформируем функцию $f(t)=e(t)-e^*(t)$, задающую в момент времени t отклонение текущего значения ошибки $e(t)$ в процессе реального движения системы (в режиме переключений) от значения ошибки $e^*(t)$, соответствующего процессу идеального скольжения и определяемого выражением (13). Поскольку $e(t)$ и $e^*(t)$ – реальные физические величины (координаты), характеризующие процесс управления, то функция $f(t)$ непрерывна при $t\in[t_a;\infty)$.

Докажем, что при любом $t\ge t_a$ выполняется

$$-\Delta s/k_s\le f(t)\le \Delta s/k_s. \tag{15}$$

Предварительно выведем вспомогательное неравенство, связывающее $f(t)$ и $\dot{f}(t)$. Для этого вычтем $\dot{e}^*(t)$ из всех частей неравенства (12) и с учетом выражения (14) получим

$$-k_s(e(t)-e^*(t))-\Delta s \le \dot{e}(t)-\dot{e}^*(t) \le -k_s(e(t)-e^*(t))+\Delta s. \qquad (16)$$

Используя приведенное выше определение функции $f(t)$, а также выражение для ее производной $\dot{f}(t)=\dot{e}(t)-\dot{e}^*(t)$, перепишем соотношение (16) в следующем виде:

$$-k_s f(t)-\Delta s \le \dot{f}(t) \le -k_s f(t)+\Delta s. \qquad (17)$$

Таким образом, при движении системы в режиме переключений $f(t)$ и $\dot{f}(t)$ гарантированно удовлетворяют неравенству (17).

Предположим, что существует такое значение $t_k > t_a$, при котором $f(t_k) > \Delta s/k_s$. Поскольку $f(t_a)=0<\Delta s/k_s$ (т. е. $f(t_a)\ne f(t_k)$ и $f(t_a)< <\Delta s/k_s < f(t_k)$), то по свойству непрерывной функции найдется хотя бы одно значение $t_m \in (t_a;\, t_k)$, при котором $f(t_m)=\Delta s/k_s$. В случае, если таких значений несколько, под t_m будем понимать наибольшее из них. Тогда $f(t)\ne \Delta s/k_s$ при $t\in(t_m;\, t_k]$.

С учетом свойств непрерывной функции нетрудно показать, что $f(t)> >\Delta s/k_s$ при $t\in(t_m;\, t_k]$. Действительно, из неравенства $f(t)\ne\Delta s/k_s$ следует, что $f(t)-\Delta s/k_s \ne 0$ при $t\in(t_m;\, t_k]$. Кроме того, $f(t_k)-\Delta s/k_s>0$ (так как $f(t_k)>\Delta s/k_s$). Значит, $f(t)-\Delta s/k_s>0$ и $f(t)>\Delta s/k_s$ при $t\in(t_m;\, t_k]$.

Поскольку $f(t)$ непрерывна на отрезке $[t_m;\, t_k]$, по теореме о среднем Лагранжа найдется значение $t_n\in(t_m;\, t_k)$, при котором выполняется следующее равенство:

$$\dot{f}(t_n)=\frac{f(t_k)-f(t_m)}{t_k-t_m}. \qquad (18)$$

Так как $f(t_k)>f(t_m)$ и $t_k>t_m$, то согласно выражению (18) получим

$$\dot{f}(t_n)>0. \qquad (19)$$

Как было показано выше, имеет место неравенство $f(t_n)>\Delta s/k_s$. Но в этом случае $-k_s f(t_n)+\Delta s<0$ и, в силу неравенства (17), $\dot{f}(t_n)<0$, что противоречит соотношению (19). Следовательно, исходное предположение неверно, т. е. условие $f(t)\le\Delta s/k_s$ выполняется при любом $t\ge t_a$.

Аналогично доказывается, что $f(t)\ge-\Delta s/k_s$ при любом $t\ge t_a$. Значит, неравенство (15) справедливо при указанных значениях t, а из него непосредственно следует соотношение, определяющее возможное наибольшее отклонение текущего значения ошибки $e(t)$ в процессе реального движения системы в режиме переключений от значения ошибки $e^*(t)$, соответствующего процессу идеального скольжения:

$$\left|e(t)-e^*(t)\right| \le \Delta s/k_s. \qquad (20)$$

Важно отметить, что это наибольшее отклонение $\Delta s/k_s$ и сама функция $e^*(t)$ не зависят ни от значений параметров объекта управления, ни от конкретного вида фазовых траекторий системы внутри области переключения, а определяются только величинами постоянных коэффициентов Δs и k_s управляющего устройства, которые выбираются на этапе проектирования системы исходя из требований к качеству управления. Поэтому сформулированное свойство может служить по сути новой интерпретацией понятия робастности системы с переменной структурой в условиях наличия неидеальности переключающего устройства, т. е. робастности СПС в режиме переключений.

Покажем теперь, что для устойчивости системы в режиме переключений достаточно выполнения условия $k_s > 0$.

Действительно, в этом случае при $t \to \infty$ в соответствии с выражением (13) $e^*(t)$ асимптотически стремится к нулю ($e^*(t) \to 0$). Следовательно, для любой сколь угодно малой константы $\delta > 0$ найдется такое значение $t_1 > 0$, что при любом $t \geq t_1$ выполняется неравенство $\left|e^*(t)\right| \leq \delta$.

Выберем $t_1 \geq t_a$. Тогда неравенство (20) также справедливо при любом $t \geq t_1$. Складывая указанные неравенства одного знака, получим

$$\left|e(t) - e^*(t)\right| + \left|e^*(t)\right| \leq \Delta s/k_s + \delta.$$

Используя известные соотношения для абсолютных величин, преобразуем последнее неравенство к следующему виду:

$$\left|e(t)\right| \leq \Delta s/k_s + \delta. \tag{21}$$

Таким образом, при $k_s > 0$ для заданного $\varepsilon = \Delta s/k_s + \delta$ найдется такое значение $t_1 > 0$, что при любом $t \geq t_1$ выполняется неравенство $\left|e(t)\right| \leq \varepsilon$, а, значит, система в целом является устойчивой. Иными словами, если изображающая точка находится в зоне переключения, то с течением времени она обязательно попадет в ε-окрестность начала координат и в дальнейшем уже не покинет эту окрестность.

4. Определение амплитуды установившихся колебаний. Как было показано выше, при выполнении условий существования и устойчивости режима переключений изображающая точка в процессе движения внутри зоны, определяемой неравенством $-\Delta s \leq s \leq \Delta s$, неизбежно попадает в некоторую ε-окрестность начала координат фазовой плоскости, в которой монотонный характер изменения ошибки системы $e(t)$ может нарушаться вследствие появления дополнительных переключений на прямой $e = 0$ и попадания изображающей точки на участки фазовых траекторий, удаляющиеся от положения равновесия системы.

В указанной ε-окрестности фазовый портрет системы содержит предельный цикл, которому соответствуют установившиеся колебания вокруг положения равновесия с некоторой амплитудой $e_{\max}$ и конечной частотой ω. Аналитическое определение этих величин является затруднительным, однако очевидно, что их точные значения зависят как от параметров ОУ, так и от коэффициентов закона переключения Δs и k_s.

В то время как указанные участки ограничены прямыми переключения $s = \Delta s$ и $s = -\Delta s$, для предельного цикла согласно (20) величина $\left| e(t) - e^*(t) \right|$ не может превышать значения $\Delta s / k_s$. Учитывая, что при $t \to \infty$ справедливо неравенство (21), получим ограничение на амплитуду установившихся колебаний системы:

$$e_{\max} \leq \Delta s / k_s + \delta.$$

Как следует из этого неравенства, чем меньше Δs и больше k_s, тем меньше амплитуда колебаний при фиксированных параметрах ОУ. Данную зависимость можно использовать для уменьшения влияния установившихся колебаний на качество процессов управления в СПС.

Заключение. В результате проведенного исследования выявлены особенности процессов в СПС с неидеальностью переключающего устройства при ее движении в режиме переключений. Дано строгое определение этого режима, получены условия его существования (в том числе в виде неравенств для выбора коэффициентов управляющего устройства), устойчивости, а также условие попадания изображающей точки в область переключений. Сформулировано и доказано свойство робастности СПС при ее функционировании в режиме переключений, и получена предельная оценка точности работы системы по сравнению с идеальным режимом скольжения. Определен способ уменьшения амплитуды установившихся колебаний системы около положения равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Уткин В. И.** Системы с переменной структурой: состояние, проблемы и перспективы // АиТ. 1983. № 9. С. 5.
2. **Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А. и др.** Теория систем с переменной структурой /Под ред. С. В. Емельянова. М.: Наука, 1970.
3. **Уткин В. И.** Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
4. **Slotine J.-J. E.** Sliding controller design for nonlinear systems // Intern. Journ. Contr. 1984. **40**, N 2. P. 24.
5. **Дыда А. А., Лебедев А. В., Филаретов В. Ф.** Синтез системы с переменной структурой для управления движением подводного робота // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 155.

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
E-mail: avlebedev@mail.primorye.ru

Поступила в редакцию
20 сентября 2005 г.