РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2006, том 42, № 1

УДК 519.233.3

Д. В. Кашковский
(Томск)

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА КЛАССИФИКАЦИИ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

Предлагается последовательная процедура с гарантированной вероятностью правильного решения для классификации устойчивых процессов авторегрессии со случайными коэффициентами и гауссовскими шумами. Получены нижняя граница для вероятности правильной классификации и асимптотическая формула для средней длительности процедуры. Доказана асимптотическая нормальность статистик, с помощью которых проводится классификация. Приводятся результаты численного моделирования.

Введение. В прикладных задачах, связанных с обработкой сигналов, спектральным анализом и прогнозированием, находят широкое применение динамические модели, описываемые стохастическими разностными уравнениями типа авторегрессии. Наиболее полно теория классификации динамических моделей разработана для линейных моделей, когда параметры постоянны и шумы независимы. Однако неизвестные параметры сами могут быть случайными процессами и оставаться постоянными только в среднем. Это приводит к изменению свойств наблюдаемого процесса и существенно усложняет изучение процедуры классификации.

Пусть относительно наблюдаемого процесса $\{x_k\}$ имеется s различных статистических гипотез $H_1, \ldots, H_s$, одна из которых истинна. Согласно гипотезе H_i процесс $\{x_k\}$ является процессом авторегрессии со случайными коэффициентами

$$x_k = (\theta_1^i + \sigma_1^i \eta_1(k)) x_{k-1} + \ldots + (\theta_q^i + \sigma_q^i \eta_q(k)) x_{k-q} + \xi_k, \ k = 1, 2, \ldots, \ i = \overline{1, s}, \tag{1}$$

где $\{\xi_k\}_{k \ge 1} = \{\eta_1(k)\}_{k \ge 1}, \ldots, \{\eta_q(k)\}_{k \ge 1}$ – независимые последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин. Вектор начальных значений $X_0 = (x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-q+1})'$ с $\mathbf{E}_\theta \|X_0\|^2 < +\infty$ не зависит от после-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00855).

довательностей $\{\xi_k\}, \{\eta_i(k)\}, 1 \le i \le q$; штрих означает транспонирование. Предполагается, что каждой гипотезе H_i отвечают свои векторы параметров $\theta^i = (\theta_1^i, \dots, \theta_q^i)$ и $\sigma^i = (\sigma_1^i, \dots, \sigma_q^i)$, и они различаются, как минимум, по одной координате. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям процесса x_k построить процедуру классификации с заданной вероятностью правильного решения.

Учитывая гауссовость шумов, модель (1) допускает следующее эквивалентное представление в виде процесса авторегрессии с ARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity – авторегрессионная условная гетероскедастичность) шумами:

$$x_k = \theta_1^i x_{k-1} + \dots + \theta_q^i x_{k-q} +$$

$$+ \sqrt{1 + {\sigma_1^i}^2 x_{k-1}^2 + \dots + {\sigma_q^i}^2 x_{k-q}^2}\, \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, s}, \tag{2}$$

где $(\varepsilon_k)_{k \ge 1}$ – последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин. Уравнение (2) для процесса авторегрессии со случайными коэффициентами (1) следует из того факта, что дробь

$$\frac{\sigma_1 \eta_1(n) x_{n-1} + \dots + \sigma_q \eta_q(n) x_{n-q} + \xi_n}{\sqrt{1 + \sigma_1^2 x_{n-1}^2 + \dots + \sigma_q^2 x_{n-q}^2}}$$

при условиях, наложенных на шумы $\eta_i(n)$ и ξ_n, имеет стандартное нормальное распределение и не зависит от $x_{n-1}, \dots, x_{n-q}$ [1, гл. 2, § 13].

Отметим, что модели типа (1), (2) широко используются в задачах управления, при анализе радиоактивного распада, изучении эволюции популяций, анализе экономических данных и финансовых временных рядов [2].

При фиксированной длительности наблюдений, стремящейся к бесконечности, свойства процедуры классификации исследовать не удается. В неасимптотической же постановке, когда объем выборки конечен, задача классификации процессов (1), (2) не изучена.

Цель данной работы – построить последовательную процедуру классификации процессов (1), получить нижнюю границу для вероятности правильной классфикации и изучить асимптотические свойства процедуры.

Задача построения последовательных процедур классификации для авторегрессии, авторегрессии–скользящего среднего и более общих динамических моделей исследована в работах [3–6]. Для модели (1) далее предлагается одноэтапная последовательная процедура классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами.

Процедура классификации. Для решения поставленной задачи классификации за основу возьмем последовательный критерий, предложенный в [4]. Введем статистики

$$\varphi_{ij}(h) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\tau_{ij}(h)} \alpha_{ij}^{(k)}(h) W_{ij}(k-1)(x_k - A_j(k-1)), \tag{3}$$

где

$$A_i(k) = \theta_1^i x_k + \ldots + \theta_q^i x_{k-q+1};$$

$$W_{ij}(k) = (A_i(k) - A_j(k))\,B_j(k)^{-1}\,L_k^{-1};$$

$$B_i(k) = \sqrt{1 + \sigma_1^{i\,2} x_k^2 + \ldots + \sigma_q^{i\,2} x_{k-q+1}^2};$$

$$L_k = \sqrt{1 + a_1 x_k^2 + \ldots + a_q x_{k-q+1}^2};$$

$$\alpha_{ij}^{(k)}(h) = \begin{cases} 1, & \text{если } k < \tau_{ij}(h); \\ \overline{\alpha}_{ij}(h), & \text{если } k = \tau_{ij}(h). \end{cases}$$

Здесь $a_i > 0$ – заданные константы; $\tau_{ij}(h)$ – моменты остановки, определяемые по формулам

$$\tau_{ij}(h) = \inf\left\{ m \geq 1 \colon \sum_{k=1}^{m} W_{ij}^2(k-1) B_j^2(k-1) \geq h \right\}; \tag{4}$$

$\overline{\alpha}_{ij}(h)$ находятся из уравнений

$$\sum_{k=1}^{\tau_{ij}(h)} W_{ij}^2(k-1) B_j^2(k-1) + \overline{\alpha}_{ij}(h) W_{ij}^2(\tau_{ij}(h)-1) B_j^2(\tau_{ij}(h)-1) = h.$$

По системе статистик $\varphi_{ij}(h)$ выносится решение d_l об истинности гипотезы H_l, если для всех $i \neq l$ выполняются неравенства $\varphi_{il}(h) < 1/2$. В случае, когда указанное условие не выполняется ни для одной из гипотез, принимается решение о продолжении наблюдений. Общее число наблюдений составляет

$$\tau(h) = \max_{i \neq j} \tau_{ij}(h). \tag{5}$$

Свойства процедуры классификации. Для решения задачи классификации нам потребуется уравнение (1) в векторном виде:

$$X_k = C_k^{(i)} X_{k-1} + \zeta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $X_k = (x_k, \ldots, x_{k-q+1})'$; $\zeta_k = (\xi_k, 0, \ldots, 0)'$; $C_k^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(j)}(k) & \cdots & \alpha_q^{(j)}(k) \\ I_{q-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$;

I_{q-1} – единичная матрица порядка $q-1$; $\alpha_i^{(j)}(k) = \theta_i^j + \sigma_i^j \eta_i(k)$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq s$.

Заметим, что матрицы $C_k^{(i)}$ одинаково распределены. При изучении свойств процедуры классификации будем предполагать, что на матрицы $C_1^{(i)}$ наложены следующие условия.

А. Собственные значения матриц $EC_1^{(i)} \otimes C_1^{(i)}$ по модулю не превосходят единицы. Символ «$\otimes$» означает кронекерово произведение матриц.

Б. Для каждого $i=\overline{1,s}$ найдется такая положительно-определенная матрица M, что при некотором $\lambda<1$ матрица $\lambda M - EC_1^{(i)\prime} M C_1^{(i)}$ также положительно определена.

Выразим X_k через X_0, ζ_k и матрицы $C_k^{(i)}$:

$$X_k = C_k^{(i)} \cdots C_1^{(i)} X_0 + \sum_{s=0}^{k-2} C_k^{(i)} \cdots C_{k-s}^{(i)} \zeta_{k-s-1} + \zeta_k, \quad k=1,2,\ldots. \tag{7}$$

Условие А является достаточным условием устойчивости процесса $(x_k)_{k\ge 1}$. Действительно, из него следует, что норма произведения матриц $C_k^{(i)}$ [7] геометрически убывает в среднеквадратическом смысле, т. е. найдутся такие константы $b_i>0,\ 0<\rho_i<1,$ что

$$E\left\| C_k^{(i)} \cdots C_1^{(i)} \right\|^2 \le b_i^2 \rho_i^{2k}, \quad k=1,2,\ldots. \tag{8}$$

Согласно [8, гл. 2] процесс X_n является однородным марковским. Можно показать [8, 9], что при условии А существует единственное стационарное распределение процесса (6). Пусть π – единственная мера, соответствующая стационарному распределению этого процесса. Обозначим через $\widetilde{X}_n$ процесс (6) с начальным распределением, соответствующим π. Причем величины X_0 и $\widetilde{X}_0$ будем считать независимыми. Пусть

$$M_n^{(ij)} = \sum_{k=1}^{n} W_{ij}^2(k-1) B_j^2(k-1) = \sum_{k=1}^{n} (A_i(k-1) - A_j(k-1))^2 L_{k-1}^{-2}. \tag{9}$$

Лемма 1. При условиях А, Б ряды

$$\sum_{n\ge 1} P_l\left(\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_{k-1}' L_{k-1}^{-2} - U \right\| \ge \eta \right);$$
$$\sum_{n\ge 1} P_l\left(\left| \frac{M_n^{(ij)}}{n} - f_{ij}^{(l)} \right| \ge \eta \right) \tag{10}$$

сходятся. Здесь

$$U = E_l \frac{\widetilde{X}_0 \widetilde{X}_0'}{1+\widetilde{X}_0' D \widetilde{X}_0};$$

$f_{ij}^{(l)} = (\theta^i - \theta^j)' U (\theta^i - \theta^j)$; D – диагональная матрица с элементами a_i на главной диагонали; матрица U положительно определена; E_l соответствует распределению процесса при условии, что справедлива гипотеза H_l.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно показать [8–10], что при условиях А, Б стационарный процесс (6) удовлетворяет условию сильного перемешивания с геометрической скоростью сходимости к нулю коэффициента сильного перемешивания. Обозначим $Z_n = X_n L_n^{-1}, \widetilde{Z}_n = \widetilde{X}_n \Big/ \sqrt{1+\widetilde{X}_n' D \widetilde{X}_n}$. При тех же условиях из (7), (8) получим

$$E_l \left\| Z_k - \widetilde{Z}_k \right\| \left\| Z_l - \widetilde{Z}_l \right\| < B \rho^k \rho^l \tag{11}$$

для некоторых $0 < \rho < 1$ и $B > 0$. Далее, используя (11) и теорему о монотонной сходимости [1], имеем

$$E_l \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| Z_k Z_k' - \widetilde{Z}_k \widetilde{Z}_k' \right\| \right)^2 < +\infty; \tag{12}$$

$$E_l \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| t' Z_k Z_k' t - t' \widetilde{Z}_k \widetilde{Z}_k' t \right| \right)^2 < +\infty,$$

где $t = \theta^i - \theta^j$. С помощью (12), неравенства Чебышева и леммы о верхней границе четвертого момента суммы членов стационарной последовательности с перемешиванием (леммы 4.1 из [11]) можно показать сходимость рядов из (10). Положительная определенность U доказывается, как в [12], с использованием (7). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При условиях А, Б и истинности гипотезы H_l

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_{k-1}' L_{k-1}^{-2} = U \text{ п. н.};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n^{(ij)}}{n} = f_{ij}^{(l)} \text{ п. н.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью леммы 1 и следствия из леммы Бореля – Кантелли [1] получим требуемое.

Теорема 1. При условиях А, Б и истинности гипотезы H_l для всех $h > 0$ процедура классификации (3)–(5) обладает свойствами:

1) $\tau(h) < \infty$ п. н.;

2) вероятность правильной классификации $P_l(d_l)$ удовлетворяет неравенству

$$P_l(d_l) \geq 1 - \frac{4(s-1)}{h+4},$$

где P_l обозначает распределение процесса при условии, что справедлива гипотеза H_l.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для справедливости утверждения 1 теоремы согласно (4), (5), (9) достаточно показать, что для всех $i \neq j$ $\lim\limits_{n \to \infty} M_n^{(ij)} = \infty$ п. н. Эти соотношения следуют из леммы 2.

Докажем утверждение 2:

$$P_l(d_l) = P_l(\varphi_{il} < 1/2 \ \text{для всех} \ i \neq l) \geq 1 - \sum_{i \neq l} P_l(\varphi_{il} \geq 1/2).$$

Кроме того, можно показать, что

$$P_l(\varphi_{il} \geq 1/2) \leq \frac{4}{h+4}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. При условиях теоремы 1

$$\lim_{h \to \infty} E_l \frac{\tau(h)}{h} = \frac{1}{f^{(l)}},$$

где $f^{(l)} = \min\limits_{i \neq j} f_{ij}^{(l)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что

$$\sup_{h > 0} E_l \frac{\tau(h)}{h} < \infty. \tag{13}$$

Обозначим $M_n = \min\limits_{i \neq j} M_n^{(ij)}$. Согласно (4), (5), (9) имеем

$$E_l \tau(h) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} I_{\{n\delta < h\}} + \sum_{n \geq [h/\delta]} P_l\left(\left|\frac{M_n}{n} - f^{(l)}\right| \geq \eta\right),$$

где I_A – индикатор множества A; $[x]$ – целая часть x; $\eta > 0$ – некоторая константа. Сходимость последнего ряда следует из леммы 1. Соотношение (13) доказано. Пусть $\tau(h)$ соответствует остановке в момент, когда $M_{\tau(h)}^{(i_h, j_h)} \geq h$. Обозначим

$$\widetilde{M}_{\tau(h)} = M_{\tau(h)-1}^{(i_h, j_h)} + \overline{\alpha}_{i_h j_h}(h) W_{i_h j_h}^2 (\tau(h) - 1) B_{j_h}^2 (\tau(h) - 1) = h.$$

Тогда для каждого $\Delta > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$\left| E_l \frac{\tau(h)}{h} - f^{(l)-1} \right| = \left| E_l \left(\frac{\widetilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)}\right)^{-1} - f^{(l)-1} \right| \leq \Delta + E_l \frac{\tau(h)}{h} I_{\left\{\left|\frac{\widetilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)} - f^{(l)}\right| \geq \eta\right\}} +$$

$$+f^{(l)-1}P_l\left(\left|\frac{\widetilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)}-f^{(l)}\right|\geq\eta\right).$$

С помощью леммы 1 нетрудно показать, что

$$\lim_{h\to\infty}E_l\,\frac{\tau(h)}{h}I_{\left\{\left|\frac{\widetilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)}-f^{(l)}\right|\geq\eta\right\}}=0;$$

$$\lim_{h\to\infty}P_l\left(\left|\frac{\widetilde{M}_{\tau(h)}}{\tau(h)}-f^{(l)}\right|\geq\eta\right)=0.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. При условиях теоремы 1 вектор статистик

$$\sqrt{h}\Phi_l(h)=\sqrt{h}(\varphi_{1l}(h),\ldots,\varphi_{l-1l}(h),\varphi_{l+1l}(h),\ldots,\varphi_{sl}(h))'$$

является асимптотически нормальным (при $h\to\infty$) с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $T(l)$ с элементами

$$t_{ij}(l)=(\theta^i-\theta^l)'E\,\frac{\widetilde{X}_0\widetilde{X}_0'}{1+\widetilde{X}_0'D\widetilde{X}_0}(\theta^j-\theta^l)\min(f_{il}^{(l)-1},\ f_{jl}^{(l)-1}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим статистику $\sqrt{h}\Phi_l(h)$ в виде

$$\sqrt{h}\Phi_l(h)=\Psi_l(h)+R_l(h). \tag{14}$$

Здесь $\psi_{il}(h)=\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{k=1}^{[f_{il}^{(l)-1}h]}y_{k-1}^{(il)}\varepsilon_k$ – i-е координаты вектора $\Psi_l(h)$; $y_k^{(il)}=$ $=(A_i(k)-A_l(k))L_k^{-1}$. В силу (14) для справедливости утверждения теоремы достаточно показать, что

а) $\Psi_l(h)$ сходится по распределению к $N(0,T(l))$ при $h\to\infty$;

б) $R_l(h)$ сходится по вероятности к 0 при $h\to\infty$.

Установим свойство «а». Рассмотрим линейную комбинацию

$$\Psi_l(h,\lambda)=\lambda'\,\Psi_l(h)=\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{k=1}^{[\underline{f}^{(l)-1}h]}\sum_{i\neq l}\lambda_i y_{k-1}^{(il)}I_{\{k\leq[f_{il}^{(l)-1}h]\}}\varepsilon_k,$$

где λ – некоторый вектор из евклидова пространства размерности $s-1$; $\underline{f}^{(l)}=$ $=\min_{i\neq l}f_{il}^{(l)}$. С помощью теоремы (см. [1], § 8) нетрудно показать, что статистика $\Psi_l(h,\lambda)$ имеет асимптотически нормальное распределение.

Пусть при каждом $n\geq1$ последовательность $\xi^n=(\xi_{nk},\mathcal{F}_k^n)$, $1\leq k\leq n$, является последовательностью квадратично-интегрируемых мартингалразностей (т. е. $E(\xi_{nk} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{n})=0,\ E\xi_{nk}^{2}<\infty$), удовлетворяющей следующим условиям:

1) для $\delta>0$ $\sum_{k=1}^{n} E(\xi_{nk}^{2} I_{\{|\xi_{nk}|\geq\delta\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{n}) \xrightarrow{P} 0,\ n\to\infty;$

2) $\sum_{k=1}^{n} E(\xi_{nk}^{2} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{n}) \xrightarrow{P} \sigma^{2},\ n\to\infty.$

Тогда при $n\to\infty$ $\sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}$ сходится по распределению к $N(0,\sigma^{2})$.

Таким образом, согласно критерию Крамера – Уолда свойство «а» доказано. Свойство «б» можно доказать, используя лемму 2. Теорема 3 доказана.

Численный пример. Для изучения свойств предложенной процедуры классификации моделировался процесс авторегрессии со случайными коэффициентами второго порядка вида

$$x_n=(0{,}5+0{,}4\eta_1(n))x_{n-1}+(0{,}4+0{,}3\eta_2(n))x_{n-2}+\xi_n,$$

где $\eta_i(n)$, ξ_n – независимые стандартные гауссовские величины с параметрами (0, 1); $x_0=x_{-1}=0.$ Относительно наблюдаемого процесса выдвигались две альтернативные гипотезы H_1, H_2. Соответствующие наборы параметров θ_i^1, θ_i^2 приведены в табл. 1, 2. При этом предполагалось, что коэффициенты

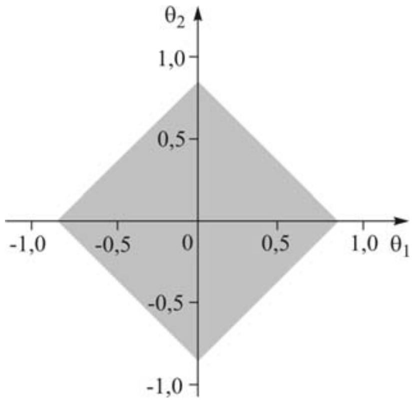
Таблица 1

θ_1^1	θ_2^1	θ_1^2	θ_2^2	P_*	h	φ_{12}	φ_{21}	$\tau(h)$
0,5	0,4	-0,5	-0,4	0,90	36	2,2975	-0,0825	38
0,5	0,4	-0,5	-0,4	0,95	76	2,5563	-0,1268	66
0,5	0,4	0,1	0,1	0,90	36	2,2248	-0,0451	264
0,5	0,4	0,1	0,1	0,95	76	1,9238	0,1452	624
0,5	0,4	0,4	0,3	0,90	36	2,3621	-0,2103	3115
0,5	0,4	0,4	0,3	0,95	76	2,2351	-0,1005	6729

Таблица 2

θ_1^1	θ_2^1	θ_1^2	θ_2^2	P_*	h	$\bar{\tau}(h)$	$h/f^{(l)}$	N
0,5	0,4	-0,5	-0,4	0,90	36	45,75	48,89	3
0,5	0,4	-0,5	-0,4	0,95	76	90,03	103,22	0
0,5	0,4	0,1	0,1	0,90	36	268,99	321,24	2
0,5	0,4	0,1	0,1	0,95	76	562,31	678,17	0
0,5	0,4	0,4	0,3	0,90	36	3264,82	4024,00	1
0,5	0,4	0,4	0,3	0,95	76	6880,32	8495,00	0

дисперсии оставались постоянными: $\sigma_1 = 0{,}4$, $\sigma_2 = 0{,}3$; заданные константы $a_i = 1$.



Рассмотрим, какие ограничения на параметры θ_1, θ_2 накладывают условия А и Б. Условие А требует, чтобы собственные значения матрицы $EC_1 \otimes \otimes C_1$ были по модулю меньше 1. Одно из собственных значений равно $-\theta_2$, откуда следует, что $|\theta_2| < 1$. Для θ_1, используя теорему Виета, имеем $\theta_1^2 < < 6 - \sigma_1^2$. Эти ограничения позволяют локализовать искомую область.

Согласно условию Б матрицы M и $\lambda M - EC_1' MC_1$ должны быть положительно-определенными. Ищем матрицу M в диагональном виде с положительными элементами диагонали

$$M = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие Б преобразуется в систему неравенств, решение которой относительно параметров θ_1, θ_2 при фиксированных $\sigma_1 = 0{,}4$, $\sigma_2 = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}99$ представлено серой областью на рисунке. Для этой области выполняется условие А и справедливы теоремы 1, 2 и 3.

Чтобы вычислить теоретическое значение среднего числа наблюдений, потребуется

Предложение. Матрица $\mathbf{E}_\theta X_k X_k' L_k^{-2}$ приближается к U с геометрической скоростью при $k \to \infty$.

Доказательство предложения следует из (11).

Учитывая последнее предложение для вычисления $f_{ij}^{(l)}$, в качестве приближения для U может быть использована величина $E_l X_k X_k' L_k^{-2}$, которая находится численным интегрированием путем вычисления кратного интеграла при небольших значениях k $(k = 4)$.

Результаты расчетов содержатся в табл. 1. Здесь P_* – нижняя граница для вероятности правильной классификации при заданном пороге h; φ_{12}, φ_{21} – значения решающих статистик; $\tau(h)$ – длительность процедуры классификации. Из таблицы видно, что с ростом вероятности правильной классификации и уменьшением различия между гипотезами время классификации возрастает.

В табл. 2 приводятся для сравнения оценки среднего числа наблюдений $\bar{\tau}(h)$, вычисленные по 1000 реализациям процесса, и теоретические значения среднего числа наблюдений $h / f^{(l)}$, где $f^{(l)}$ определяется из теоремы 2, а N – число ошибок при классификации. Данные этой таблицы подтверждают справедливость асимптотических формул для средней длительности процедуры. Более того, из табл. 2 и теоремы 3 видно, что оценка P_* является зани-

Таблица 3

Параметры процесса	$\theta_1^2 = -0{,}5,\ \theta_2^2 = -0{,}4$	$\theta_1^2 = 0{,}1,\ \theta_2^2 = 0{,}1$	$\theta_1^2 = 0{,}4,\ \theta_2^2 = 0{,}3$
$\sigma_1 = 0{,}2,\ \sigma_2 = 0{,}1$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 4$
$\sigma_1 = 0{,}4,\ \sigma_2 = 0{,}3$	$N = 9$	$N = 27$	$N = 148$
$\sigma_1 = 0{,}5,\ \sigma_2 = 0{,}4$	$N = 14$	$N = 67$	$N = 331$

женной. Согласно теореме 3 для вероятности правильной классификации справедлива приближенная асимптотическая формула (для больших h)

$$P_l(d_l) = P_l(\varphi_{21}(h) < 1/2) = \Phi\left(\frac{\sqrt{h}}{2}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Рассмотрим, как ведет себя алгоритм последовательной классификации для классической авторегрессии [4] на данных для авторегрессии со случайными коэффициентами (модель типа (1)). Результаты для оценки вероятности ошибочной классификации $P_e = 0{,}1$ по 1000 реализациям процесса при $\theta_1^1 = 0{,}5, \theta_2^1 = 0{,}4$ представлены в табл. 3. Из таблицы видно, что с ростом дисперсий шумов σ_i происходит существенный рост числа ошибок при классификации N вплоть до превышения теоретического порога $P_e = 0{,}1$, т. е. классический алгоритм перестает работать. Таким образом, модели типа (1), в отличие от классических моделей авторегрессии, учитывают зашумленность коэффициентов, которая может быть в действительности.

Заключение. В работе рассмотрена задача последовательной классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами. Моменты прекращения наблюдений в предложенной последовательной процедуре классификации зависят от заданной вероятности правильной классификации. Исследованы асимптотические свойства процедуры. Приведены результаты сравнения оценок вероятностей ошибочной классификации с известным алгоритмом для авторегрессии на одних и тех же данных.

Автор выражает благодарность профессору В. В. Коневу за полезные замечания и рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ширяев А. Н.** Вероятность. М.: Наука, 1989.
2. **Engle R. F.** Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation // Econometrica. 1982. **50**, N 4. P. 987.
3. **Дмитриенко А. А., Конев В. В.** О последовательной классификации процессов авторегрессии с неизвестной дисперсией помех // Проблемы передачи информации. 1995. **31**, вып. 4. С. 51.
4. **Конев В. В.** Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985.
5. **Конева Е. С.** Последовательная классификация стохастических процессов при зависимых помехах // АиТ. 1986. № 2. С. 80.

6. **Шаповалов Д. В.** Последовательная процедура классификации процессов авторегрессии–скользящего среднего // Автометрия. 2002. **38**, № 5. С. 49.
7. **Klüppelberg C., Pergamenshchikov S.** The tail of the stationary distribution of a random coefficient AR(q) model // Annals of Appl. Probability. 2004. **14**, N 2. P. 971.
8. **Meyn S. P., Tweedie R. L.** Markov Chains and Stochastic Stability. London: Springer-Verlag, 1996.
9. **Feigin P. D., Tweedie R. L.** Random coefficient autoregressive processes: a Markov chain analysis of stationarity and finiteness of moments // Journ. Time Series Analysis. 1985. **6**. P. 1.
10. **Давыдов Ю. А.** Условия перемешивания для цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения. 1973. **18**, вып. 2. С. 321.
11. **Давыдов Ю. А.** О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения. 1968. **13**, вып. 4. С. 730.
12. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.

Томский государственный университет,
E-mail: kshkvch@mail.tomsknet.ru

Поступила в редакцию
8 августа 2005 г.