

Ю. К. Дмитриев*(Новосибирск)***ЗАВИСИМОСТЬ ЖИВУЧЕСТИ
ВЛОЖЕННОЙ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ
ОТ СПОСОБА АДРЕСАЦИИ МОДУЛЕЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ***

Изучается зависимость структурной живучести вложенного диагностического циркулянтного графа от нумерации вершин графа межмодульных связей вычислительной системы, в который осуществляется вложение. Последний представляет собой граф группы прямого произведения циклических подгрупп. Вложение основано на разбиении группы на смежные классы по циклической подгруппе степеней выбранного элемента группы. Установлено, что для предлагаемых способов упорядоченной нумерации на графе группы, названных координатными, по четности порядков циклических подгрупп и четности числа смежных классов можно судить о сравнительной величине используемого показателя структурной живучести диагностического графа. Проведен исчерпывающий анализ координатных нумераций, позволяющий устанавливать предпочтительность одних нумераций другим по значению структурной живучести.

Введение. Кратность отказов на системном уровне для систем с массовым параллелизмом (вычислительных систем (ВС)) зависит от вершинной степени графа, представляющего рабочую межмодульную сеть связи системы (рабочий граф) [1]. Для увеличения диагностических возможностей ВС без роста вершинной степени рабочего графа в [2] предложено реализовать диагностический граф как вложенный в рабочий. Диагностические связи между тестирующим и тестируемым модулями, не являющимися соседними в рабочей структуре, образуются в виде составных каналов, формируемых в рабочей межмодульной сети связи.

В работе [2] рассмотрено вложение диагностического циркулянтного графа, обеспечивающего t -диагностируемость без ремонта [1], в граф прямого произведения циклических групп. Показана зависимость структурных характеристик вложенного диагностического графа от способа нумерации модулей системы. Вложение базируется на разбиении группы на смежные классы по подгруппе, представляющей собой циклическую группу степеней выбранного (порождающего) элемента группы. В работе [3] введены показатели оценки живучести вложенного диагностического графа и изучена их зависимость от выбора порождающего элемента. Условия, при которых струк-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-08-01301а).

турная живучесть вложенного графа не зависит от порядка нумерации вершин смежных классов, найдены в [4]. В предлагаемой работе рассматривается случай, когда структурная живучесть зависит от порядка нумерации элементов классов смежности.

Обозначения и определения. Структура межмодульной сети связи массово-параллельной ВС, используемой для реализации диагностического графа, представлена рабочим графом $G' = (V, E')$, в котором V – множество вершин, сопоставленных с обрабатываемыми модулями системы, а E' – множество ребер, соответствующих межмодульным связям. Рабочий граф есть двумерный тор – диаграмма Кэли группы E_2 прямого произведения нормальных циклических подгрупп C_H и C_W (далее E_2 -граф):

$$E_2 = C_H \otimes C_W.$$

Здесь H и W – порядки циклических подгрупп, \otimes – символ прямого произведения. Число вершин E_2 -графа $N = H \times W = |V|$. Отметками ребер E_2 -графа служат образующие элементы g_0 и g_1 подгрупп C_W и C_H соответственно.

В качестве диагностического графа используется циркулянт $D = (N; s_1, s_2, \dots, s_t)$, где N – число вершин графа; $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_t = t$; t – кратность допустимых системных отказов [1]: $t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$. Вершины циркулянта пронумерованы числами от 0 до $N - 1$, причем i -я вершина ($0 \leq i \leq N - 1$) смежна с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_t \pmod{N}$. В работе [1] установлено, что циркулянт, в котором $s_1 = 1, s_2 = 2, \dots, s_t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$, является оптимальным графом t -диагностируемой без ремонта системы. Оптимальность означает, что число дуг диагностического графа (число тестов над модулями системы) является необходимым и достаточным для однозначной идентификации всех присутствующих в системе неисправных модулей (диагностирование без ремонта).

Вершины вкладываемого диагностического циркулянта [2] соответствуют вершинам рабочего графа, а дуги, сопоставленные с диагностическими связями вида тестирующий–тестируемый, или с тестовыми связями, представляют собой кратчайшие пути между вершинами рабочего графа. Эти пути находят, сопоставляя присвоенные вершинам рабочего графа групповые описания и уникальные номера (абсолютные адреса элементов диагностической структуры); последние принимают значения от 0 до $N - 1$. Используемое в работах [2–4] и в данной работе вложение диагностического графа основано на разбиении группы E_2 на смежные (для определенности правые) классы по подгруппе, состоящей из всех степеней выбранного порождающего элемента $g_0^x g_1^y$ группы, где $0 \leq x \leq \lfloor W/2 \rfloor, 0 \leq y \leq \lfloor H/2 \rfloor$. При этом множество вершин рабочего графа, имеющего структуру $H \times W$, делится на P подмножеств по Q вершин в каждом, называемых кластерами: $PQ = N$. Вершины кластера составляют решетку размером $h \times w = Q, Q \geq 2$; при этом выполняются следующие соотношения: $H = P_H h, W = P_W w$, где P_H и P_W – целые числа и $P = P_H \times P_W$. Кластеры образуют покрытие рабочего графа без просветов и наложений. Они нумеруются числами от 0 до $P - 1$ в порядке увеличения степени порождающего элемента $g_0^x g_1^y$. За начальный принимаем кластер, которому принадлежит вершина, сопоставленная с единичным элементом группы E_2 (с этим элементом соотнесен номер 0). Назовем начальный кластер опорным или 0-кластером, а кластер с номером f – f -кластером.

Выбор порождающего элемента $g_0^x g_1^y$ для структуры, заданной значениями H и W , определяет параметры h, w кластеров и их взаимное расположение. Будем говорить, что четверка (H, W, x, y) задает вложение диагностического графа в рабочий.

Тестовая связь однозначно характеризуется парой концевых вершин неориентированного пути, представляющего эту связь в рабочем графе. Пусть i и j – абсолютные адреса тестирующей и тестируемой вершин ($i, j = \overline{0, (N-1)}$), а $g_0^{x_i} g_1^{y_i}$ и $g_0^{x_j} g_1^{y_j}$ – их групповые описания. Тогда тестовой связи (i, j) соответствует слово $g_0^{(x_j - x_i) \bmod W} g_1^{(y_j - y_i) \bmod H} = g_0^{x_{ij}} g_1^{y_{ij}}$, представляющее собой адрес вершины j относительно вершины i .

О п р е д е л е н и е 1. Описанием тестовой связи (i, j) называем пару чисел $\tilde{w}(i, j) = (|x_{ij}|, |y_{ij}|)$.

Набор описаний всех возможных тестовых связей является первичной информацией для расчета показателей структурной живучести вложенного диагностического графа и называется рядом описаний (RD). Для некоторого подграфа G_1 вложенного диагностического графа соответствующую часть ряда описаний обозначим $RD(G_1)$.

Показатель \mathfrak{R} структурной живучести, введенный в [3], основан на усреднении показателей живучести соединений. Соединение – это совокупность непересекающихся маршрутов, сопоставленных с тестовой связью [5]. Живучесть маршрута, в свою очередь, является некоторой функцией его длины.

Нумерация (абсолютная адресация) вершин рабочего графа для заданного вложения (H, W, x, y) диагностического графа определяется следующими правилами.

1. Присвоим номера $0, 1, \dots, q, \dots, Q-1$ произвольно выбранным вершинам из Q смежных классов. Такие вершины будем называть начальными. Классы смежности получают номера по их начальным вершинам.

2. Обозначим g_q групповое представление начальной вершины q -го класса смежности. Тогда этот класс смежности составляют вершины с групповым описанием $g_q (g_0^x g_1^y)^{kQ}$, $k = \overline{0, (P-1)}$. Вершине с групповым описанием $g_q (g_0^x g_1^y)^{kQ}$ присваиваем номер $kQ + q$.

О п р е д е л е н и е 2. Несмещенной называем нумерацию, при которой начальные вершины всех смежных классов принадлежат опорному кластеру. В противном случае нумерацию называем смещенной.

Данная работа является продолжением изучения несмещенных нумераций [4].

Соответствие вершин кластеров классам смежности зададим матрицей $M = \|m_{ji}\|$, $j = \overline{0, (h-1)}$, $i = \overline{0, (w-1)}$, которую назовем топологической. Она состоит из h строк и w столбцов. Элементы m_{ji} топологической матрицы называем топологическими. Они нумеруются сверху вниз по строкам и слева направо по столбцам. Матрица вида M сопоставлена с каждым кластером.

Элементам топологической матрицы опорного кластера при несмещенной нумерации в общем случае присваиваются произвольные попарно различные значения $]j, i[$ в диапазоне от 0 до $Q-1$.

О п р е д е л е н и е 3. Координатной несмещенной называем нумерацию, когда номера смежных классов возрастают или убывают по строкам и столбцам или по столбцам и строкам матрицы M . Перестановочной называем нумерацию, которая не является координатной.

Совместим вершины рабочего групп-графа с узлами прямоугольной целочисленной решетки. Свяжем с рабочим графом левую прямоугольную декартову систему координат. За направление оси абсцисс (оси ординат) выбираем направление образующей g_0 (g_1).

Условимся, что рабочему графу принадлежат точки, ограниченные осями координат и прямыми, параллельными осям координат, которые проходят через точки $+(W-1)$ и $+(H-1)$. Точки, находящиеся на осях координат и указанных прямых, также принадлежат рабочему графу. Таким образом, элементы циклической подгруппы C_W (C_H) принадлежат оси абсцисс (ординат). Начало координат соответствует левому верхнему элементу опорного кластера.

На рис. 1, *a* показаны вложение $(6, 15, 3, 2)$ и нумерация кластеров для порождающего элемента $g_0^3 g_1^2$; $Q = 6$. Узлы решетки соответствуют вершинам рабочего графа (вершины опорного кластера на рисунке выделены жирными точками), а жирные линии – границам кластеров. На рис. 1, *b* показано размещение (6×15) -графа в выбранной системе координат. Нулевой кластер выделен штриховой линией; римскими цифрами обозначены номера квадрантов, соответствующих левой системе координат.

Возможны восемь различных способов координатной нумерации в соответствии с приведенным представлением топологической матрицы для опорного кластера:

$$\begin{aligned}
 M^{(x1)} &= \|m_{ji}\|, \text{ где } j, i[= wj + i; & M^{(y1)} &= \|m_{ji}\|, \text{ где } j, i[= j + hi; \\
 M^{(x2)} &= \|m_{ji}\|, \text{ где } j, i[= wj + (w-1-i); & M^{(y2)} &= \|m_{ji}\|, \text{ где } j, i[= j + (w-1)h - hi; \\
 M^{(x3)} &= \|m_{ji}\|, \text{ где } j, i[= w(h-1-j) - (w-1-i); & M^{(y3)} &= \|m_{ji}\|, \text{ где } j, i[= (h-1-j) + (w-1)h - hi; \\
 M^{(x4)} &= \|m_{ji}\|, \text{ где } j, i[= w(h-1-j) + i; & M^{(y4)} &= \|m_{ji}\|, \text{ где } j, i[= (h-1-j) + hi.
 \end{aligned}$$

На рис. 1, *b* показана нумерация $x4$ для нулевого кластера.

Далее везде, если не сделано специальной оговорки, используется нумерация $M^{(x1)}$.

В работе [4] установлено, что структурная живучесть вложенного диагностического графа зависит от набора описаний тестовых связей, которые

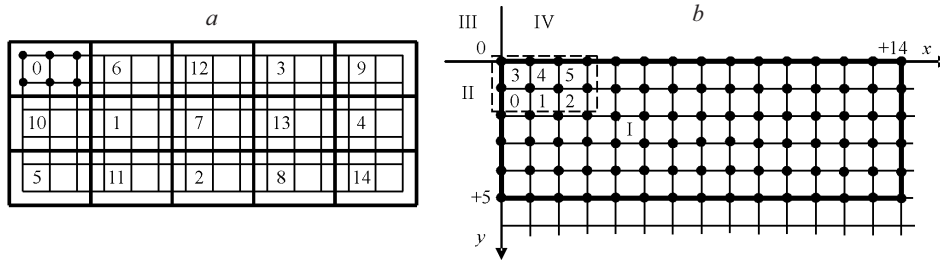


Рис. 1

соответствуют тестирующим вершинам, составляющим опорный кластер, и вершинам, которые входят в кластеры $S - 1$ и S . Здесь $S = \lfloor (t + Q) / Q \rfloor$, или $P = 2S - 1$. Описания таких связей составляют веса дуг подграфа диагностического графа, который индуцирован множеством вершин

$$V_1 = A \cup B = A \cup \left[\bigcup_{q=0}^{Q-1} (B_q(S-1) \cup B_q(S)) \right],$$

где $A = \{0, 1, \dots, q, \dots, Q - 1\}$ – абсолютные адреса тестирующих вершин; B – абсолютные адреса вершин, тестируемых из q -й тестирующей вершины и входящих в кластеры $S - 1$ и S . Например, в (6×15) -графе при $Q = 6$ и $t = 44$ для тестирующей вершины $q = 5$ множество тестируемых вершин из кластеров $S - 1$ и S будет $B_5(S - 1) = B_5(7) = \{42, 43, \dots, 47\}$ и $B_5(S) = B_5(8) = \{48, 49\}$ соответственно. В [4] установлено, что

$$\left| \bigcup_{q=0}^{Q-1} B_q(S) \right| = r = (t + Q) - SQ.$$

Кроме того, показано, что r принимает значение $Q - 1$, если N и P четные; значение $(Q/2) - 1$, если N и Q четные и P нечетное; значение $(Q - 1)/2$, если N , P и Q нечетные. Доказана независимость структурной живучести вложения от нумерации при $r = Q - 1$. В данной работе рассматривается случай, когда $r \neq Q - 1$.

Обозначим $M' = \|m'_{ji}\|$ и $M'' = \|m''_{ji}\|$ топологические матрицы, соотнесенные с кластерами $S - 1$ и S . Тогда при несмещенной нумерации множество значений топологических элементов в матрице M , сопоставленной с опорным кластером, совпадает с множеством номеров классов смежности, а значения элементов в матрицах M' и M'' определяются согласно приведенным выше правилам нумерации при условии, что k принимает значения $S - 1$ и S . Называем элементы m'_{ji} и m''_{ji} первичным и вторичным образами элемента m_{ji} ; элемент m_{ji} является прообразом элементов m'_{ji} и m''_{ji} .

В топологических матрицах, сопоставленных с кластерами 0 , $S - 1$ и S , одноименные элементы принадлежат одному и тому же классу смежности. Поэтому описание тестовой связи для пары топологических элементов m_{ji} и m'_{ji} (m_{ji} и m''_{ji}) не зависит от значений самих элементов.

Ряд описаний и его свойства.

О п р е д е л е н и е 4. Тестовые связи $\tilde{w}_1 = (|x_{ij}|, |y_{ij}|)$ и $\tilde{w}_2 = (|x_{kl}|, |y_{kl}|)$ называем эквивалентными, $\tilde{w}_1 \sim \tilde{w}_2$, если $|x_{ij}| = |x_{kl}|$ и $|y_{ij}| = |y_{kl}|$.

Соединения, соответствующие эквивалентным тестовым связям, для заданного вложения имеют одинаковые ряды описаний: $RD(\tilde{w}_1) \sim RD(\tilde{w}_2)$. Отсюда вытекает равенство значений их структурной живучести: $\mathfrak{R}(\tilde{w}_1) = \mathfrak{R}(\tilde{w}_2)$.

О п р е д е л е н и е 5. Если для тестовых связей \tilde{w}_1 и \tilde{w}_2 выполняется $|x_{ij}| = |x_{kl}|$ и $|y_{ij}| < |y_{kl}|$ или $|y_{ij}| = |y_{kl}|$ и $|x_{ij}| < |x_{kl}|$, то будем говорить, что

связь \tilde{w}_1 лучше, чем связь \tilde{w}_2 : $\tilde{w}_1 \succ \tilde{w}_2$. Отношение « \succ » и обратное ему отношение « \prec » называем отношениями сравнимости типа лучше–хуже.

Поскольку структурная живучесть соединения для \tilde{w}_1 выше, чем для \tilde{w}_2 , то $RD(\tilde{w}_1) \succ RD(\tilde{w}_2) \rightarrow \mathfrak{R}(\tilde{w}_1) > \mathfrak{R}(\tilde{w}_2)$.

Отношения эквивалентности и сравнимости можно применять к рядам описаний и к любым их фрагментам. Пусть num1 и num2 – некоторые нумерации для заданного вложения, а $RD(\text{num1})$ и $RD(\text{num2})$ – соответствующие им ряды описаний. Если для каждого элемента $RD(\text{num1})$ найдется эквивалентный элемент $RD(\text{num2})$, то указанные ряды описаний эквивалентны: $RD(\text{num1}) \sim RD(\text{num2})$. Значит, $RD(\text{num1}) \sim RD(\text{num2}) \rightarrow \mathfrak{R}(\text{num1}) = \mathfrak{R}(\text{num2})$. Понятно, что если для некоторого элемента \tilde{w}_1 из $RD(\text{num1})$ в $RD(\text{num2})$ имеется элемент \tilde{w}_2 , который удовлетворяет условию $\tilde{w}_1 \succ \tilde{w}_2$, а для каждого из остальных элементов $RD(\text{num1})$ найдется элемент в $RD(\text{num2})$, который удовлетворяет условию $\tilde{w}_1 \sim \tilde{w}_2$ или $\tilde{w}_1 \succ \tilde{w}_2$, то $RD(\text{num1}) \succ RD(\text{num2})$ и $\mathfrak{R}(\text{num1}) > \mathfrak{R}(\text{num2})$. Ряды описаний $RD(\text{num1})$ и $RD(\text{num2})$ называем сравнимыми, если для каждого $\tilde{w}_1 \in RD(\text{num1})$ есть эквивалентный или сравнимый с ним $\tilde{w}_2 \in RD(\text{num2})$, причем для всех пар элементов тип сравнимости одинаков. Для сравнимых рядов описаний естественным образом устанавливается отношение показателей структурной живучести.

Координатные нумерации. По соответствию порядка нумерации осей координат различаем два типа координатных нумераций: x -тип (нумерации x_1, x_2, x_3 и x_4) и y -тип (нумерации y_1, y_2, y_3 и y_4). Установленная в [2] эквивалентность вложения в $(H \times W)$ -граф при разбиении групп-графа на смежные классы по элементу $g_0^x g_1^y$ и вложения в $(W \times H)$ -граф при разбиении его на смежные классы по элементу $g_0^y g_1^x$ позволяет ограничиться рассмотрением только x -нумераций для $(H \times W)$ -графов.

На рис. 2 показаны x -нумерации для 0- и $(S - 1)$ -кластеров на примере кластера с топологией $h \times w = 4 \times 6$. Для $(S - 1)$ -кластера на рисунке вместо абсолютных значений топологических элементов указаны значения их преобразов. Для каждой нумерации фоном выделены элементы, составляющие подмножество A_c элементов опорного кластера, которые имеют значения от 0 до r , и множество $B_r(S - 1) = B(S - 1) - B_c(S - 1)$ соответствующих ему первичных образов, где $B(S - 1)$ – множество элементов $(S - 1)$ -кластера, а $B_c(S - 1)$ – множество элементов $(S - 1)$ -кластера, тестируемых всеми элементами опорного кластера. Расстояние по оси ординат между множествами A_c и $B_r(S - 1)$ обозначено Ω . Из рисунка видно, что по относительному расположению множеств A_c и $B_r(S - 1)$ в 0- и $(S - 1)$ -кластерах, характеризуемому величиной Ω , нумерации типа x делятся на две группы. Для нумераций x_1 и x_2 вершины множества A_c занимают верхнюю часть опорного кластера, а вершины из $B_r(S - 1)$ – нижнюю часть $(S - 1)$ -кластера. Для нумераций x_3 и x_4 расположение A_c и $B_r(S - 1)$ обратное. Аналогичное отношение имеет место для расположения элементов из множеств $\{A - A_c\}$ и их вторичных образов в S -кластере.

Сравнение координатных нумераций. Симметрия расположения $(S - 1)$ - и S -кластеров относительно опорного находит свое выражение в следующих свойствах описания тестовых связей.

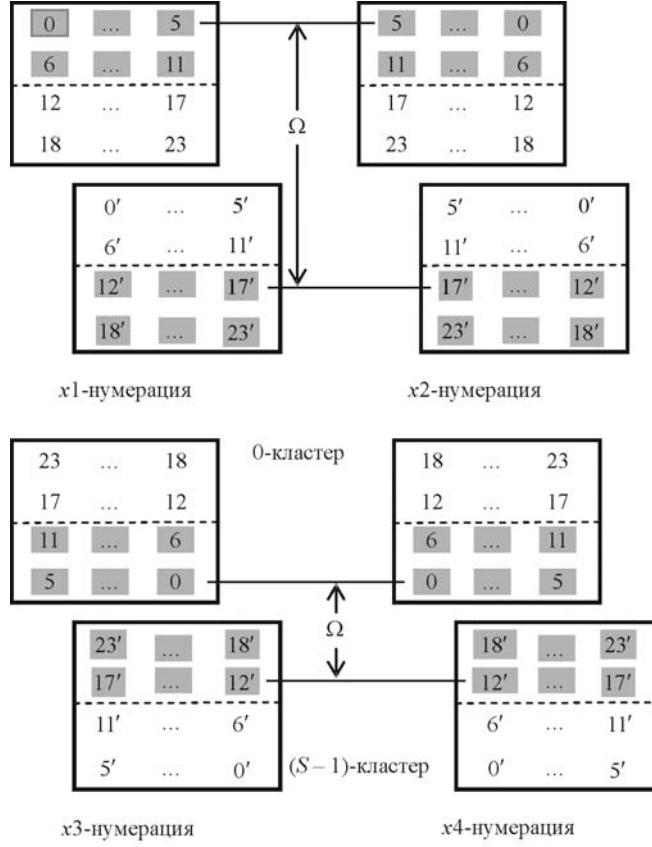


Рис. 2

Свойство 1 (диагональной симметрии вершин). Для всяких $m_{ji}, m_{\bar{j}\bar{i}} \in M$ и $m'_{lk} \in M'$, $m''_{\bar{l}\bar{k}} \in M''$ выполняются $\tilde{w}(m_{ji}, m'_{lk}) = \tilde{w}(m_{\bar{j}\bar{i}}, m''_{\bar{l}\bar{k}})$ и $\tilde{w}(m_{ji}, m''_{\bar{l}\bar{k}}) = \tilde{w}(m_{\bar{j}\bar{i}}, m'_{lk})$, если $\bar{i} = (w-1) - i$, $\bar{j} = (h-1) - j$, $\bar{k} = (w-1) - k$ и $\bar{l} = (h-1) - l$. Вершины m_{ji} и $m_{\bar{j}\bar{i}}$ называются диагонально симметричными, если для них выполняется условие $\bar{i} = (w-1) - i$ и $\bar{j} = (h-1) - j$.

Свойство 2 (диагональной симметрии множеств). образуем для произвольного $b'(S-1) = \{m'_{lk}\} \subseteq M'$ множество $b''(S) = \{m''_{\bar{l}\bar{k}}\} \subseteq M''$, в котором всякому $m'_{lk} \in b'(S-1)$ соответствует элемент $m''_{\bar{l}\bar{k}} \in b''(S)$ такой, что $\bar{k} = (w-1) - k$, $\bar{l} = (h-1) - l$. Тогда для всяких $m_{ji}, m_{\bar{j}\bar{i}} \in M$ при $\bar{i} = (w-1) - i$, $\bar{j} = (h-1) - j$ выполняется $RD(m_{ji}, b'(S-1)) = RD(m_{\bar{j}\bar{i}}, b''(S))$. Множества вида $b'(S-1)$ и $b''(S)$ будем называть диагонально симметричными относительно вершин m_{ji} и $m_{\bar{j}\bar{i}}$.

Эти свойства легко проверяются сравнением групповых представлений соответствующих тестовых связей.

Используем свойства диагональной симметрии для сравнения координатных нумераций. Будем сопоставлять ряды описаний, которые соответст-

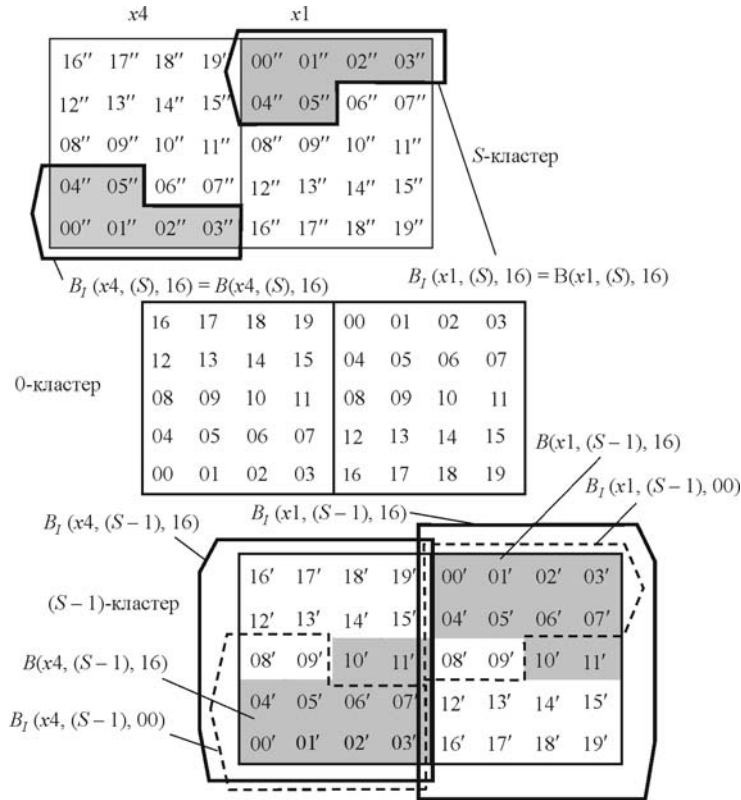


Рис. 3

вуют элементам, тестируемым из двух пар диагонально симметричных элементов, значения которых меняются местами при переходе от одной нумерации к другой. Четверки таких тестирующих элементов однозначно задаются указанием значений пары индексов j и i и имеют вид $F_{ji} = \{m_{ji}, m_{\bar{j}\bar{i}}, m_{\bar{j}i}, m_{j\bar{i}}\}$.

Сравним (для конкретности) нумерации x_1 и x_4 . Примем, что $(S-1)$ -кластер находится относительно 0-кластера в направлении образующих g_0 и g_1 , а S -кластер – в направлении образующих g_0^{-1} и g_1^{-1} . В качестве исходной для последующего анализа выберем топологию кластера, в котором w четное, а h нечетное. Пример такой топологии для $h \times w = 5 \times 4$ приведен на рис. 3.

Обозначим $B_I(x_\alpha, (K),]j, i[)$ множество элементов кластера K , $K \in \{(S-1), S\}$, для которого тестирующая вершина указана значением топологического элемента m_{ji} , соответствующим нумерации x_α , $\alpha \in \{1, 4\}$.

При нумерации x_4 для всяких топологических элементов m_{ji} и $m_{\bar{j}\bar{i}}$, $i = \overline{0, (w-1)}$, $j = \overline{0, \lfloor h/2 \rfloor}$, $\bar{j} = (h-1) - j$, выполняется условие $]j, i[\geq]\bar{j}, i[$, причем равенство имеет место при нечетном h для $j = \bar{j} = \lfloor h/2 \rfloor$. Следовательно, для множеств тестируемых ими вершин из $(S-1)$ -кластера выполняется $B_I(x_4, (S-1),]j, i[) \subseteq B_I(x_4, (S-1),]\bar{j}, i[)$, причем $B_I(x_4, (S-1),]j, i[) = B_I(x_4, (S-1),]\bar{j}, i[)$ для $j = \lfloor h/2 \rfloor$ при нечетном h , а для любых $j \leq \lfloor h/2 \rfloor$, $i = \overline{0, (w-1)}$ и $j = \lfloor h/2 \rfloor + 1$, $i = \overline{(w/2), (w-1)}$ выполняется $B_I(x_4, (S-1),]j, i[) = B(S-1)$. Значение m_{ji} в нумерации x_4 больше, чем в нумерации x_1 , и

равно значению $m_{\bar{j}}$ в нумерации $x1$, поэтому $B_I(x1, (S-1),]j, i[) \subseteq \subseteq B_I(x4, (S-1),]j, i[)$ и $B_I(x4, (S-1),]\bar{j}, i[) \subseteq B_I(x1, (S-1),]\bar{j}, i[)$. Так как $B_I(x4, (S-1),]j, i[) = B_I(x1, (S-1),]\bar{j}, i[) = B(S-1)$, то подмножества $B_I(x1, (S-1),]j, i[)$ и $B_I(x4, (S-1),]\bar{j}, i[)$ можно исключить из дальнейшего рассмотрения, поскольку они не влияют на сравнительную величину структурной живучести для нумераций $x1$ и $x4$. Обозначим остаточные подмножества

$$B_I(x4, (S-1),]j, i[) - B_I(x1, (S-1),]j, i[) = B(x4, (S-1),]j, i[),$$

$$B_I(x1, (S-1),]\bar{j}, i[) - B_I(x4, (S-1),]\bar{j}, i[) = B(x1, (S-1),]\bar{j}, i[).$$

На рис. 3 описанные множества показаны для топологических элементов, заданных индексами $j=0$ ($\bar{j}=4$) и $i=0$. На рисунке вместо координатного обозначения элементов используются значения соответствующих элементов топологических матриц: для $x4 - 00$ вместо $]\bar{j}, i[$, 16 вместо $]j, i[$; для $x1 - 00$ вместо $]j, i[$, 16 вместо $]\bar{j}, i[$. Остаточные множества выделены фоном. Заметим для полноты, что $B_I(x4, (S),]j, i[) = B(x4, (S),]j, i[)$ и $B_I(x1, (S),]\bar{j}, i[) = B(x4, (S),]\bar{j}, i[)$.

Анализ позволил выявить следующие закономерности в расположении остаточных множеств в кластерах.

Свойства 3 (остаточных множеств для нумераций $x1$ и $x4$).

1. Для всяких i, j непустые остаточные множества вида $B(x4, (K),]j, i[)$ (вида $B(x1, (K),]\bar{j}, i[)$), $K \in \{(S-1), S\}$, всегда располагаются на одном и том же топологическом месте в кластерах – в нижней (верхней) их половине, занимая последовательные строки, начиная с $(h-1)$ -й (нулевой) строки. Такую строку называем базовой.

2. Для всяких $i = \overline{0, (w-1)}$, $j = \overline{0, \lfloor h/2 \rfloor}$ выполняются

$$|B(x4, (S-1),]j, i[)| = |B(x1, (S-1),]\bar{j}, i[)| = Z(S-1),$$

$$|B(x4, (S),]j, i[)| = |B(x1, (S),]\bar{j}, i[)| = Z(S),$$

где $|x|$ – мощность множества x .

3. Число элементов в рассматриваемых остаточных множествах для четного w и нечетного h определяется следующими выражениями:

$$Z(S-1) = \begin{cases} (\overline{Q/2}) - wj - i & \text{при } j = \overline{0, ((h-1)/2 - 1)}, i = \overline{0, (w-1)}; \\ (\overline{Q/2}) - wj - i & \text{при } j = (h-1)/2, i = \overline{0, (w/2) - 1}; \\ 0 & \text{при } j = (h-1)/2, i \geq w/2, \end{cases} \quad (1)$$

$$Z(S) = \begin{cases} (\overline{Q/2}) - (j+1)w + i & \text{при } j = \overline{0, (h-1) - 1}, i = \overline{0, (w-1)}; \\ (\overline{Q/2}) - (j+1)w + i & \text{при } j = (h-1)/2, i = \overline{(w/2), (w-1)}; \\ 0 & \text{при } j > (h-1)/2, i = \overline{0, (w-1)}. \end{cases} \quad (2)$$

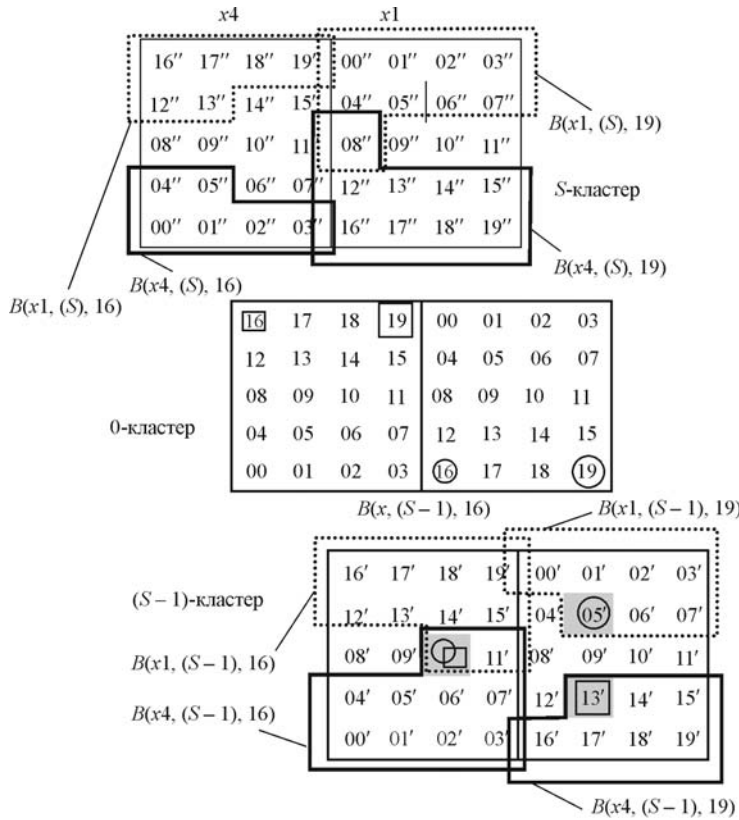


Рис. 4

Рассмотрим теперь элементы m_{ji} и $m_{\bar{j}\bar{i}}$, значение которых меняется местами при переходе от нумерации $x1$ к нумерации $x4$, и диагонально симметричные им элементы $m_{\bar{j}\bar{i}}$ и m_{ji} , составляющие в совокупности множество F_{ji} , а также соответствующие им множества топологических мест тестируемых элементов. На рис. 4 показано топологическое место тестируемых вершин для $F_{00} = \{m_{00}, m_{40}, m_{03}, m_{43}\}$. Для удобства сопоставления множества, соотнесенные с $]m_{00}[$ и $]m_{40}[$, показаны на части рисунка, относящейся к нумерации $x4$, а множества, соотнесенные с вершинами $]m_{43}[$ и $]m_{03}[$, – на части рисунка, относящейся к нумерации $x1$. Топологические места тестирующих элементов для нумерации $x4$ выделены квадратной рамкой, а для нумерации $x1$ – окружностью.

Рассмотрим следующие пары множеств тестируемых элементов с диагонально симметричными им тестирующими вершинами:

- а) $B(x4, (S-1),]j, i[)$, $B(x1, (S),]\bar{j}, \bar{i}[)$ и m_{ji} , $m_{\bar{j}\bar{i}}$;
- б) $B(x4, (S),]j, i[)$, $B(x1, (S-1),]\bar{j}, \bar{i}[)$ и m_{ji} , $m_{\bar{j}\bar{i}}$;
- в) $B(x4, (S),]j, \bar{i}[)$, $B(x1, (S-1),]\bar{j}, i[)$ и $m_{\bar{j}\bar{i}}$, m_{ji} ;
- г) $B(x4, (S-1),]j, \bar{i}[)$, $B(x1, (S),]\bar{j}, i[)$ и $m_{\bar{j}\bar{i}}$, m_{ji} .

Нетрудно видеть, что множества «а» содержат подмножества, являющиеся диагонально симметричными относительно элементов m_{ji} и $m_{\bar{j}\bar{i}}$, если $B(x4, (S-1),]j, i[) \neq \emptyset$ и $B(x1, (S),]\bar{j}, \bar{i}[) \neq \emptyset$. Наименьшее такое подмножество образуют следующие одноэлементные множества топологических элементов: $b_{x4}(S-1) = \{m_{(w-1)(h-1)}\}$ и $b_{x1}(S) = \{m_{00}\}$. Разность мощностей множеств $B(x4, (S-1),]j, i[)$ и $B(x1, (S),]\bar{j}, \bar{i}[)$ указывает на число элементов, не обладающих свойством диагональной симметрии. Характер зависимости места данных множеств в кластерах от значений i и j таков, что элементы, не обладающие свойством диагональной симметрии, располагаются в наиболее удаленной от базовой (в неполной) строке, начиная с элементов, ближайших к середине $(S-1)$ -кластера по координате x . Используя свойства 3.2 и 3.3 и учитывая отношение $|B(x1, (S),]\bar{j}, \bar{i}[)| = |B(x4, (S),]j, i[)|$, получим

$$\begin{aligned} & |B(x4, (S-1),]j, i[)| - |B(x1, (S),]\bar{j}, \bar{i}[)| = |B(x4, (S-1),]j, i[)| - \\ & - |B(x4, (S),]j, \bar{i}[)| = (Q/2) - jw - i - ((Q/2) - jw + w + (w-1-i)) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, свойству диагональной симметрии не удовлетворяет единственный элемент $\beta_{kl} \in B(x4, (S-1),]j, i[)$, где k, l – координаты его топологического места в $(S-1)$ -кластере.

При четном w и нечетном h для $j = (h-1)/2$ и любого $i = \overline{0, (w-1)}$ значения j и \bar{j} совпадают. Значит, четверки F_{ji} вырождаются в двойки вида $F'_{ji} = \{m_{ji}, m_{\bar{j}\bar{i}}\}$. Нетрудно видеть, что общее число сравниваемых множеств тестируемых элементов равно $(w(h-1)/4) + (w/2)$. Вместе с тем понятно, что множество всех пар множеств вида «а» задается индексами j и i , которые пробегают значения $j = \overline{0, h/2}$ и $i = \overline{0, (w/2)-1}$. Для указанных значений i и j между координатами элемента β_{kl} и координатами соответствующего тестирующего элемента имеется следующая связь: $k = \lfloor h/2 \rfloor + j$, $l = w/2 + i$.

Рассуждая аналогично описанному выше, получим:

1) при $j = \overline{0, (h/2)-1}$, $i = \overline{0, (w/2)-1}$ в множестве «б» имеется единственный элемент $\beta_{\bar{k}\bar{l}} \in B(x1, (S-1),]\bar{j}, \bar{i}[)$, где $\bar{k} = \lfloor h/2 \rfloor - 1 - j$, $\bar{l} = (w/2) - 1 - i$;

2) для каждого j и i , пробегающих значения $j = \overline{0, \lfloor h/2 \rfloor}$, $i = \overline{0, (w/2)-1}$, в множестве «в» имеется единственный элемент $\beta_{\bar{k}\bar{l}} \in B(x1, (S-1),]\bar{j}, \bar{i}[)$, где $\bar{k} = \lfloor h/2 \rfloor - 1$, $\bar{l} = (w/2) + i$;

3) для каждого j и i , пробегающих значения $j = \overline{0, (h/2)-1}$, $i = \overline{0, (w/2)-1}$, в множестве «г» имеется единственный элемент $\beta_{kl} \in B(x4, (S-1),]j, i[)$, где $k = \lfloor h/2 \rfloor + 1 + j$, $l = (w/2) - 1 - i$.

Для четверки F_{ji} найденное множество элементов, не удовлетворяющих свойству диагональной симметрии, обозначим \bar{F}_{ji} . Элементы \bar{F}_{ji} для $j = 0$, $i = 0$ на рис. 4 выделены фоном. Пары из тестирующего и тестируемого элементов выделены однотипной рамкой. При этом элементы из столбца j имеют меньшие размеры рамки, чем из столбца \bar{j} . Элементы F_{ji} и \bar{F}_{ji} , относящиеся к нумерации $x1$, отмечены окружностью, а к нумерации $x4$ – квадратом.

На рис. 5, а–с показано расположение элементов F_{ji} и \bar{F}_{ji} из $(S-1)$ -кластера для разных значений четности w и h (обозначения такие, как на

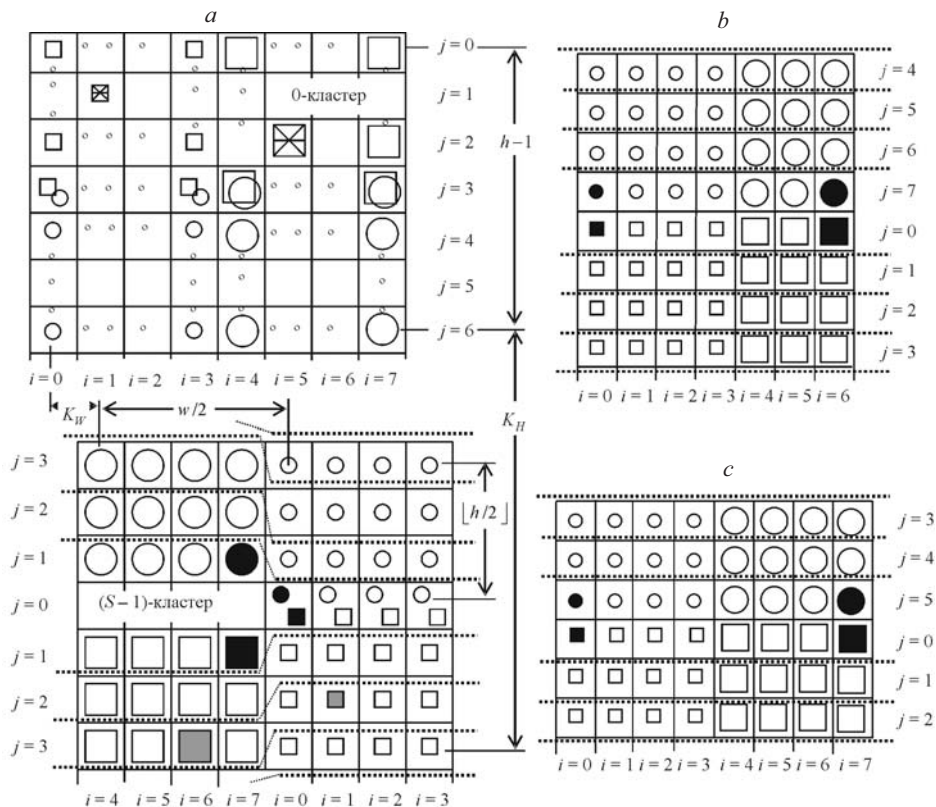


Рис. 5

рис. 3 и 4). Пунктиром выделены множества элементов вида β_{kl} , для которых тестирующие вершины принадлежат к одной строке опорного кластера. Соответствие мест тестирующего и тестируемого элементов можно установить с помощью приведенных на рисунке индексов строк и столбцов.

Продолжим анализ случая, когда w четное и h нечетное. Конструкция 0- и $(S - 1)$ -кластеров для $w = 8$ и $h = 7$ показана на рис. 5, *a*. Серым фоном выделены элементы β_{kl} при нумерации x_4 , а звездочкой помечены соответствующие тестирующие элементы.

Выполненный анализ показал, что 0- и $(S - 1)$ -кластеры делятся на квадранты согласно диапазону изменения места элементов четверок F_{ji} и соответственных с ними четверок \bar{F}_{ji} при любой четности w и h (см. рис. 5).

Поскольку координаты элементов четверок \bar{F}_{ji} отличаются от координат соответствующих элементов четверок F_{ji} на константу, то для всех элементов одного квадранта пути из элементов F_{ji} к элементам из \bar{F}_{ji} имеют одинаковое описание. Это дает возможность определить свойства сравниваемых нумераций на основе анализа ряда описаний для любой четверки, заданной значениями j и i . Для определенности выберем $j = 0, i = 0$. На рис. 5 элементы \bar{F}_{00} выделены темным фоном. Описание связей для этой четверки в анализируемом случае (см. рис. 5, *a*) – w четное, h нечетное – имеет вид

$$w_1 = \tilde{w}(m_{ji}, m_{kl}) = (K_W + (w/2), K_H + \lfloor h/2 \rfloor);$$

$$w_2 = \tilde{w}(m_{\bar{j}i}, m_{\bar{k}l}) = (K_W - (w/2), K_H + \lceil h/2 \rceil);$$

$$w_3 = \tilde{w}(m_{\bar{j}i}, m_{\bar{k}l}) = (K_W + (w/2), K_H - \lfloor h/2 \rfloor);$$

$$w_4 = \tilde{w}(m_{\bar{j}i}, m_{\bar{k}l}) = (K_W - (w/2), K_H + \lceil h/2 \rceil).$$

Здесь связи w_1 и w_4 отвечают нумерации x_4 , связи w_2 и w_3 – нумерации x_1 , а длина связей по осям координат измерена в направлении шага порождающего элемента. Для рассматриваемого случая $r \neq Q - 1$ значения K_W и K_H соответствуют кратчайшему расстоянию между 0- и $(S - 1)$ -кластерами. Это расстояние измеряется между произвольным прообразом и его первичным образом. Поскольку $K_W < W/2$ и $K_H < h/2$, то компоненты $K_W - (w/2)$, $K_H - \lceil h/2 \rceil$ и $K_H - \lfloor h/2 \rfloor$ соответствуют кратчайшим связям между парными элементами четверок F_{ji} и \bar{F}_{ji} , чего не скажешь об остальных компонентах.

Связи w_1 и w_3 (w_2 и w_4) имеют одинаковую длину по оси абсцисс и принадлежат разным нумерациям, поэтому отношение нумераций x_1 и x_4 по структурной живучести зависит только от соотношения длин указанных связей по оси ординат.

Известно [4], что $H = 2K_H + y$, где y – шаг порождающего элемента по оси ординат. По условию рассматриваем вложения, дающие разбиение рабочего графа на строки кластеров (см. рис. 1, а), что означает $y \geq h$. (Полагаем, что вложения, дающие столбцы кластеров, сводятся к случаю строк кластеров переменной направлений W и H .) Поскольку K_H есть расстояние от нулевой строки 0-кластера до нулевых строк $(S - 1)$ - и S -кластеров, то расстояние от нулевой строки 0-кластера до элементов, удаленных от нее на расстояние $(H - 1)/2$ (по условию значение H нечетное), можно представить в виде $K_H + \lfloor y/2 \rfloor$ и $K_H + \lceil y/2 \rceil$. Согласно этому, если $K_H + \lfloor h/2 \rfloor \leq K_H + \lceil y/2 \rceil$, длина связей w_1 и w_4 по компоненте y (и в целом) больше длины связей w_3 и w_2 соответственно. Следовательно, если w четное и h нечетное, то $RD(x_1) > RD(x_4)$.

Нумерации x_2 и x_3 отличаются от x_1 и x_4 только направлением нумерации в строках, поэтому все выводы, полученные относительно соотношения структурной живучести для x_1 и x_4 , справедливы и для x_2 и x_3 .

Расположение $(S - 1)$ -кластера относительно опорного, а значит, и относительное расположение множеств A_c и B_r , $(S - 1)$ и четверок F_{ji} и \bar{F}_{ji} определяется результатом решения неравенств

$$(S - 1)x \bmod W \leq \lfloor W/2 \rfloor, \quad (3)$$

$$(S - 1)y \bmod H \leq \lfloor H/2 \rfloor. \quad (4)$$

Это расположение для нумераций x -типа соответствует рассмотренному выше, когда выполняется неравенство (4), и меняется на обратное, когда неравенство (4) не выполняется. Поэтому отношение нумераций x_1 и x_4 при невыполнении (4) также становится обратным полученному. (Заметим, что неравенство (3) определяет отношение нумераций y -типа.)

Представленный метод выделения элементов, не удовлетворяющих условию диагональной симметрии, применен для сравнения нумераций x_1 и x_2, x_3 и x_4, x_1 и x_3, x_2 и x_4 . Анализ значений четности w и h , отличающихся от рассмотренных, выполняется аналогично и здесь не приводится. Результаты сравнения нумераций по структурной живучести резюмируются в следующем утверждении.

Утверждение. При $r \neq Q - 1$ и если $(S - 1) \bmod H \leq \lfloor H/2 \rfloor$, то

1. Для нумераций x_1 и x_4 (x_2 и x_3) выполняется:

$\mathfrak{R}(x_1) > \mathfrak{R}(x_4)$ ($\mathfrak{R}(x_2) > \mathfrak{R}(x_3)$), когда w четное и h нечетное;

$\mathfrak{R}(x_1) \geq \mathfrak{R}(x_4)$ ($\mathfrak{R}(x_2) \geq \mathfrak{R}(x_3)$), когда h четное, причем равенство имеет место, когда $y = h$;

$\mathfrak{R}(x_1) = \mathfrak{R}(x_4)$ ($\mathfrak{R}(x_2) = \mathfrak{R}(x_3)$), когда w и h нечетные (в этом случае $RD(x_1) \sim RD(x_4)$).

2. Для нумераций x_1 и x_2 (x_3 и x_4) выполняется:

$RD(x_1)$ и $RD(x_2)$ ($RD(x_3)$ и $RD(x_4)$) несравнимы, когда w четное и h нечетное, если $K_H + \lfloor h/2 \rfloor + 1 < (H - 1)/2$; если же при этом $K_H + \lfloor h/2 \rfloor + 1 = (H - 1)/2$, то $\mathfrak{R}(x_1) = \mathfrak{R}(x_2)$ ($\mathfrak{R}(x_3) = \mathfrak{R}(x_4)$);

$\mathfrak{R}(x_1) = \mathfrak{R}(x_2)$ ($\mathfrak{R}(x_3) \geq \mathfrak{R}(x_4)$), когда h четное, причем равенство имеет место, когда $y = h$.

3. Для нумераций x_1 и x_3 (x_2 и x_4) выполняется:

$\mathfrak{R}(x_1) > \mathfrak{R}(x_3)$ ($\mathfrak{R}(x_2) > \mathfrak{R}(x_4)$), когда хотя бы одно из w и h четное;

$\mathfrak{R}(x_1) = \mathfrak{R}(x_3)$ ($\mathfrak{R}(x_2) \geq \mathfrak{R}(x_4)$), когда w и h нечетные.

При $r \neq Q - 1$ и если $(S - 1) \bmod H > \lfloor H/2 \rfloor$, то знаки неравенства, указанные для нумераций в п. 1–3 данного утверждения, меняются на обратные.

Из утверждения следует, что при сравнении координатных нумераций x -типа достаточно ограничиться рассмотрением только двух нумераций – x_1 и x_2 .

Экспериментальные данные. В таблице приведены данные о значениях структурной живучести координатных нумераций для рабочего графа с

$H \times W$	$w(x, y)$	Q	w	h	x_1	x_2	x_3	x_4	$\min \mathfrak{R}$	$\max \mathfrak{R}$
9×10	2,3	6	2	3	0,615364	0,615329	0,615177	0,615210	0,615172	0,615368
	4,3				0,615195	0,615244	0,615067	0,615007	0,615006	0,615247
6×15	1,2	6	3	2	0,611310	0,611206	0,611147	0,611310		
	2,2				0,610865	0,610701	–	–		
	3,2				0,611257	0,611155	–	–		
	6,2				0,611043	0,610898	–	–		
	7,2				0,611122	0,610990	–	–		
	4,2				0,610957	0,610802	–	–		
	5,2				30	15	2	0,611194	0,611080	–
5×18	6,1	6	6	1	0,607319	0,606912	–	–		
	6,2				0,607267	0,606822	–	–		

числом вершин $N = 90$, которые подтверждают полученные теоретические результаты. Рассматриваются две топологии рабочего графа с параметрами $W \times H \in \{10 \times 9; 15 \times 6\}$ и с топологией кластера $q_W, q_H > 1$ для случая $r \neq Q - 1$. Для всех сравниваемых вложений $r = 2$ кроме случая (6×15) -графа, когда $Q = 30$ и $r = 14$.

Как видно из таблицы, для всех рассмотренных вложений $(S - 1)$ -кластер находится в направлении g_1 , вследствие чего выполняются $\mathfrak{R}[x1] > \mathfrak{R}[x4]$ и $\mathfrak{R}[x2] > \mathfrak{R}[x3]$. Вложения в (5×18) -граф имеют $K_H + \lfloor h/2 \rfloor + 1 = (H - 1)/2$, поэтому $\mathfrak{R}[x1] = \mathfrak{R}[x2]$ и $\mathfrak{R}[x3] = \mathfrak{R}[x4]$.

Расчетами показателя \mathfrak{R} для всех возможных перестановок из Q элементов найдены наименьшее и наибольшее значения структурной живучести для некоторых вложений, имеющих $r \neq Q - 1$ при $N = 90$ (см. таблицу). Полученные численные результаты показывают возможность достижения для заданного вложения при координатных нумерациях максимального (или близкого к нему) значения структурной живучести.

Заключение. Поставлена и решена задача определения зависимости структурной живучести диагностического циркулянта, вложенного в граф прямого произведения циклических подгрупп, для одного типа регулярной нумерации. Найдены простые аналитические отношения, позволяющие на качественном уровне сравнивать структурную живучесть для разных нумераций заданного вложения. Использование полученных результатов уменьшает трудоемкость определения численных значений живучести структуры при решении задач анализа и синтеза структуры ВС. Численные эксперименты не противоречат теоретическим выводам, а также показывают возможность получения для координатных нумераций значений структурной живучести, близких к наибольшему возможным для заданного вложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Preparata F. P., Metzger G., Chien R. J. On the connection assignment problem of diagnosable systems // IEEE Trans. Electron. Comput. 1967. EC-16, N 6. P. 848.
2. Димитриев Ю. К. Перестраиваемые диагностические графы живучих вычислительных систем // Автометрия. 1998. № 1. С. 97.
3. Димитриев Ю. К., Мелентьев В. А., Грязнов Н. Г. Анализ живучести вложенных диагностических структур // Автометрия. 2001. № 5. С. 51.
4. Димитриев Ю. К. Условия независимости структурной живучести вложенного диагностического графа от нумерации модулей вычислительной системы с тороидальной структурой // Автометрия. 2005. 41, № 6. С. 74.
5. Мелентьев В. А. Оценка потенциальной и структурной живучести вычислительных систем // Электронное моделирование. 1995. 17, № 1. С. 78.

Институт физики полупроводников СО РАН,
E-mail: dimi@isp.nsc.ru

Поступила в редакцию
18 ноября 2004 г.