РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2006, том 42, № 1

УДК 519.234

В. Г. Алексеев

(Звенигород Московской обл.)

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ПРИКЛАДНОГО БИСПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В работе собраны воедино важнейшие результаты и рекомендации по биспектральному анализу стационарных случайных процессов с дискретным временем. Приведены точные определения как самой биспектральной плотности, так и всех других, связанных с ней, математических объектов.

Введение. Литература, посвященная прикладному спектральному анализу стационарных случайных процессов (ССП), чрезвычайно обширна. В последние годы все большее число авторов работ прикладного характера проявляет интерес к оценкам не только обычной спектральной плотности, но и старших спектральных плотностей, дающих важную дополнительную информацию относительно статистической структуры исследуемого ССП. В этой связи мы укажем на классифицированный библиографический список [1] и монографии [2, 3]. В списке [1] находим 1757 работ, посвященных старшим моментам и кумулянтам, а также старшим спектральным плотностям стационарных и периодически нестационарных случайных процессов. Библиография к монографиям [2, 3] охватывает 494 и 34 названия соответственно. Это говорит о том, что интерес исследователей разных направлений к старшим спектральным плотностям реальных физических процессов неуклонно растет.

Следует, однако, отметить, что широкое применение биспектрального и триспектрального анализа ССП в течение довольно долгого времени сдерживалось слабостью теоретической базы, отсутствием четких и надежных алгоритмов статистического оценивания биспектральной и триспектральной плотностей. Еще в середине 80-х годов прошлого века было столько путаницы в подходах и рекомендациях разных авторов, что исследователю, заинтересованному в практическом применении биспектрального и триспектрального анализа ССП, было очень трудно отделить в доступной ему литературе рациональное зерно от всякого рода скороспелых гипотез. К числу гипотез, не выдержавших проверки временем, может быть отнесено, например, утверждение о ключевой роли характеристики $m(\omega)$ аргумента ω той или иной спектральной плотности [4, гл. 6]. С течением времени положение изменилось. Сегодня мы можем утверждать, что все основные трудности построения полноценного биспектрального и триспектрального анализа ССП преодолены. В представленной работе мы ограничимся рассмотрением статистических оценок лишь младшей из старших – биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$. При этом все рассматриваемые оценки будут непараметрическими.

Предлагаемый нами подход к построению и исследованию оценок биспектральной плотности основывается, во-первых, на использовании свойств симметрии функции $f^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$, позволяющих избежать огромного перерасхода времени счета, и, во-вторых, на выборе окна данных $\Theta = \{\theta(t)\}$ для домножения (неравномерного взвешивания) исходной реализации. Если окно данных Θ выбрать положительно-определенным, то исследование смещения оценок биспектральной плотности существенным образом упрощается. В основе предлагаемых рекомендаций по биспектральному анализу ССП лежат публикации [5–10], в которых можно найти доказательства формулируемых далее теорем 1–4.

1. Определения и некоторые предварительные сведения. Итак, пусть $\{X(t),\ t = 0, \pm 1, \dots\}$ – стационарный в узком смысле случайный процесс со средним $\langle X(t) \rangle \equiv 0$. В основу определения спектральных плотностей ССП $X(t)$ кладутся семиинварианты (кумулянты)

$$r^{(\nu)}(t_1, \dots, t_{\nu-1}) = s^{(\nu)}(t, t + t_1, \dots, t + t_{\nu-1}),$$

где

$$s^{(\nu)}(t_1, \dots, t_\nu) = \frac{i^{-\nu} \partial^\nu}{\partial u_1, \dots, \partial u_\nu} \ln \left\langle \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{\nu} u_j X(t_j) \right\} \right\rangle \Bigg|_{u_1 = \dots = u_\nu = 0}.$$

Таким образом, семиинвариант ν-го порядка $s^{(\nu)}(t_1, \dots, t_\nu)$ является коэффициентом при $i^\nu u_1, \dots, u_\nu$ в разложении функции

$$\ln \langle \exp\{ i u_1 X(t_1) + \dots + i u_\nu X(t_\nu) \} \rangle$$

в ряд Тейлора в окрестности начала координат. Важнейшие свойства семиинвариантов, отвечающих произвольному случайному вектору, приведены в работе [11, § 2.3].

Что же касается спектральной плотности порядка $\nu = 2, 3, \dots$ исследуемого ССП, то она определяется формулой

$$f^{(\nu)}(\omega_1, \dots, \omega_{\nu-1}) = (2\pi)^{-\nu+1} \sum_{t_1 = -\infty}^{\infty} \dots \sum_{t_{\nu-1} = -\infty}^{\infty} r^{(\nu)}(t_1, \dots, t_{\nu-1}) \times$$

$$\times \exp\{ -i(t_1 \omega_1 + \dots + t_{\nu-1} \omega_{\nu-1}) \}. \qquad (1)$$

Полагая, в частности, $\nu = 3$ в (1), получим биспектральную плотность ССП $X(t)$. Функция $f^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$ комплексна. Заметим также, что при сделанных нами предположениях относительно ССП $X(t)$ семиинвариант $r^{(3)}(t_1, t_2)$, фигурирующий в определении биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$, совпадает с третьим моментом $\langle X(t) X(t + t_1) X(t + t_2) \rangle$.

Область определения биспектральной плотности ССП $X(t)$ можно выбирать по-разному. Следуя Ван Нессу [12], впервые описавшему свойства симметрии биспектральной плотности, будем считать, что функция $f^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$ задана в шестиугольнике Q площадью $4\pi^2$, определяемом системой неравенств

$$\begin{cases} \left|\omega_1 - \omega_2\right| \le 2\pi; \\ \left|\omega_j + 2\omega_k\right| \le 2\pi, \quad j, k = 1, 2, \ j \ne k. \end{cases}$$

Если рассечь шестиугольник Q прямыми $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_1 \pm \omega_2 = 0$, $2\omega_1 + \omega_2 = 0$ и $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$, получим 12 равновеликих (по площади) треугольников, каждый из которых является основным множеством биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$ в том смысле, что значения функции $f^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$ в таком треугольнике однозначно определяют ее значения во всем шестиугольнике Q.

Согласно выражению (1) определение биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$ зависит лишь от семиинварианта $r^{(3)}(t_1, t_2)$, однако в условия следующих далее теорем 1–3 будут входить также семиинварианты порядков $\nu = 4$ и $\nu = 6$. Это обстоятельство обязывает нас привести формулы, облегчающие вычисление семиинвариантов $s^{(\nu)}(t_1, \dots, t_\nu)$, $\nu = 4$ и $\nu = 6$, и проверку условий, налагаемых на эти семиинварианты. В соответствии с известными соотношениями, связывающими моменты и семиинварианты произвольного случайного вектора с нулевым средним значением (см. [13, гл. II, § 12, формула (46)]),

$$s^{(4)}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \left\langle X(t_1) X(t_2) X(t_3) X(t_4) \right\rangle - \{s^{(2)}(t_1, t_2) s^{(2)}(t_3, t_4)\}_3;$$

$$s^{(6)}(t_1, \dots, t_6) = \left\langle X(t_1) X(t_2) X(t_3) X(t_4) X(t_5) X(t_6) \right\rangle -$$

$$- \{s^{(3)}(t_1, t_2, t_3) s^{(3)}(t_4, t_5, t_6)\}_{10} - \{s^{(2)}(t_1, t_2) s^{(4)}(t_3, t_4, t_5, t_6)\}_{15} -$$

$$- \{s^{(2)}(t_1, t_2) s^{(2)}(t_3, t_4) s^{(2)}(t_5, t_6)\}_{15}.$$

Здесь, как и в работе [12], $\{\cdot\}_m$ обозначает сумму *m различных* слагаемых, получаемых перестановкой аргументов сомножителей в фигурных скобках, причем слагаемые, в которых аргументы того или иного сомножителя отличаются лишь порядком, не считаются различными. Так, например,

$$\{s^{(2)}(t_1, t_2) s^{(2)}(t_3, t_4)\}_3 = s^{(2)}(t_1, t_2) s^{(2)}(t_3, t_4) +$$

$$+ s^{(2)}(t_1, t_3) s^{(2)}(t_2, t_4) + s^{(2)}(t_1, t_4) s^{(2)}(t_2, t_3).$$

Еще один пример, иллюстрирующий правило раскрытия скобок $\{\cdot\}_m$, приведен в работе [5, п. 3].

Далее нам будут полезны также полиномиальные тригонометрические ядра, определяемые формулами

$$F_n(\omega)=\frac{1}{n}\left\{\frac{\sin(n\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\}^2, \tag{2}$$

$$J_n(\omega)=\frac{3}{2n^3+n}\left\{\frac{\sin(n\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\}^4, \tag{3}$$

$$P_n(\omega)=\frac{2\cos\omega}{2n^3}\left\{\frac{\sin(n\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right\}^4. \tag{4}$$

Ядра (2)–(4) неотрицательны. Интеграл от каждого из них по отрезку $\Pi = [-\pi, \pi]$ равен 2π. Их общепринятые названия – ядра Фейера, Джексона и Джексона – Валле-Пуссена соответственно.

2. Периодограмма третьего порядка, ее основные свойства. Рассмотрим периодограмму третьего порядка, призванную служить «полуфабрикатом» при построении непараметрической оценки биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega)$, $\omega=(\omega_1,\omega_2)$. Одна из простейших модификаций периодограммы третьего порядка определяется формулой

$$I_n(\omega)=I_n(\omega_1,\omega_2)=\frac{n}{2\pi^2(n^2+1)}\prod_{j=1}^{3}\sum_{t_j=-n}^{n}\theta(t_j)X(t_j)\exp(-it_j\omega_j), \tag{5}$$

где $\omega_1+\omega_2+\omega_3\equiv 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, т. е. $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ кратно 2π, а множители $\theta(t)$ описываются соотношением

$$\theta(t)=1-|t|/n, \quad |t|\le n. \tag{6}$$

Окно данных (6), используемое при построении периодограммы (5), положительно определено в том смысле, что его дискретное преобразование Фурье неотрицательно. Им является ядро Фейера $F_n(\omega)$, описанное формулой (2).

Вычисляя математическое ожидание периодограммы (5) и сохраняя обозначение $\Pi=[-\pi,\pi]$, легко находим

$$\langle I_n(\omega)\rangle=\frac{n}{2\pi^2(n^2+1)}\iint_{\Pi^2}F_n(\mu_1)F_n(\mu_2)F_n(\mu_1+\mu_2)\times$$

$$\times f^{(3)}(\omega_1+\mu_1,\omega_2+\mu_2)\,d\mu_1\,d\mu_2, \tag{7}$$

причем $f^{(3)}(\omega_1\pm 2\pi,\omega_2)=f^{(3)}(\omega_1,\omega_2\pm 2\pi)=f^{(3)}(\omega_1,\omega_2)$.

Перейдем к рассмотрению корреляционных свойств периодограммы (5).

Теорема 1. Пусть семиинварианты $r^{(\nu)}(t_1, \ldots, t_{\nu-1})$ порядков $\nu = 2, 3, 4, 6$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{t_{\nu-1}=-\infty}^{\infty} \left| r^{(\nu)}(t_1, \ldots, t_{\nu-1}) \right| < \infty. \tag{8}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\sigma^2(I_n(\omega)) \equiv \left\langle \left| I_n(\omega) \right|^2 \right\rangle - \left| \left\langle I_n(\omega) \right\rangle \right|^2 =$$

$$= \frac{16n}{27\pi} f(\omega_1) f(\omega_2) f(\omega_1 + \omega_2) \left\{ 1 + 8 \prod_{j=1}^{2} \Lambda_{\{\omega_j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)\}}(\omega) + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \left[\Lambda_{\{\omega_j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)\}}(\omega) + \Lambda_{\{\omega_1 + \omega_2 + \omega_j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)\}}(\omega) + \right.$$

$$\left. \left. + \Lambda_{\{\omega_1 + \omega_2 \cos j\pi \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)\}}(\omega) \right] \right\} + o(n),$$

где $\Lambda_\Omega(\omega)$ – индикатор множества Ω; $\cos j\pi$ используется вместо $(-1)^j$; $f(\omega)$ – обычная спектральная плотность ССП $X(t)$, причем $f(\omega \pm 2\pi) = f(\omega)$.

Следующая теорема 2 доказывается в предположении, что обе точки $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ находятся в пределах треугольника $\Delta_1 = \{(\omega_1, \omega_2)$: $0 \le \omega_2 \le \omega_1,\ 2\omega_1 + \omega_2 \le 2\pi\}$, который является одним из двенадцати основных множеств биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega)$.

Теорема 2. Пусть, как и в условиях теоремы 1, справедливо предположение (8) для $\nu = 2, 3, 4, 6$. Тогда для любых точек $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2) \ne \ne (0, 0)$, $\omega \ne \mu$, из треугольника Δ_1

$$\mathrm{cov}\,\{I_n(\omega), I_n(\mu)\} \equiv \left\langle I_n(\omega) \overline{I_n(\mu)} \right\rangle - \left\langle I_n(\omega) \right\rangle \overline{\left\langle I_n(\mu) \right\rangle} =$$

$$= \frac{16n}{27\pi} \Lambda_{\{\omega_2 = 0\}}(\omega) \Lambda_{\{\mu_2 = 0\}}(\mu) \{1 + 2\Lambda_{\{\omega_1 = 0\}}(\omega)\} f(0) f(\omega_1) f(\mu_1) + o(n),$$

где черта сверху означает переход к комплексно-сопряженной величине.

Несколько комментариев к приведенным выше результатам. Формула (7) по существу означает, что смещение (систематическая ошибка оценивания) периодограммы (5) стремится к нулю при $n \to \infty$, если только биспектральная плотность $f^{(3)}(\omega)$ непрерывна. Теорема 1, в свою очередь, свидетельствует о том, что дисперсия периодограммы (5) растет, как n, с увеличением объема выборки.

Наконец, теорема 2 доказывает, что отрезок $\{(\omega_1, \omega_2)$: $\omega_2 = 0, 0 \le \omega_1 \le \pi\}$ выделяется среди других граничных отрезков множества Δ_1 тем непривычным для нас свойством, что значения периодограммы (5) в двух произвольных точках этого отрезка остаются коррелированными даже при $n \to \infty$. Разумеется, основное множество Δ_1 не является исключением. Каждое из двенадцати основных множеств Δ_i спектральной плотности $f^{(3)}(\omega)$ содержит отрезок, обладающий тем же свойством. Им является та из сторон треугольника Δ_i, которая лежит на прямой $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$ или $\omega_1 + \omega_2 = 0$. Это именно те прямые, на которых биспектральная плотность $f^{(3)}(\omega)$ вещественна.

Заметим также, что окно данных (6), используемое нами при построении периодограммы (5), не является единственно возможным. Другие положительно-определенные окна данных приведены в работах [14, 15]. Следует, однако, иметь в виду, что каждой новой модификации периодограммы третьего порядка отвечает свой нормирующий множитель, определяемый из условия асимптотической несмещенности периодограммы.

3. Оценка биспектральной плотности. Из предыдущего раздела видно, что периодограмма (5) не может служить оценкой биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega)$, так как ее дисперсия не только не убывает, а напротив, неограниченно возрастает с увеличением объема выборки. Один из путей построения состоятельной оценки биспектральной плотности – осреднение периодограммы (5) с помощью того или иного двумерного спектрального окна.

Итак, пусть $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ – произвольная точка шестиугольника Q. Оценку величины $f^{(3)}(\omega)$ будем искать в виде

$$f_n^{(3)}(\omega) = h^{-2} \iint_{\mathrm{R}^2} \left\{ \prod_{j=1}^{2} w\left(\frac{\mu_j}{h}\right) \right\} I_n(\omega_1 + \mu_1, \omega_2 + \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2, \qquad (9)$$

где R^2 – вещественная плоскость; $I_n(\mu_1, \mu_2)$ – периодограмма третьего порядка, определенная формулами (5) и (6); $h = h_n$ – некоторая последовательность такая, что $0 < h_n \le \pi$ для всех натуральных n (в дальнейшем на последовательность h_n будет наложено еще одно условие), а весовая функция $w(x)$ четна, ограничена и удовлетворяет условиям $w(x) = 0$, если $|x| \ge 1$, и

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, dx = 1.$$

Порядком весовой функции $w(x)$ назовем наименьшее четное число $l \ge 2$, для которого

$$\int_{-1}^{1} x^l w(x)\, dx \ne 0.$$

Три простейшие весовые функции второго порядка (прямоугольная, треугольная и параболическая) приведены в [16, с. 203]. Весовые функции порядков $l = 4, 6, \ldots, 20$ могут быть найдены в работах [17, 18].

Биспектральную плотность $f^{(3)}(\omega)$ в дальнейшем будет удобно представить в виде $f^{(3)}(\omega) = g_1(\omega) + i g_2(\omega)$, где функции $g_j(\omega)$, $j = 1, 2$, вещественны.

Теорема 3. Предположим, что биспектральная плотность $f^{(3)}(\omega) = g_1(\omega) + i g_2(\omega)$ и семиинварианты $r^{(\nu)}(t_1, \ldots, t_{\nu-1})$, $\nu = 2, 3, 4, 6$, случайного процесса $X(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

А. Все частные производные по r-й порядок включительно функций $g_j(\omega_1, \omega_2)$, где $j = 1, 2$ и r – натуральное число, ограничены (по абсолютной величине) некоторой постоянной K.

Б. $\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{t_{\nu-1}=-\infty}^{\infty} \left| r^{(\nu)}(t_1, \ldots, t_{\nu-1}) \right| < \infty.$

Определим соотношением $l = 2\lfloor 2^{-1}(r+1) \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x, порядок l весовой функции $w(x)$, входящей в выражение (9) оценки $f_n^{(3)}(\omega)$. Наконец, потребуем, чтобы величина $h = h_n$ при больших n удовлетворяла соотношению $nh^{2(r+1)} \sim 1$, где символ «$\sim$» обозначает пропорциональность двух величин.

Тогда для всех $\omega \in Q$

$$\left\langle \left| f_n^{(3)}(\omega) - f^{(3)}(\omega) \right|^2 \right\rangle = O(n^{-r/(r+1)}).$$

Хорошо известно [19], что в случае оценивания обычной спектральной плотности $f(\omega)$ применение весовых функций $w(x)$ высших порядков (т. е. порядков $l > 2$) может привести к очень большому выигрышу в точности, если только объем выборки не слишком мал и функция $f(\omega)$ многократно дифференцируема. Аналогичное положение имеет место и в случае оценивания биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega)$. Если $r \gg 1$ (см. условие А в теореме 3), то с ростом n постепенно увеличивается как порядок l оптимальной весовой функции $w(x)$, так и достигаемый с ее помощью выигрыш в точности оценивания. В этой связи отметим численный эксперимент, выполненный Калмыковым [20]. Оценка биспектральной плотности, используемая в работе [20], в некоторых деталях отличается от оценки (9) данной работы. Тем не менее результаты [20] со всей определенностью свидетельствуют о том, что в ряде случаев уже при $n = 2^{10}$ применение весовых функций высших порядков может привести к существенному выигрышу в точности оценивания.

Если же говорить о весовых функциях второго порядка, то наши рекомендации сводятся к тому, что использование прямоугольной весовой функции $w(x)$ нежелательно: оно может привести к появлению заметных флуктуаций оценки $f_n^{(3)}(\omega)$, не отражающих истинного поведения оцениваемой биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega)$.

В реальной обстановке по разным причинам может возникнуть ситуация, когда в предложенной нам для обработки реализации имеются систематические или случайные пропуски. Систематические пропуски (p пропусков после каждых m отсчетов) рассмотрены, в частности, в работе [5, п. 4]. Асимптотически несмещенная оценка биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega)$ дана здесь для $m > 2p$.

4. Построение оценки по выборке большого объема. Предположим теперь, что объем выборки N настолько велик, что обработать ее на ЭВМ целиком не представляется возможным. В этом случае у нас нет другого выхода, кроме как разбить исходную выборку на массивы меньшего объема, вычислить по каждому из них периодограмму третьего порядка и затем найти осредненную (по числу массивов) периодограмму, которая (вместо используемой нами в разд. 3 периодограммы (5)) и кладется в основу вычисления оценки $f_N^{(3)}(\omega),\ \omega \in Q$, биспектральной плотности.

Если число отсчетов N ССП $X(t)$ достаточно велико, то дисперсия оценки $f_N^{(3)}(\omega)$ будет мала. Смещение оценки $f_N^{(3)}(\omega)$, возникающее за счет осреднения периодограммы по частотному аргументу, также может быть сделано пренебрежимо малым за счет надлежащего выбора осредняющей весовой функции $w(x)$ и числового параметра h (см. разд. 3). И лишь смещение осредненной (по числу массивов) периодограммы с ростом объема выборки N не убывает: оно совпадает со смещением периодограммы, построенной по каждому из наших массивов меньшего объема. Таким образом, приходим к следующей задаче: как уменьшить смещение периодограммы, построенной по выборке фиксированной (но не слишком малой) длины?

Для $n \geq 2$ определим периодограмму третьего порядка $I_{2n}(\omega_1, \omega_2)$ соотношением

$$I_{2n}(\omega_1, \omega_2) = C_n \prod_{j=1}^{3} \sum_{t_j=-2n}^{2n} \theta(t_j) X(t_j) \exp(-it_j\omega_j), \tag{10}$$

где $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \equiv 0(\mathrm{mod} 2\pi)$;

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3|t| + 6nt^2 - 3|t|^3}{2n(2n^2+1)}, & |t/n| \leq 1, \\ \dfrac{(2n-|t|)\{(2n-|t|)^2 - 1\}}{2n(2n^2+1)}, & 1 \leq |t/n| \leq 2; \end{cases} \tag{11}$$

$$C_n = \frac{70n(2n^2+1)^3}{\pi^2(1979n^8 + 1785n^6 + 1617n^4 + 1675n^2 + 504)} \tag{12}$$

или

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 - 6\left(\dfrac{t}{2n}\right)^2 + 6\left|\dfrac{t}{2n}\right|^3, & |t/n| \leq 1, \\ 2\left(1 - \left|\dfrac{t}{2n}\right|\right)^3, & 1 \leq |t/n| \leq 2; \end{cases} \tag{13}$$

$$C_n = \frac{560n^7}{\pi^2(1979n^8 + 77n^4 + 170n^2 + 84)}. \tag{14}$$

Как и окно данных (6), окна (11) и (13) положительно определены, а их дискретными преобразованиями Фурье являются ядра (3) и (4) соответственно.

Как и в разд. 3, представим биспектральную плотность $f^{(3)}(\omega)$ в виде $f^{(3)}(\omega) = g_1(\omega) + i g_2(\omega)$, где функции $g_j(\omega)$, $j = 1, 2$, вещественны.

Теорема 4. Пусть все частные производные второго порядка функций $g_j(\omega_1, \omega_2)$, $j = 1, 2$, ограничены (по абсолютной величине) некоторой постоянной K. Тогда для периодограммы $I_{2n}(\omega)$, определенной формулами (10)–(12) или же формулами (10), (13) и (14), справедливо соотношение

$$\sup_{\omega \in Q} \left| \left\langle I_{2n}(\omega) \right\rangle - f^{(3)}(\omega) \right| = O(n^{-2}).$$

Заключение. В разд. 2–4 данной работы собраны воедино результаты и рекомендации по биспектральному анализу ССП, ранее опубликованные в [5–10, 12, 20]. Приведены точные определения всех рассматриваемых математических объектов (семиинвариантов и отвечающих им спектральных плотностей), указаны свойства симметрии биспектральной плотности $f^{(3)}(\omega)$, сформулированы теоремы, касающиеся асимптотического (при неограниченном возрастании объема выборки) поведения всех рассматриваемых статистических оценок функции $f^{(3)}(\omega)$. В распоряжение исследователя предоставлена совокупность методов и алгоритмов, позволяющих в заданных условиях построить непараметрическую оценку биспектральной плотности с благоприятными статистическими свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Swami A., Giannakis G. B., Zhou G.** Bibliography on higher-order statistics // Signal Processing. 1997. **60**, N 1. P. 65
2. **Новиков А. К.** Полиспектральный анализ. С.-Пб.: ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 2002.
3. **Латышев В. В., Рыжак И. С.** Применение моментов, кумулянтов и спектров высоких порядков в современных методах обработки сигналов. М.: Изд-во МАИ, 1998.
4. **Журбенко И. Г.** Анализ стационарных и однородных случайных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
5. **Алексеев В. Г.** Некоторые вопросы оценивания биспектральной плотности стационарного случайного процесса // Проблемы передачи информации. 1983. **19**, № 3. С. 38.
6. **Алексеев В. Г.** Некоторые вопросы биспектрального анализа стационарных случайных процессов и однородных случайных полей // Проблемы передачи информации. 1985. **21**, № 4. С. 34.
7. **Алексеев В. Г.** О свойствах симметрии старших спектральных плотностей стационарных случайных процессов // Мат. заметки. 1987. **41**, № 5. С. 758.
8. **Алексеев В. Г.** О некоторых свойствах статистических оценок старших спектральных плотностей // Теория вероятностей и ее применения. 1990. **35**, № 3. С. 431.
9. **Алексеев В. Г.** Биспектральный анализ стационарных случайных процессов: выборки большого объема // Автометрия. 1990. № 5. С. 23.
10. **Алексеев В. Г.** О некоторых важнейших свойствах периодограмм старших порядков // Теория вероятностей и ее применения. 1995. **40**, № 3. С. 481.
11. **Бриллинджер Д.** Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980.
12. **Van Ness J. W.** Asymptotic normality of bispectral estimates // Ann. Math. Statist. 1966. **37**, N 5. P. 1257.

13. **Ширяев А. Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980.

14. **Алексеев В. Г.** Ядра типа Джексона и Джексона – Валле-Пуссена и их вероятностные применения // Теория вероятностей и ее применения. 1996. **41**, № 1. С. 170.

15. **Алексеев В. Г.** Оценка спектральной плотности типа Уэлча. Случай дискретного аргумента // Автометрия. 2001. № 6. С. 91.

16. **Яглом А. М.** Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

17. **Алексеев В. Г.** Некоторые практические рекомендации по спектральному анализу гауссовских стационарных случайных процессов // Проблемы передачи информации. 1973. **9**, № 4. С. 42

18. **Алексеев В. Г.** О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема // Проблемы передачи информации. 1980. **16**, № 1. С. 42

19. **Алексеев В. Г.** Выбор спектрального окна при построении оценки спектральной плотности // Радиотехника. 1999. № 9. С. 38.

20. **Калмыков В. А.** О вычислении биспектров стационарных случайных процессов // Проблемы передачи информации. 1983. **19**, № 4. С. 100.

Институт физики атмосферы
им. А. М. Обухова РАН

Поступила в редакцию
4 июля 2005 г.