

Ю. К. Димитриев*(Новосибирск)***УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ
СТРУКТУРНОЙ ЖИВУЧЕСТИ
ВЛОЖЕННОГО ДИАГНОСТИЧЕСКОГО ГРАФА
ОТ НУМЕРАЦИИ МОДУЛЕЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
С ТОРОИДАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ***

Рассматриваются отказоустойчивые вычислительные системы массового параллелизма со связями «точка–точка». Предлагаемая работа является продолжением изучения зависимости вложенного диагностического циркулянтного графа от нумерации вершин графа, в который осуществляется вложение. В качестве графа, в который осуществляется вложение (рабочий граф), используется граф прямого произведения циклических групп. Вложение основано на разбиении рабочего графа на смежные классы по подгруппе степеней выбранного элемента. Найдены условия, при которых структурная живучесть вложенного графа в целом или его фрагментов не зависят от применяемой нумерации.

Введение. Диагностические свойства вычислительных систем (ВС) с массовым параллелизмом, в которых субъектами и объектами диагностики при множественных отказах служат полные обрабатывающие модули, зависят от структуры связей между тестирующими и тестируемыми модулями [1]. Для получивших практическое применение однородных структур (рабочие структуры), в которых каждый модуль связан с небольшим числом других модулей, применение подхода [1] дает малые значения кратности t допустимых неисправностей по сравнению с общим числом модулей системы и, следовательно, невысокую живучесть ВС, т. е. способность системы к продолжению функционирования в присутствии неисправных элементов.

Для увеличения живучести ВС без увеличения вершинной степени графа, представляющего ее систему межмодульных связей, в [2] предложено реализовать диагностическую структуру как вложенную в рабочую. Диагностические связи между тестирующим и тестируемым модулями, которые не являются соседними в рабочей структуре, образуются в виде составных каналов, формируемых в межмодульной сети связи. При этом задача формирования диагностического графа сводится к проблеме нумерации вершин графа, представляющего рабочую структуру ВС. В работе [2] рассмотрена проб-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-08-01301а).

лема вложения диагностического циркулянтного графа, обеспечивающего t -диагностируемость без ремонта [1], в рабочую структуру, в качестве которой использован двумерный тор (граф прямого произведения циклических групп). Показана зависимость структурных характеристик вложенного диагностического графа от способа нумерации. Последний основан на разбиении группы на смежные классы по подгруппе, представляющей собой циклическую группу степеней выбранного (порождающего) элемента группы.

В [3] введены показатели, позволяющие оценивать живучесть вложенной диагностической структуры, и изучена зависимость этих показателей от выбора порождающего элемента. Целью предлагаемой работы является исследование зависимости структурной живучести от порядка нумерации элементов классов смежности при заданном порождающем элементе.

Обозначения и определения. Структура межмодульной сети связи масово-параллельной ВС, используемой для реализации диагностической структуры системы, представлена рабочим графом $G' = (V, E')$, в котором V – множество вершин, сопоставленных с обрабатываемыми модулями системы, а E' – множество ребер, отображающих межмодульные связи. Рабочий граф есть двумерный тор – диаграмма Кэли группы E_2 прямого произведения нормальных циклических подгрупп C_H и C_W (далее E_2 -граф):

$$E_2 = C_H \otimes C_W,$$

где H и W – порядки циклических подгрупп; \otimes – символ прямого произведения. Число вершин E_2 -графа $N = H \times W = |V|$. Отметками ребер E_2 -графа служат символы образующих элементов g_0 и g_1 подгрупп C_W и C_H соответственно.

В качестве диагностического графа используется циркулянт $D = (N; s_1, s_2, \dots, s_t)$, где N – число вершин графа и $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_t$; t – кратность допустимых системных отказов [1]: $t = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$. Вершины циркулянта перенумерованы числами от 0 до $N-1$, причем i -я вершина ($0 \leq i \leq N-1$) смежна с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_t \pmod{N}$. В [1] установлено, что циркулянт, в котором $s_1 = 1, s_2 = 2, \dots, s_t = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$, является оптимальным графом t -диагностируемой без ремонта системы. Оптимальность означает, что число дуг диагностического графа (число тестов над модулями системы) является необходимым и достаточным для однозначной идентификации всех присутствующих в системе неисправных модулей (диагностирование без ремонта).

При вложении в рабочий граф диагностического циркулянтного графа [2] его вершины есть вершины рабочего графа, а дуги, сопоставленные со связями пар модулей «тестирующий–тестируемый», или тестовыми связями, представляют собой кратчайшие пути между вершинами рабочего графа. Эти пути исчисляются исходя из соответствия присвоенных вершинам рабочего графа уникальных номеров (абсолютных адресов вершин вложенного циркулянта), принимающих значения от 0 до $N-1$, их групповым описаниям. Используемое в [2, 3] и в данной работе вложение диагностического графа основано на разбиении группы E_2 на смежные (для определенности – правые) классы по подгруппе $\Gamma^{(x,y)}$, состоящей из всех степеней выбранного элемента $g_0^x g_1^y$ группы, называемого порождающим. Здесь $0 \leq x \leq \lfloor W/2 \rfloor, 0 \leq y \leq \lfloor H/2 \rfloor$.

При реализации диагностирования системы на основе использования вложенного диагностического графа в качестве тестовых связей могут использоваться любые пути, формируемые между тестирующим и тестируемым модулями с помощью алгоритмов маршрутизации, которые применяются для передачи сообщений. Поэтому тестовая связь однозначно характеризуется парой концевых вершин (неориентированного) пути (далее маршрут), представляющего эту связь в рабочем графе. Пусть i и j – абсолютные номера тестирующей и тестируемой вершин ($i, j = 0, (N-1)$), а $g_0^{x_i} g_1^{y_i}$ и $g_0^{x_j} g_1^{y_j}$ – их групповые описания. Тогда тестовой связи (i, j) соответствует слово $g_0^{(x_j - x_i) \bmod W} g_1^{(y_j - y_i) \bmod H} = g_0^{x_{ij}} g_1^{y_{ij}}$, представляющее собой адрес вершины j относительно вершины i .

О п р е д е л е н и е 1. Описанием тестовой связи (i, j) назовем пару чисел $(|x_{ij}|, |y_{ij}|) = \tilde{w}(i, j)$.

Соединением заданной пары вершин i и j для неоднородного графа называют совокупность из $\min(v_i, v_j)$ непересекающихся кратчайших маршрутов между ними (здесь v_i, v_j – степени вершин i и j соответственно). Живучесть соединения является некоторой функцией среднего значения длины маршрута в соединении, рассчитываемого с учетом соотношения расстояния между концевыми вершинами и порядков W, H нормальных подгрупп C_W и C_H рабочего графа. Используемый в [3] и в данной работе интегральный численный показатель \mathfrak{R} живучести структуры представляет собой усредненное по всем возможным тестовым связям значение живучести соответствующих им соединений. Анализ показал, что структурная живучесть соединения при заданных параметрах H и W рабочего графа и значениях x и y порождающего элемента находится во взаимно однозначном соответствии с описанием соответствующей тестовой связи. Таким образом, набор описаний всех возможных тестовых связей является первичной информацией для расчета показателя \mathfrak{R} .

Структуры считают эквивалентными по живучести [3], если совпадают рассчитываемые для них значения показателя \mathfrak{R} . Это совпадение может быть: 1) результатом идентичности наборов описаний тестовых связей; 2) результатом усреднения по маршрутам, составляющим соединение; 3) результатом усреднения по соединениям; 4) следствием округления получаемых численных значений.

В данной работе анализируются условия эквивалентности вычислительных систем по структурной живучести, которая обусловлена только идентичностью наборов описаний тестовых связей.

В работе [2] показано, что все вершины, входящие в один класс смежности по подгруппе $\Gamma^{(x, y)}$, имеют одинаковые наборы описаний тестовых связей.

При разбиении группы на смежные классы по подгруппе $\Gamma^{(x, y)}$ множество вершин рабочего графа, имеющего структуру $H \times W$, делится на P непересекающихся подмножеств (называемых кластерами) по Q вершин в каждом: $PQ = N$. Кластер составляют элементы всех классов смежности, образованных по подгруппе $\Gamma^{(x, y)}$ (включая элемент последней). Все кластеры имеют структуру решетки размером $h \times w$, где $h \times w = Q$ и $Q \geq 2$; при этом выполняются следующие соотношения: $H = P_H h$; $W = P_W w$, где P_H и P_W – целые числа. Кластеры образуют покрытие рабочего графа без просветов и наложе-

ний. В каждом из кластеров одноименные позиции, характеризуемые значениями (j, i) , $j = \overline{0, (h-1)}$, $i = \overline{0, (w-1)}$, принадлежат одному и тому же классу смежности. Будем нумеровать кластеры числами от 0 до $P-1$ в направлении порождающего элемента, начиная с кластера, которому принадлежит вершина с номером 0, сопоставленная с единичным элементом группы E_2 . Назовем этот кластер опорным или 0-кластером; кластер с номером f – f -кластером.

Выбор порождающего элемента $g_0^x g_1^y$ для структуры, заданной значениями H и W , определяет параметры w, h кластеров и их размещение в структуре. В связи с этим будем говорить, что четверка (H, W, x, y) задает вложение диагностического графа в рабочий.

Начальными назовем вершины с номерами от 0 до $Q-1$ для вложений, дающих кластеры с числом Q вершин. Согласно принятому способу нумерации [3] начальные вершины относятся к разным классам смежности; таким образом, номер начальной вершины задает номер класса смежности, в который она входит.

О п р е д е л е н и е 2. Несмещенной назовем нумерацию, при которой начальные вершины всех смежных классов принадлежат опорному кластеру. В противном случае нумерация будет смещенной.

В представленной работе изучаются несмещенные нумерации.

Принадлежность вершин кластеров классам смежности зададим матрицей M , которая называется топологической:

$$M = \|m_{ji}\|, \quad j = \overline{0, (h-1)}, \quad i = \overline{0, (w-1)}.$$

Она состоит из w столбцов и h строк. Элементы m_{ji} топологической матрицы также называются топологическими. Они нумеруются сверху вниз по строкам и слева направо по столбцам. При несмещенной нумерации попарно различные значения $]j, i[$ из диапазона $q = \overline{0, (Q-1)}$ присваиваются элементам топологической матрицы опорного кластера произвольно. Сопоставим каждый кластер с отдельной матрицей вида M . Благодаря свойству симметричности рабочего групп-графа, одноименные элементы всех таких матриц сопоставлены с элементами одного и того же класса смежности. Однако значения $]j, i[$ одноименных элементов топологических матриц зависят от номера кластера и значения топологического элемента m_{ji} опорного кластера.

На рис. 1, *a-c* показаны некоторые способы вложения для (6×15) -графа и нумерация кластеров для разных порождающих элементов при $Q = 6$. На рисунке узлы решетки отображают вершины рабочего графа (вершины опорного кластера выделены жирными точками), а жирные линии – линии деления на кластеры. Подписи под рисунками вида (x, y) указывают степени порождающего элемента. В используемом графическом представлении вершина рабочего групп-графа, соответствующая элементу m_{00} топологической матрицы опорного кластера, располагается в левом верхнем углу решетки, а направление образующих элементов g_0 и g_1 есть направление слева направо и сверху вниз соответственно. На рис. 1, *d* представлена некоторая несмещенная нумерация опорного кластера и кластеров $S-1$ и S для вложения, характеризуемого значениями $(x, y) = (3, 2)$.

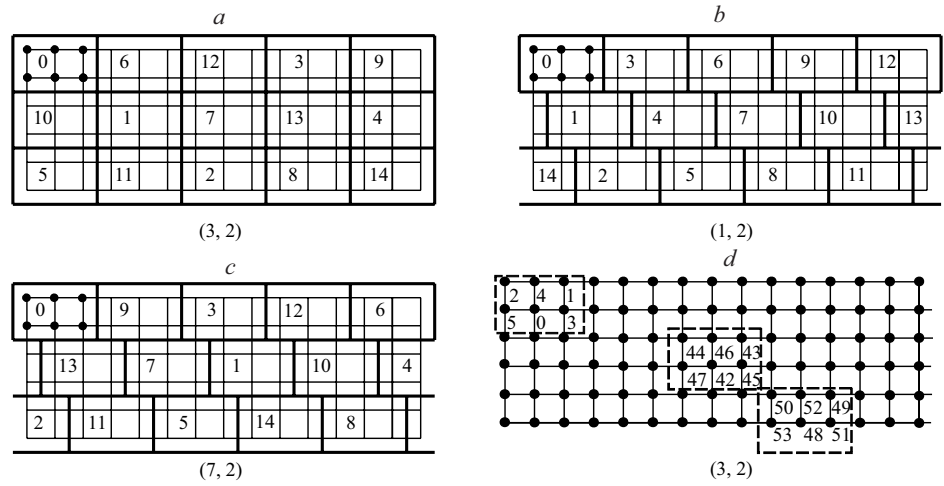


Рис. 1

Граф представителей. Свойство симметричности диагностического групп-графа позволяет оценивать структурную живучесть заданного вложения структурной живучестью подграфа представителей тестирующих и тестируемых вершин. Примем, что представителями тестирующих вершин служат начальные вершины классов смежности. Для несмещенной нумерации это вершины 0-кластера, составляющие множество $A = \{0, 1, \dots, q, \dots, Q - 1\}$. Обозначим $B(q)$ множество представителей тестируемых вершин для q -го представителя тестирующих вершин. Тогда $B(q) = \{q + 1, q + 2, \dots, q + t\}$; $t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$; $q = 0, (Q - 1)$. Например, для (6×15) -графа при $Q = 6$ и $t = 44$ имеем $B(5) = \{6, 7, \dots, 48, 49\}$ (см. рис. 1, *d*).

Граф $G = (V, E)$ представителей вложенного диагностического графа D — это ориентированный взвешенный подграф графа D , индуцированный множеством вершин $V = A \cup \bigcup_{q=0}^{Q-1} B(q)$. Дугам графа G присваивается вес; вес

дуги (i, j) представляет собой описание $\tilde{w}(i, j)$ тестовой связи между вершинами i и j . Далее будем рассматривать граф представителей, а под тестирующими и тестируемыми вершинами будем подразумевать представителей соответствующих вершин.

По определению диагностического графа D каждая тестирующая вершина имеет связи с t -тестируемыми, $t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$, так что $|V| = t + Q$, и в подграфе G имеется $\tau = t + Q - 1$ вершин, тестируемых хотя бы одной тестирующей. Множество V состоит из $S = \lfloor (t + Q)/Q \rfloor$ «полных» кластеров, все элементы которых являются тестирующими или тестируемыми вершинами, и одного «неполного», состоящего из

$$r = (t + Q) - SQ \quad (1)$$

тестируемых вершин. Полные кластеры имеют номера от 0 до $S - 1$, а неполный — номер S .

Анализ показал, что r принимает ограниченное число значений в зависимости от четности N, P и Q : $r = Q - 1$, если N и P четные; $r = (Q/2) - 1$, если N четное и P нечетное; $r = (Q - 1)/2$, если N и P нечетные. Заметим, что структура, имеющая четное N и нечетные P и Q , не существует; при $r = Q - 1$ значение Q может быть четным или нечетным, а при $r \neq Q - 1$ четность Q совпадает с четностью N .

Представим $B(q)$ в виде трех непересекающихся множеств $B(q) = B^{(0)}(q) \cup B^{(1)}(q) \cup B^{(2)}(q)$ таких, что

$$B^{(0)}(q) \subset A; \quad B^{(0)}(q) = \{q + 1, q + 2, \dots, Q - 1\};$$

$$B^{(1)}(q) = \{Q, Q + 1, Q + 2, \dots, (S - 1)Q - 1\};$$

$$B^{(2)}(q) = \{(S - 1)Q, (S - 1)Q + 1, \dots, t + q\}.$$

Элементами указанных множеств являются номера соответствующих вершин графа. Будем рассматривать три подграфа графа G , индуцируемых множествами вершин $V^{(0)}, V^{(1)}$ и $V^{(2)}$:

$$G^{(0)} = (V^{(0)}, E^{(0)}); \quad V^{(0)} = A \cup \bigcup_{q=0}^{Q-1} B^{(0)}(q) = A;$$

$$G^{(1)} = (V^{(1)}, E^{(1)} - E^{(0)}); \quad V^{(1)} = A \cup \bigcup_{q=0}^{Q-1} B^{(1)}(q);$$

$$G^{(2)} = (V^{(2)}, E^{(2)} - E^{(0)}); \quad V^{(2)} = A \cup \bigcup_{q=0}^{Q-1} B^{(2)}(q),$$

где $E^{(0)}, E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ – множества дуг, инцидентных вершинам из $V^{(0)}, V^{(1)}$ и $V^{(2)}$.

Пример. Для (6×15) -графа при $t = 44$ и $Q = 6$ имеем: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $V^{(0)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $V^{(1)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 41\}$, $V^{(2)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 42, \dots, 49\}$.

Эквивалентные нумерации. Как было отмечено, структурная живучесть диагностического вложенного графа характеризуется перечислением описаний тестовых связей его графа представителей, которое называем рядом описаний (RD). Часть ряда описаний, относящуюся к некоторому подграфу G_1 графа представителей, обозначаем $RD(G_1)$.

Определение 3. Тестовые связи с описаниями $\tilde{w}_1 = (|x_{ij}|, |y_{ij}|)$ и $\tilde{w}_2 = (|x_{kl}|, |y_{kl}|)$ называем эквивалентными: $\tilde{w}_1 \sim \tilde{w}_2$, если $|x_{ij}| = |x_{kl}|$ и $|y_{ij}| = |y_{kl}|$.

Соединения, соответствующие эквивалентным тестовым связям, для заданного вложения имеют одинаковые значения показателя \mathfrak{R} структурной живучести [3]. Отношения эквивалентности применимы также к рядам описаний в целом и к любым выделенным их фрагментам.

Определение 4. Пусть num1 и num2 – некоторые нумерации для заданного вложения (H, W, x, y) , а $RD(\text{num1})$ и $RD(\text{num2})$ – порождаемые ими ряды описаний. Если для каждого элемента $RD(\text{num1})$ найдется эк-

вивалентный ему элемент $\text{RD}(\text{num}2)$, то указанные ряды описаний эквивалентны: $\text{RD}(\text{num}1) \sim \text{RD}(\text{num}2)$, а соответствующие им значения показателя структурной живучести совпадают. Значит, $\text{RD}(\text{num}1) \sim \text{RD}(\text{num}2) \rightarrow \mathfrak{R}(\text{num}1) = \mathfrak{R}(\text{num}2)$.

Рассмотрим теперь подграфы $G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}$ и относящиеся к ним фрагменты ряда описаний RD .

Утверждение 1. Для заданного вложения (H, W, x, y) часть $\text{RD}(G^{(0)}, G^{(1)})$ инвариантна к несмещенной нумерации.

Доказательство. Подграф $G^{(0)}$ представляет собой ориентированный подграф полного (ориентированного) графа $K_p = (V^{(0)}, E_p)$, индуцированного множеством $V^{(0)}$, и такой, в котором сохраняется отношение смежности графа K_p .

В самом деле, для заданного $V^{(0)} = \{0, 1, \dots, Q-1\}$ каждому сочетанию элементов из $V^{(0)}$ по два отвечает пара противоположно направленных дуг полного графа. Значит, для графа K_p ряд описаний содержит описания всех возможных тестовых связей между его вершинами.

По построению в подграфе $G^{(0)}$ каждая вершина q_1 связана со всеми вершинами q_2 , удовлетворяющими отношению $q_1 < q_2$. Это отношение каждой паре (q_1, q_2) графа K_p ставит в соответствие в точности одну дугу $(q_1, q_2) \in E^{(0)}$ графа $G^{(0)}$. Следовательно, при любой нумерации в $\text{RD}(G^{(0)})$ входит описание тестовой связи (q_1, q_2) или (q_2, q_1) для всех $q_1, q_2 \in V^{(0)}$. Это доказывает, что $\text{RD}(G^{(0)})$ не зависит от порядка нумерации вершин опорного кластера.

Граф $G^{(1)}$ представляет собой полный двудольный граф: $G^{(1)} = K_{Q, Z}$, где $Z = |V^{(1)} - A|$. Свойства используемой нумерации таковы, что изменение взаимного расположения номеров в опорном кластере не меняет состава других кластеров и ведет только к перемене взаимного расположения номеров в каждом отдельном кластере. Полнота $G^{(1)}$ означает, что $\text{RD}(G^{(1)})$ содержит описания всех возможных тестовых связей из A в $\bigcup_{q=0}^{Q-1} B^{(1)}(q)$. Следовательно, $\text{RD}(G^{(1)})$ также не зависит от использованной нумерации.

Следствие 1. Для заданного вложения (H, W, x, y) значение $\mathfrak{R}(G^{(0)}, G^{(1)})$ не зависит от используемой несмещенной нумерации.

Основываясь на утверждении 1, можно существенно сократить время расчета структурной живучести при сравнительном изучении нумераций (для заданного вложения число нумераций равно числу перестановок из Q элементов). Рассчитывать необходимо только часть RD , связанную с $\text{RD}(G^{(2)})$. Сложность этой задачи имеет порядок $O(Q^2)$, тогда как сложность определения структурной живучести без использования результатов утверждения 1 имеет порядок $O(tQ)$.

Обозначим M' и M'' топологические матрицы, относящиеся к кластерам $S-1$ и S . Тогда при несмещенной нумерации, если в M топологический элемент m_{ji} имеет значение q , $q \in \{0, 1, \dots, Q-1\}$, во-первых, в M' топологический элемент m'_{ji} принимает значение $(S-1)Q + q$ (для простоты будем

записывать это в виде $m'_{ji} = (S-1)Q + q$, а, во-вторых, в M'' топологический элемент m''_{ji} принимает значение $SQ + q$, когда $Q-1 > r > 0$ и $q < r$, в противном случае $m''_{ji} = \emptyset$. Назовем элементы m'_{ji} и m''_{ji} первичным и вторичным образами элемента m_{ji} ; элемент m_{ji} является прообразом элементов m'_{ji} и m''_{ji} .

$G^{(2)}$ -граф. Граф $G^{(2)} = (V^{(2)}, E^{(2)})$ будем рассматривать как совокупность четырех двудольных графов $G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, G_3^{(2)}, G_4^{(2)}$, индуцированных соответственно множествами вершин: $V_1^{(2)} = \{A, B_c(S-1)\}, V_2^{(2)} = \{A_r, B_r(S-1)\}, V_3^{(2)} = \{A_c, B_r(S-1)\}, V_4^{(2)} = \{A_r, B_r(S)\}$.

Представим множество $V^{(2)} - A$ в виде объединения подмножеств тестируемых вершин из кластеров $S-1$ и S :

$$\bigcup_{q=0}^{Q-1} B^{(2)}(q) = B_c(S-1) \cup B_r(S-1) \cup B_r(S),$$

где $B_c(S-1) = \bigcap_{q=0}^{Q-1} B^{(2)}(q)$ – множество вершин из $(S-1)$ -кластера, тестируемых всеми вершинами из A ; $B_r(S-1)$ – остаточное множество вершин из $(S-1)$ -кластера; $B_r(S) = \{SQ, SQ+1, \dots, SQ+r-1\}$ – множество тестируемых вершин из S -кластера.

Как было отмечено, $r = |B_r(S)|$. Нетрудно установить, что для $r \neq Q-1$ мощность m множества $B_c(S-1)$ составляет $m = Q + r - (Q-1) = r+1$, или $m = \lceil Q/2 \rceil$, а $|B_r(S-1)| = Q - m$.

Обозначим $A_c \subset A$ такое, что $A_c = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, и $A_r = A - A_c$. Пусть A^* – некоторое подмножество множества A . Множество A^* общего вида обладает следующим свойством.

Свойство 1. Для любого $A^* \subseteq A$ выполняется

$$\bigcap_{q \in A^*} B^{(2)}(q) = \{(S-1)Q, (S-1)Q+1, \dots, t + q_{\min}\},$$

где q_{\min} – элемент из A^* , имеющий наименьшее значение.

Отсюда непосредственно вытекает

Свойство 2. Если $A^* = A_r$, то $\bigcap_{q \in A_r} B^{(2)}(q) \subseteq B(S-1)$.

Утверждение 2. Для всяких нумераций $\text{num1} \neq \text{num2}$ заданного вложения (H, W, x, y)

$$\text{RD}(G_1^{(2)}, G_2^{(2)} : \text{num1}) \sim \text{RD}(G_1^{(2)}, G_2^{(2)} : \text{num2}).$$

Доказательство. Из построения графа $G^{(2)}$ следует, что двудольный граф, индуцированный множеством $V_1^{(2)}$, является полным. Из

свойства 2 вытекает, что двудольный граф, индуцируемый множеством $V_2^{(2)}$, также является полным. Значит, соответствующие части ряда описаний инвариантны к используемой нумерации вершин опорного кластера, что и требовалось доказать.

Полученный результат означает, что при сравнении нумераций достаточно ограничиться рассмотрением $RD(G_3^{(2)}, G_4^{(2)})$.

Величина $m = |B_c(S-1)|$ принимает наибольшее возможное значение при $r = Q - 1$. В этом случае в графе $G^{(2)}$: $A_c = A$, $B_c(S-1) = B(S-1)$, $B_r(S-1) = \emptyset$. Другими словами, при $r = Q - 1$ граф $G^{(2)}$ представляет собой двудольный граф, индуцированный множеством вершин $\{A, B_r(S)\}$. Он является подграфом полного ориентированного взвешенного двудольного графа $K_{A, B(S)}$, индуцированного множеством $\{A, B(S)\}$, где $B(S)$ – первичные образы элементов опорного кластера, описываемые матрицей M' .

Представим граф $K_{A, B(S)}$ в ярусной форме. Ярусы сопоставим с элементами топологической матрицы M и упорядочим по возрастанию индексов ее элементов; нумерация ярусов осуществляется по модулю Q . В графе $K_{A, B(S)}$ к ярусу k , $k = \overline{0, (Q-1)}$, относятся элемент m_{ji} матрицы M , для которого выполняется $k = (jw + i) \bmod Q$, и образ этого элемента, т. е. к одному ярусу относятся элементы из одного класса смежности. Элементы k -го яруса обозначим L_k и L'_k , где $L_k \in A$ и $L'_k \in B(S)$. Вес дуги (L_{k_1}, L'_{k_2}) , $k_1, k_2 = \overline{0, (Q-1)}$, графа $K_{A, B(S)}$ представляет собой описание тестовой связи (m_{ji}, m'_{ji}) . Он определяется топологическим местом элементов, сопоставленных с вершинами L_{k_1} и L'_{k_2} , в матрицах M и M' соответственно. Этот вес не зависит от используемой нумерации (т. е. от значений рассматриваемых элементов топологической матрицы). В связи с этим сам граф и веса его дуг называем топологическими.

Нумерация вершин рабочего графа отображается присвоением вершинам $K_{A, B(S)}$ весов, которые равны значениям сопоставленных им элементов топологических матриц M и M' . Таким образом, веса вершин графа $K_{A, B(S)}$ задают подграф $G^{(2)} = (V^{(2)}, E^{(2)})$ согласно правилу: дуга $(L_{k_1}, L'_{k_2}) \in E^{(2)}$, если и только если для весов v_{k_1} и v'_{k_2} вершин L_{k_1} и L'_{k_2} выполняется $v_{k_1} \geq v'_{k_2} - t$.

По умолчанию используем веса вершин, соответствующие значению элементов топологической матрицы опорного кластера согласно правилу $]j, i[= wj + i$.

Конструкция двудольного графа $K_{A, B(S)}$ для рабочего (4×8) -графа при $t = 15$, $Q = 1 \times 4$ и $r = Q - 1 = 3$ показана пунктиром на рис. 2, а. Представленному на этом рисунке вложению соответствует порождающий элемент g_0g_1 , а нумерации, представленной на рис. 2, b, – веса вершин графа $K_{A, B(S)}$. Дуги графа $G^{(2)}$ здесь выделены сплошными линиями.

Свойство 3. В графе $G^{(2)}$ при $r = Q - 1$:

3.1. Для всяких $q \in A$ и $q' = t + Q - q$, $q' \in B(S)$, степени вершин q и q' равны значению q .

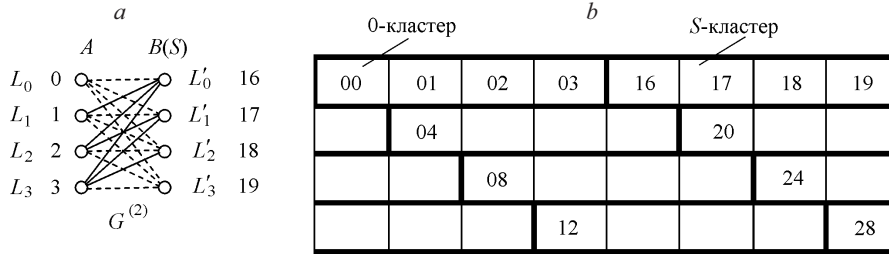


Рис. 2

3.2. Для всякого $q \in A$, $q = \overline{1, Q}$, выполняется $B(S) \cap B(q) = \{t + q, t + q - 1, \dots, t + 1\}$.

Поскольку элементы m_{ji} и m'_{ji} занимают одно и то же топологическое место в соответствующих кластерах, выполняются следующие свойства, не зависящие от значения параметра r .

Свойство 4. Для любых $m_1, m_2 \in M$ и их образов $m'_1, m'_2 \in M'$ выполняется $\tilde{w}(m_1, m'_1) \sim \tilde{w}(m_2, m'_2)$.

Свойство 5. Для любых $m_1, m_2 \in M$ и их образов $m'_1, m'_2 \in M'$ выполняется $\tilde{w}(m_1, m_2) \sim \tilde{w}(m'_1, m'_2)$.

Пусть m_i – некоторый столбец, а m_j – некоторая строка матрицы M . Опираясь на свойства 4 и 5, легко получить

Свойство 6. Для любых $m_1, m_2 \in m_i$ и произвольного элемента $m_k \in M'$ компоненты x описания связей $\tilde{w}(m_1, m_k)$ и $\tilde{w}(m_2, m_k)$ совпадают: $x_{m_1, m_k} = x_{m_2, m_k}$.

Свойство 7. Для любых $m_1, m_2 \in m_j$ и произвольного элемента $m_k \in M'$ компоненты y описания связей $\tilde{w}(m_1, m_k)$ и $\tilde{w}(m_2, m_k)$ совпадают: $y_{m_1, m_k} = y_{m_2, m_k}$.

Заметим, что, благодаря симметрии $(S - 1)$ - и S -кластеров и опорного, при $r \neq Q - 1$ аналогичные свойства имеют место также для элементов матриц M и M'' .

Рассчитаем значения компонент описания тестовой связи между произвольно выбранным элементом опорного кластера и его первичным образом для вложения, имеющего $r = Q - 1$, т. е. определим веса дуг топологического графа $K_{A, B(S)}$, инцидентных вершинам одного яруса. Обозначим компоненты этой тестовой связи по направлению образующих g_0 и g_1 через K_W и K_H соответственно.

Лемма 1. Если для вложения (H, W, x, y) выполняется $r = Q - 1$, то

$$K_W = \begin{cases} W/2, & \text{если } W \text{ четное;} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$K_H = \begin{cases} H/2, & \text{если } H \text{ четное;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Подставив в выражение (1) значение r из условия леммы, получим $t = SQ - Q + Q - 1 = SQ - 1$. Поскольку при $r = Q - 1$

значение N четно, то $t = (N - 2)/2$. Отсюда $(N - 2)/2 = SQ - 1$, или $N = 2SQ$. Так как $N = PQ$, то $P = 2S$. Другими словами, S -кластер, содержащий тестируемые вершины, равноудален от опорного кластера на S шагов по направлению порождающего элемента $g_0^x g_1^y$ и на S шагов в обратном направлении. Следовательно, для любого $m_{ji} \in M$ и его образа $m'_{ji} \in M'$ путь из m_{ji} в m'_{ji} можно записать в виде $(g_0^x g_1^y)^S$ или в виде $(g_0^{-x} g_1^{-y})^S$, откуда $(g_0^x g_1^y)^S = (g_0^{-x} g_1^{-y})^S$, или $g_0^{2Sx} g_1^{2Sy} = I$. Этому групповому представлению соответствует система сравнений

$$\begin{cases} 2Sx \equiv 0 \pmod{W}; \\ 2Sy \equiv 0 \pmod{H}. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку S -кластер не совпадает с опорным, выполняется хотя бы одно из несравнений:

$$\begin{cases} Sx \neq 0 \pmod{W}; \\ Sy \neq 0 \pmod{H}. \end{cases} \quad (3)$$

Для определенности, не нарушая общности анализа, примем, что выполняется первое из несравнений (3). Пусть $Sx \equiv K_W \pmod{W}$, где K_W – целое и $K_W > 0$. Рассмотрим кольцевой граф порядка W . Для него выполняется

$$\begin{cases} 2Sx \equiv 0 \pmod{W}; \\ Sx \equiv K_W \pmod{W}, \end{cases}$$

или $2K_W = cW$, где c – целое; отсюда $K_W = cW/2$. Из свойств кратчайшего пути в кольцевом графе следует, что K_W есть решение последнего уравнения при $c \in \{0, 1\}$. Величина K_W не зависит от значения x и принимает целочисленное значение, отличное от нуля, только для четного W . Следовательно, при нечетном W получаем $K_W = 0$, а при четном – $K_W = W/2$. Доказательство леммы завершено.

Аналогичный анализ, выполненный для $r \neq Q - 1$, дает следующие результаты.

Лемма 2. Если для вложения (H, W, x, y) выполняется $r = (Q/2) - 1$, то

$$K_W = \begin{cases} (W - x)/2, & \text{если } W \text{ и } x \text{ четное и } x < W/2 \text{ или если } W \text{ и } x \text{ нечетное;} \\ x/2, & \text{если } W \text{ и } x \text{ четное и } x = W/2, \end{cases}$$

$$K_H = \begin{cases} (H - x)/2, & \text{если } H \text{ и } y \text{ четное и } y < H/2 \text{ или если } H \text{ и } y \text{ нечетное;} \\ y/2, & \text{если } H \text{ и } y \text{ четное и } y = H/2. \end{cases}$$

Лемма 3. Если для вложения (H, W, x, y) выполняется $r = (Q - 1)/2$, то

$$\begin{cases} K_W = (W - x)/2; \\ K_H = (H - y)/2. \end{cases}$$

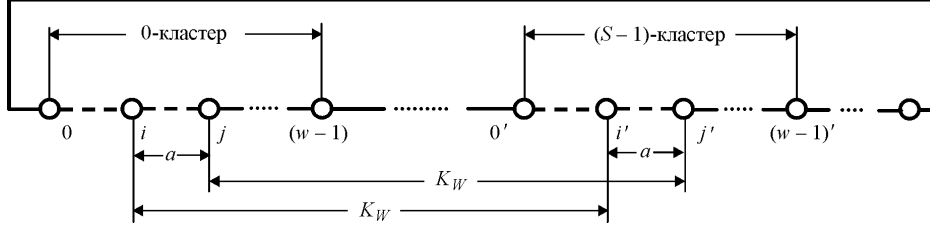


Рис. 3

При $r = Q - 1$ веса дуг топологического графа, инцидентные вершинам одного яруса, одинаковы. Определим теперь веса дуг между вершинами разных ярусов топологического графа.

Лемма 4. При $r = Q - 1$ для произвольно выбранных $m_{j_1 i_1}, m_{j_2 i_2} \in M$ таких, что $]j_1 i_1[= i$ и $]j_2 i_2[= j, i \neq j, i, j \in A$, выполняется $\tilde{w}(i, j') \sim \tilde{w}(j, i')$.

Доказательство. Обозначим $g_0^{x_i} g_1^{y_i}, g_0^{x_j} g_1^{y_j}, g_0^{x_{i'}} g_1^{y_{i'}}, g_0^{x_{j'}} g_1^{y_{j'}}$ групповые представления вершин i, j, i', j' соответственно. В терминах теории групп выражение $\tilde{w}(i, j') \sim \tilde{w}(j, i')$ запишется в следующем виде: $g_0^{|x_{j'} - x_i|} g_1^{|y_{j'} - y_i|} = g_0^{|x_j - x_{i'}|} g_1^{|y_j - y_{i'}|}$. Последнее равносильно выполнению системы сравнений

$$\begin{cases} |x_{j'} - x_i| \equiv |x_j - x_{i'}| \pmod{W}; \\ |y_{j'} - y_i| \equiv |y_j - y_{i'}| \pmod{H}. \end{cases} \quad (4)$$

Сравнения (4) можно рассматривать независимо, как соотношения для кольцевых графов с числом вершин W и H .

Рассмотрим для конкретности условия выполнения первого сравнения из (4). Согласно свойству 6 описания тестовых связей по компоненте x совпадают для всех элементов, составляющих столбцы, которым принадлежат вершины i, j, i', j' . Для определенности выберем i и $j, i \neq j$, из нулевой строки опорного кластера: $i, j \in \{0, 1, \dots, (w-1)\}$.

На рис. 3 показан кольцевой граф порядка W , представляющий собой проекцию рабочего графа на циклическую подгруппу C_W ; $x_i, x_{i'}, x_j, x_{j'}$ – проекции на C_W столбцов топологической матрицы, которым принадлежат элементы i, i', j, j' соответственно. Вследствие свойства 5 выполняется соотношение $|x_j - x_i| = |x_{j'} - x_{i'}| = a$; для элемента i и его образа i' выполняется $|x_{i'} - x_i| = |x_{j'} - x_j| = K_W$. Рассмотрим описания тестовых связей $(x_i, x_{j'})$ и $(x_j, x_{i'})$. Из рис. 3 видно, что длина связи $(x_i, x_{j'})$ составляет величину $(K_W + a)$, а длина связи $(x_j, x_{i'})$ – величину $(K_W - a)$. По условию о длине кратчайшего пути $K_W \leq \lfloor W/2 \rfloor$. Кроме того, расстояние $a \leq w - 1$, причем $w \leq \lfloor W/2 \rfloor$. Следовательно, $(K_W - a) < \lfloor W/2 \rfloor$. Условие совпадения описания тестовых связей $(x_i, x_{j'})$ и $(x_j, x_{i'})$ можно записать в виде

$$(K_W - a) \equiv (K_W + a) \pmod{W}, \quad (5)$$

или $(K_W - a) \equiv -(K_W - a) \pmod{W}$, где $-p \pmod{W} \equiv (W - p) \pmod{W}$. Из последних двух сравнений следует, что $(K_W + a) \equiv -(K_W - a) \pmod{W}$, откуда $2K_W \equiv 0 \pmod{W}$. Тогда сравнение (5) выполняется, если и только если K_W принимает значения из множества $\{0, W/2\}$, что, в свою очередь, выполняется лишь при $r = Q - 1$.

Поскольку для заданного W при любом h рабочий граф имеет одинаковую проекцию на циклическую подгруппу C_H , вышеприведенное справедливо также для $h=1$. Аналогично можно показать, что при $r = Q - 1$ выполняется второе выражение из (4).

Следствие 2. При $r = Q - 1$ для любых $i, j \in A$ выполняется $\tilde{w}(i, j') \sim \tilde{w}(j, i')$.

Итак, установлено, что при $r = Q - 1$ граф $K_{A, B(S)}$ обладает свойством равновесности: для любой пары ярусов двудольного топологического графа $K_{A, B(S)}$, содержащих вершины L_i, L'_i и L_j, L'_j , $i, j = \overline{0, (Q - 1)}$, веса дуг (L_i, L'_j) и (L_j, L'_i) совпадают.

Утверждение 3. При $r = Q - 1$ для произвольных несмещенных нумераций num1 и num2 $\text{RD}(G^{(2)}(\text{num1})) \sim \text{RD}(G^{(2)}(\text{num2}))$.

Доказательство. Назовем дуги графа $K_{A, B(S)}$, связывающие вершины разных ярусов, топологически различающимися. При числе ярусов Q в графе $K_{A, B(S)}$ имеется в точности $f(Q) = \sum_{k=0}^{Q-1} k$ пар топологически

различающихся дуг. Легко видеть, что подграф $G^{(2)}$ графа $K_{A, B(S)}$ при нумерации, используемой для вершин топологической матрицы M (назовем ее num1), содержит в точности один экземпляр каждой из топологически различающихся дуг. Можно сказать, что подграф $G^{(2)}(\text{num1})$ является полным относительно операции включения в него топологически различающихся дуг. (Отметим для полноты изложения, что дуги вида (L_i, L'_i) не входят в подграф $G^{(2)}(\text{num1})$.) Для произвольной нумерации num2 соответствующий подграф $G^{(2)}(\text{num2})$ с невзвешенными дугами изоморфен подграфу $G_3^{(2)}(\text{num1})$ с невзвешенными дугами. Это результат того, что в графе $G^{(2)} = (V^{(2)}, E^{(2)})$ дуга $(i, j') \in E^{(2)}$, $i \in A$, $j' \in B(S)$, если и только если $i > j' - t$. Поскольку для любой нумерации в соответствующем подграфе $G_3^{(2)}$ нет ни одной пары топологически одинаковых дуг, то подграфы $G_3^{(2)}(\text{num1})$ и $G_3^{(2)}(\text{num2})$ с взвешенными дугами также изоморфны, что и доказывает утверждение.

Из утверждений 1 и 3 вытекает

Следствие 3. При $r = Q - 1$ для произвольных несмещенных нумераций num1 и num2 заданного вложения (H, W, x, y) выполняется $\mathfrak{R}(\text{num1}) = \mathfrak{R}(\text{num2})$.

Таким образом, установлено, что величина r служит признаком независимости структурной живучести вложения от нумерации. Использование этого признака позволяет уменьшить трудоемкость определения параметров W и H рабочей структуры ВС и нумерации ее модулей, при которых достигается максимальное значение структурной живучести вложенного диагностического графа.

Заключение. Изучены свойства циркулянтного диагностического графа, вложенного в рабочий граф прямого произведения циклических групп. Установлены условия независимости значения введенного показателя структурной живучести фрагментов вложенного графа от нумерации его вершин. Найдены простые аналитические признаки инвариантности структурной живучести вложенного диагностического графа к используемой нумерации. Полученные результаты позволяют уменьшить трудоемкость решения задач анализа и синтеза ВС максимальной живучести, поставленных в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Preparata F. P., Metze G., Chien R. T. On connection assignment problem of diagnosable systems // IEEE Trans. Electron. Comput. 1967. EC-16, N 12. P. 848.
2. Дмитриев Ю. К. Перестраиваемые диагностические графы живучих вычислительных систем // Автометрия. 1998. № 1. С. 97.
3. Дмитриев Ю. К., Мелентьев В. А., Грязнов Н. Г. Анализ живучести вложенных диагностических структур // Автометрия. 2001. № 5. С. 51.

*Институт физики полупроводников СО РАН,
E-mail: dimi@isp.nsc.ru*

*Поступила в редакцию
10 июня 2004 г.*