РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 5

УДК 519.642

О. Е. Трофимов

(Новосибирск)

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ТОМОГРАФИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА ПО ОТРЕЗКУ ПРЯМОЙ *

Предложен численный алгоритм двумерной томографии для траектории источника, состоящей из конечного отрезка. Показано, что этот алгоритм в сочетании с разработанным ранее алгоритмом построения виртуальных лучевых (рентгеновских) проекций может быть использован для построения алгоритма трехмерной томографии при траектории источника, состоящей из одной окружности.

Введение. В классической рентгеновской компьютерной томографии для восстановления плотности объекта используются интегралы по всем пересекающим его прямым. При этом источник излучения движется по траектории, охватывающей объект со всех сторон, например по окружности. Хотя в реальных практических ситуациях объекты имеют ограниченные размеры, при восстановлении плотности используются формулы обращения, для которых требование финитности носителя искомых функций не является необходимым. Нужно лишь, чтобы соответствующие интегралы существовали.

В работах [1, 2] показано, что, если учесть условие финитности носителя функции, можно существенно уменьшить объем информации, необходимой для восстановления функции по ее рентгеновским проекциям.

В частности, в [2] решена следующая задача. Требуется найти функцию $\psi(\eta_1, \eta_2)$ по заданным интегралам

$$u(x_1, p_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1 + p_1 s, s)\, ds \tag{1}$$

от нее вдоль всех прямых, пересекающих отрезок $[-1, 1]$ на оси $\eta_2 = 0$, если носитель функции $\psi(\eta_1, \eta_2)$ содержится в полосе $-1 \le \eta_1 \le 1,\ -\infty < \eta_2 < \infty$.

Таким образом, при восстановлении функции, сосредоточенной в полосе, можно исключить, например, интегралы вдоль прямых, параллельных оси $\eta_1 = 0$, а также интегралы вдоль прямых, пересекающих эту ось за пределами отрезка $[-1, 1]$. Источник излучения может двигаться только вдоль этого отрезка и не обходить объект со всех сторон.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 03-01-00910, № 03-07-90060) и фонда «Научный потенциал».

В данной работе изложен численный алгоритм решения этой задачи.

Теоретические основы алгоритма восстановления. При построении численного алгоритма наложим дополнительные условия, естественные для практических ситуаций.

Предположим, что носитель функции $\psi(\eta_1, \eta_2)$ содержится в прямоугольнике $-r \le \eta_1 \le r$, $h_1 < \eta_2 < h_2$, $0 < r < 1$, $0 < h_1$.

Отметим, что при наших ограничениях существует p_0 такое, при котором для всех x_1, принадлежащих отрезку $[-1, 1]$, $u(x_1, p_1) = 0$, если $p_1 > p_0$, т. е. функция $u(x_1, p_1)$, задающая исходные данные, имеет финитный носитель. Целесообразность этих условий мы обоснуем, обобщая связь рассматриваемой задачи с проблемой полной трехмерной томографической реконструкции в конусе лучей при неполных данных.

Для доказательства основного утверждения в [2] используется цепочка замен переменных вспомогательных функций. В предлагаемой работе приведем основные функции, необходимые для построения алгоритма.

От функции $u(x_1, p_1)$, задающей исходные данные, перейдем к функции $g_\rho^\pm(\Gamma, t)$, определяемой равенством

$$g_\rho^\pm(\Gamma, t) = \Gamma^{\rho+1}[f_\rho(\Gamma, t) \pm f_\rho(-\Gamma, t)], \quad \Gamma > 0, \ t > 0,$$

где

$$f_\rho(\Gamma, t) = \frac{2t\Gamma^\rho}{(t^2+1)} u\left(\frac{(t^2-1)}{(t^2+1)}, \frac{2t\Gamma}{(t^2+1)}\right) \quad \text{при } \Gamma \ge 0;$$

$$f_\rho(\Gamma, t) = -\frac{2t\Gamma^\rho}{(t^2+1)} u\left(\frac{(t^2-1)}{(t^2+1)}, \frac{2t\Gamma}{(t^2+1)}\right) \quad \text{при } \Gamma < 0;$$

ρ – произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \rho < 1$.

Нам потребуется также функция $\nu_\rho^\pm(\gamma, \tau)$, связанная с искомой функцией $\psi(\eta_1, \eta_2)$ следующим равенством:

$$\gamma^{-(\rho+1)} \nu_\rho^\pm(\gamma, \tau) =$$

$$= \frac{(2\tau)^2}{\gamma^2(\tau^2+1)^2}\left[\psi\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}, \frac{2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}\right) \pm \psi\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}, \frac{-2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}\right)\right], \quad \gamma > 0, \ \tau > 0.$$

Пусть функции $\tilde{g}_\rho^\pm(\mu, \nu)$ и $\tilde{\nu}_\rho^\pm(\mu, \nu)$ являются преобразованиями Меллина функций $g_\rho^\pm(\Gamma, t)$ и $\nu_\rho^\pm(\gamma, \tau)$.

В работе [2] показано, что $\lambda_\rho^\pm(\mu, \nu)\,\tilde{\nu}_\rho^\pm(\mu, \nu) = \tilde{g}_\rho^\pm(\mu, \nu)$, где $\lambda_\rho^\pm(\mu, \nu)$ – некоторая универсальная функция, не зависящая от исследуемого объекта. Одним из представлений функции $\lambda_\rho^\pm(\mu, \nu)$ является равенство

$$\lambda_\rho^\pm(\mu, \nu) = 2^{-\rho + i\mu}\left(B\left(\rho - i\mu, \frac{1-\rho+i\mu-i\nu}{2}\right) \pm B\left(\rho - i\mu, \frac{1-\rho-i\mu+i\nu}{2}\right)\right),$$

где B – эйлеров интеграл первого рода.

Напомним, что преобразование Меллина от функции одной переменной определяется следующим выражением [3]:

$$F(\sigma + i\tau) = \int\limits_0^\infty f(t)\, t^{(\sigma + i\tau - 1)}\, dt.$$

Положим $\sigma = 0$, тогда

$$F(i\tau) = \int\limits_0^\infty f(t)\, t^{(i\tau - 1)}\, dt.$$

Для функции двух переменных определение аналогично. При $\sigma = 0$ получаем

$$\tilde{g}_\rho^{\pm}(\mu, \nu) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty g_\rho^{\pm}(\Gamma, t)\Gamma^{-1} t^{-1} \Gamma^{i\mu} t^{i\nu} d\Gamma dt, \quad \mu \in R^1, \quad \nu \in R^1;$$

$$\tilde{\nu}_\rho^{\pm}(\mu, \nu) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \nu_\rho^{\pm}(\gamma, \tau)\gamma^{-1} \tau^{-1} \gamma^{i\mu} \tau^{i\nu} d\gamma d\tau, \quad \mu \in R^1, \quad \nu \in R^1.$$

Используя обратное преобразование Меллина, функцию $\nu_\rho^{\pm}(\gamma, \tau)$ можно найти по функции $\tilde{\nu}_\rho^{\pm}(\mu, \nu)$:

$$\nu_\rho^{\pm}(\gamma, \tau) = \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \tilde{\nu}_\rho^{\pm}(\mu, \nu)\gamma^{i\mu} \tau^{i\nu} d\mu d\nu.$$

Алгоритм восстановления. Алгоритм вычисления функции $\psi(\eta_1, \eta_2)$ по функции $u(x_1, p_1)$ имеет следующий вид.

Шаг 1. По функции $u(x_1, p_1)$ вычисляем функцию

$$g_\rho^{\pm}(\Gamma, t) = \Gamma^{\rho + 1}[f(\Gamma, t) \pm f(-\Gamma, t)], \quad \Gamma > 0, \; t > 0,$$

где ρ – некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $0 < \rho < 1$, а функция $f(\Gamma, t)$ определяется равенством

$$f(\Gamma, t) = \frac{2t}{|\Gamma|(t^2 + 1)}\, u\left(\frac{(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)}, \frac{2t\Gamma}{(t^2 + 1)}\right).$$

Шаг 2. Находим преобразование Меллина от функции $g_\rho^{\pm}(\Gamma, t)$ при $\sigma = 0$:

$$\tilde{g}_\rho^{\pm}(\mu, \nu) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty g_\rho^{\pm}(\Gamma, t)\Gamma^{-1} t^{-1} \Gamma^{i\mu} t^{i\nu} d\Gamma dt, \quad \mu \in R^1, \quad \nu \in R^1.$$

Шаг 3. По функции $\tilde{g}_\rho^\pm(\mu,\nu)$ вычисляем функцию $\tilde{\nu}_\rho^\pm(\mu,\nu)$, используя равенство

$$\tilde{\nu}_\rho^\pm(\mu,\nu)=\frac{\tilde{g}_\rho^\pm(\mu,\nu)}{\lambda_\rho^\pm(\mu,\nu)},$$

где

$$\lambda_\rho^\pm(\mu,\nu)=2^{-\rho+i\mu}\left(B\left(\rho-i\mu,\frac{1-\rho+i\mu-i\nu}{2}\right)\pm B\left(\rho-i\mu,\frac{1-\rho-i\mu+i\nu}{2}\right)\right).$$

Функция $\lambda_\rho^\pm(\mu,\nu)$ не зависит от исследуемого объекта и может быть вычислена заранее.

Отметим также, что при малых значениях модуля $\lambda_\rho^\pm(\mu,\nu)$ необходимо использовать методы регуляризации.

Шаг 4. Используя обратное преобразование Меллина, определяем функцию

$$\nu_\rho^\pm(\gamma,\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty \tilde{\nu}_\rho^\pm(\mu,\nu)\gamma^{i\mu}\tau^{i\nu}\,d\mu d\nu.$$

Шаг 5. По функции $\nu_\rho^\pm(\gamma,\tau)$ находим функцию $\psi(\eta_1,\eta_2)$, используя равенства:

$$\psi\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1},\frac{2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}\right)=\frac{\gamma^{(1-\rho)}(\tau^2+1)^2}{8\tau^2}[\nu_\rho^+(\gamma,\tau)+\nu_\rho^-(\gamma,\tau)],$$

$$\psi\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1},\frac{-2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}\right)=\frac{-\gamma^{(1-\rho)}(\tau^2+1)^2}{8\tau^2}[\nu_\rho^+(\gamma,\tau)-\nu_\rho^-(\gamma,\tau)].$$

Эти равенства позволяют вычислить значения искомой функции $\psi(\eta_1,\eta_2)$ для любых $\eta_1\in[-1,1]$, $\eta_2\in R^1$. При этом τ находится из равенства $\eta_1=\dfrac{\tau^2-1}{\tau^2+1}$, а γ – из равенства $\eta_2=\dfrac{2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}$ или $\eta_2=\dfrac{-2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}$ в зависимости от знаков величин τ и η_2.

Описание алгоритма закончено.

Модификация алгоритма восстановления с заменой преобразования Меллина преобразованием Фурье. Преобразование Меллина можно свести к преобразованию Фурье для сокращения времени счета [3]. Опишем шаги алгоритма для этого случая.

Шаг 1. По функции $u(x_1,p_1)$ вычисляем функцию

$$\alpha g_\rho^\pm(\xi_1,\xi_2)=e^{\xi_1(\rho+1)}[f(e^{\xi_1},e^{\xi_2})\pm f(-e^{\xi_1},e^{\xi_2})],$$

где, как и прежде, ρ – некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $0<\rho<1$, а функция $f(\Gamma,\ t)$ определяется равенством

$$f(\Gamma,\ t)=\frac{2t}{\left|\Gamma\right|(t^2+1)}\,u\left(\frac{(t^2-1)}{(t^2+1)},\frac{2t\Gamma}{(t^2+1)}\right).$$

Шаг 2. Находим $\tilde{g}_\rho^{\pm}(\mu,\nu)$ как преобразование Фурье функции $\alpha g_\rho^{\pm}(\xi_1,\xi_2)$.

Шаг 3. По функции $\tilde{g}_\rho^{\pm}(\mu,\nu)$ определяем функцию $\tilde{\nu}_\rho^{\pm}(\mu,\nu)$, используя равенство

$$\tilde{\nu}_\rho^{\pm}(\mu,\nu)=\frac{\tilde{g}_\rho^{\pm}(\mu,\nu)}{\lambda_\rho^{\pm}(\mu,\nu)},$$

где

$$\lambda_\rho^{\pm}(\mu,\nu)=2^{-\rho+i\mu}\left(B\left(\rho-i\mu,\frac{1-\rho+i\mu-i\nu}{2}\right)\pm B\left(\rho-i\mu,\frac{1-\rho-i\mu+i\nu}{2}\right)\right).$$

Функция $\lambda_\rho^{\pm}(\mu,\nu)$ не зависит от исследуемого объекта и может быть вычислена заранее.

При малых значениях модуля $\lambda_\rho^{\pm}(\mu,\nu)$ необходимо использовать методы регуляризации.

Шаг 4. Применяя обратное преобразование Фурье к функции $\tilde{\nu}_\rho^{\pm}(\mu,\nu)$, вычисляем функцию

$$\alpha\nu_\rho^{\pm}(\beta_1,\beta_2)=\nu_\rho^{\pm}(e^{\beta_1},\ e^{\beta_2}).$$

Шаг 5. По функции $\alpha\nu_\rho^{\pm}(\beta_1,\beta_2)$ находим функцию $\psi(\eta_1,\eta_2)$, используя равенства:

$$\psi\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1},\frac{2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}\right)=\frac{\gamma^{(1-\rho)}(\tau^2+1)^2}{8\tau^2}[\alpha\nu_\rho^{+}(\ln(\gamma),\ln(\tau))+\alpha\nu_\rho^{-}(\ln(\gamma),\ln(\tau))],$$

$$\psi\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1},\frac{-2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}\right)=\frac{-\gamma^{(1-\rho)}(\tau^2+1)^2}{8\tau^2}[\alpha\nu_\rho^{+}(\ln(\gamma),\ln(\tau))-\alpha\nu_\rho^{-}(\ln(\gamma),\ln(\tau))].$$

Эти равенства позволяют вычислить значения искомой функции $\psi(\eta_1,\eta_2)$ для любых $\eta_1\in[-1,1],\ \eta_2\in R^1$. При этом τ находится из равенства $\eta_1=\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}$, а γ – из равенства $\eta_2=\frac{2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}$ или $\eta_2=\frac{-2\tau}{\gamma(\tau^2+1)}$ в зависимости от знаков величин τ и η_2.

Описание модификации алгоритма закончено.

Такая структура алгоритма позволяет для сокращения времени счета использовать быстрое преобразование Фурье (БПФ). Следует отметить, что для применения БПФ необходимо использовать равномерную сетку, что в ряде случаев может привести к потере точности.

Возможные применения алгоритма. *Двумерная томография.* Если объект ограниченных размеров находится, например, в верхней полуплоскости, предложенный алгоритм позволяет восстановить плотность этого объекта при движении источника излучения вдоль некоторого отрезка прямой, разделяющей полуплоскости.

При исследовании ряда объектов используется следующая схема сканирования. Для восстановления плотности слоя движение линейки детекторов вдоль некоторой направляющей сочетается с вращением объекта. При «односторонних» алгоритмах можно будет исключить вращение объекта.

Алгоритмы восстановления, использующие интегралы по прямым, пересекающим только одну из сторон объекта, могут быть применены в классической двумерной томографии. Однако основным стимулом для разработки таких алгоритмов является полная трехмерная томографическая реконструкция в конусе лучей при неполных данных.

Трехмерная томография. Рассмотрим подробнее применение вышеизложенного алгоритма при томографической реконструкции в конусе лучей.

В классической компьютерной томографии используется двумерный веер лучей. Данные о прохождении через объект регистрируются с помощью одномерной линейки детекторов. Система «детекторы – источник излучения» дискретно вращается вокруг некоторой оси, оставаясь в плоскости, ортогональной этой оси. По полученным данным восстанавливается двумерная плотность среза, который предполагается тонким. После восстановления плотности среза система перемещается вдоль оси вращения и процесс повторяется. Схемы сканирования могут варьироваться, но суть процесса не меняется: объект представляется в виде набора тонких срезов и на каждом шаге решается задача восстановления двумерной плотности среза, толщиной которого можно пренебречь.

В трехмерной томографии реконструкция ведется в трехмерных конусах лучей и рассматривается другая схема получения и обработки данных. Источник движется по некоторой трехмерной траектории, для каждой его позиции данные регистрируются на пленке или двумерной матрице детекторов. По системе полученных двумерных данных восстанавливается плотность трехмерного объекта в заданной точке. Наиболее распространенными траекториями являются система двух окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях, и винтовая линия (спираль). Отметим, что в настоящее время выпускаются и продаются спиральные томографы. Как правило, фирмы не раскрывают деталей своих алгоритмов. Однако по косвенным данным можно предположить, что используется классическая схема, которую можно применять, если шаг спирали мал, приближенно считая один виток спирали окружностью. Предварительные исследования показывают, что переход к трехмерной схеме восстановления может существенно повысить разрешение и понизить дозу облучения.

Наибольшее преимущество методы реконструкции в трехмерных конусах лучей перед двумерными (веерными) методами имеют в случае сложных пространственных форм исследуемых объектов и дефектов в них.

Для применения большинства формул обращения лучевого преобразования необходимо, чтобы исследуемый объект и траектория источника удовлетворяли условиям Кириллова – Смита – Туя. Главное из этих условий заключается в том, что любая плоскость, проходящая через объект, пересекает траекторию движения источника. Траектории, не удовлетворяющие условиям Кириллова – Туя, называются неполными. Как упоминалось выше, для восстановления функций, имеющих финитный носитель, не является необходимым выполнение условия Кириллова – Туя (такие функции приходится исследовать в большинстве реальных ситуаций).

Так, в работе [1] показано, что для восстановления функций, сосредоточенных в шаре, достаточно одной окружности. В [2] показано, что одной окружности достаточно для восстановления интегрируемых функций, сосредоточенных в цилиндре. Это означает, что, используя траекторию из одной окружности, можно восстановить функцию, носитель которой не ограничен в одном из направлений. В реальных ситуациях оба метода применяются к объектам конечных размеров. У каждого из этих методов есть свои преимущества.

Зная интегралы вдоль прямых, проходящих через окружность, используя при этом свойства преобразования Фурье лучевых данных, можно вычислить интегралы вдоль прямых, проходящих через любую внутреннюю точку круга. Начисляемые таким образом интегралы для внутренних точек круга будем называть виртуальными лучевыми (рентгеновскими) проекциями. Слово «виртуальный» в этом случае означает, что на самом деле источник излучения не находится во внутренних точках круга, а движется по окружности, являющейся его границей. Напомним, что речь идет о трехмерном пространстве, и основной интерес представляют прямые, не лежащие в плоскости траектории источника.

Алгоритм построения виртуальных рентгеновских проекций изложен в [4, 5], ряд свойств этого алгоритма исследован в [6]. Демонстрационные версии программ для построения виртуальных проекций даны в [7] (см. разд. «Томография» сервера «Методы решения условно-корректных задач»).

В сочетании с методом виртуальных проекций вышепредставленный алгоритм дает метод восстановления функции трех переменных по интегралам вдоль прямых, которые пересекают единичную окружность, лежащую в плоскости $z=0$.

Действительно, следуя [2], рассмотрим сечение объекта некоторой плоскостью, ортогональной плоскости $z=0$. Если объект расположен внутри цилиндра единичного радиуса, то функция, полученная в сечении, по одной из переменных будет сосредоточена в полосе $[-1, 1]$. Интегралы по прямым, пересекающим отрезок $[-1, 1]$, можно найти, используя метод виртуальных проекций.

Ограничения, введенные нами при построении одностороннего алгоритма, в случае трехмерной томографии в конусе лучей сводятся к следующему:

– между объектом и цилиндром, в котором находится объект, должен существовать «зазор» (т. е. объект должен находиться строго внутри цилиндра);

– объект должен быть отделен от плоскости $z=0$ («висеть» над ней).

Если первое условие является естественным для реальных ситуаций, то второе требует пояснений. Предположим, что источник движется в плоскости $z=0$. При восстановлении функции в окрестности плоскости $z=0$ нужно использовать методы классической двумерной томографии и (или) метод Фельдкампа. Метод виртуальных проекций тем точнее, чем больше зона, отделяющая объект от плоскости $z=0$ [6]. Затем восстановленный слой нужно вычесть из объекта и построить новые проекции, соответствующие частям объекта, отделенным от плоскости $z=0$.

Отметим также, что при определении лучевого преобразования, задаваемого формулой (1), используется интегрирование по элементу оси $s - ds$. Такое определение соответствует определению в работе [2]. Обычно же при определении лучевого преобразования используют интегрирование по элементу длины луча $l - dl$. С теоретической точки зрения оба определения эквивалентны, за исключением интегрирования по тем прямым, которые лежат в плоскости $z = 0$. На практике возникают некоторые проблемы в случае, когда z близко к нулю. Как было отмечено, в этой зоне можно использовать методы классической двумерной компьютерной томографии.

Заключение. Алгоритм трехмерной томографической реконструкции для траектории источника, состоящей из одной окружности, может заключаться в следующем.

При восстановлении функции в окрестности плоскости движения источника нужно использовать методы классической двумерной томографии и (или) приближенный метод Фельдкампа. Затем восстановленный слой необходимо вычесть из объекта и построить новые рентгеновские проекции, соответствующие частям объекта, отделенным от плоскости движения источника. К оставшимся частям надо применить алгоритм виртуальных проекций и алгоритм, предложенный в данной работе.

Автор выражает благодарность А. С. Загоруйко и С. Н. Касьяновой за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аниконов Ю. Е**. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978.
2. **Благовещенский А. С.** О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Мат. заметки. 1986. **39**, № 6. С. 841.
3. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
4. **Trofimov O. E.** Virtual beam (X-ray) projections // The VIIth Intern. conf. on Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear, Medicine. Saint-Malo, France, 2003. Abstracts. P. 127.
5. **Трофимов О. Е.** Алгоритм построения виртуальных рентгеновских проекций // Автометрия. 2005. **41**, № 3. С. 64.
6. **Trofimov O. E., Kasianova S. N., Stukalin Yu. A. et al.** The relationship between a virtual X-ray projection quality and a distance of object to a plane in which a source is moving // Proc. 7th Intern. conf. on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-7-2004). St. Petersburg, 2004. P. 944.
7. **http://www.iae.nsk.su/~trofimov/IPP/main.htm**
http://a-server.math.nsc.ru/IPP/main.htm
http://cs.nstu.ru/ipp/

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: trofimov@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
9 марта 2005 г.