РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 5

УДК 519.6 : 531.1

С. В. Леньков

(Ижевск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ЦИФРОВЫМИ РЕГИСТРАТОРАМИ

Проведен анализ алгоритма восстановления входного сигнала по конечной его реализации на выходе цифрового регистратора с использованием быстрого пробразования Фурье. Получена оценка погрешности восстановления.

Введение. Измерение нестационарных (ударных) процессов осуществляется цифровыми системами измерения (цифровыми регистраторами) [1]. Поскольку измерения ударных процессов являются динамическими, то возникает проблема применения средства измерения в динамическом режиме. Динамическое измерение включает в себя наблюдение (регистрацию) и обработку сигнала [1]. Если динамическая цифровая система измерения искажает входной сигнал за счет конечности полосы пропускания и неравномерности АЧХ аналоговой части цифрового регистратора, то возникает проблема определения действительных временных зависимостей значений измеряемых физических величин и интегралов от них [1]. Для решения этой проблемы используется алгоритм восстановления сигналов [2, 3].

Восстановление входного аналогового сигнала по известному аналоговому выходному сигналу, полученному в результате динамических измерений, есть решение обратной задачи, представленной во временной и частотной областях [2, 3]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,a(\tau)\,d\tau = A(t); \qquad H(\omega)\,S_a(\omega) = S_A(\omega), \tag{1}$$

где $a(t)$ – входной сигнал; $A(t)$ – сигнал на выходе аналоговой части цифрового регистратора, включающей в себя датчик и усилительный канал; $h(t)$ – импульсная характеристика аналоговой части регистратора; $H(\omega)$ – частотная характеристика аналоговой части регистратора; $S_a(\omega)$ – спектр входного сигнала; $S_A(\omega)$ – спектр сигнала на выходе аналоговой части регистратора.

Входной сигнал получается обратным преобразованием Фурье от восстановленного спектра входного сигнала $S_a(\omega) = S_A(\omega)/H(\omega)$:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_A(\omega)}{H(\omega)} \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{2}$$

Пусть спектр входного сигнала $S_a(\omega)$ – финитная функция. Тогда интеграл в (2) надо брать только по частотам $-\omega_m \le \omega \le \omega_m$, где ω_m – максимальная частота входного сигнала. Выражение (2) можно представить в удобном для дальнейшего использования виде, сделав последовательно две замены переменных:

$$a(t) = \int_{0}^{\omega_m} \frac{S_A(\omega)}{H(\omega)} \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} + \int_{\omega_m}^{2\omega_m} \frac{S_A(-(2\omega_m - \varepsilon))}{H(-(2\omega_m - \varepsilon))} \exp(-j(2\omega_m - \varepsilon)t) \frac{d\varepsilon}{2\pi}. \tag{3}$$

При использовании цифровых регистраторов сигнал на выходе аналоговой части регистратора неизвестен. Для восстановления входного сигнала есть только конечная реализация дискретного во времени и по амплитуде выходного сигнала и оценка дискретного спектра выходного сигнала, полученная с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). Поэтому актуально рассмотрение алгоритма и точности восстановления входного сигнала по дискретной конечной реализации сигнала и спектра, полученного с помощью БПФ.

Анализ алгоритма восстановления по оцифрованному сигналу. Выходной сигнал цифрового регистратора в дискретные моменты времени t_i согласно (1) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t_i - \tau) a(\tau) d\tau = A(t_i). \tag{4}$$

Применив к обеим частям (4) прямое БПФ, находим

$$\Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i - \tau) \exp(-j\omega_n t_i) a(\tau) d\tau = G_A(\omega_n), \tag{5}$$

где $G_A(\omega_n)$ – оценка спектра выходного сигнала, полученная с помощью БПФ; Δt – шаг дискретизации по времени; $\omega_n = n\Delta\omega$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$; $\Delta\omega = 2\pi/T$ – шаг квантования спектра по частоте (разрешение по частоте) при выполнении БПФ; N – число отсчетов сигнала (объем выборки), кратное степени числа 2.

Выразив импульсную характеристику и входной сигнал через частотную характеристику аналоговой части регистратора и спектр входного сигнала, получим интегральный аналог выражения (1), связывающий непрерывный спектр входного и дискретный спектр выходного сигналов:

$$\Delta t \int_{-\omega_m}^{\omega_m} H(\omega) S_a(\omega) K_N(\omega - \omega_n) \frac{d\omega}{2\pi} = G_A(\omega_n), \tag{6}$$

где

$$K_N(\omega-\omega_i)=\frac{\exp(j(\omega-\omega_i)T)-1}{\exp(j(\omega-\omega_i)\Delta t)-1} \tag{7}$$

– функция основного спектрального окна при БПФ, определяющая точность оценки спектра [4]; $T=\Delta tN$ – длина реализации (время измерения процесса); $\omega_D=\Delta\omega N$ – частота оцифровки сигнала.

Для восстановления входного сигнала вместо непрерывного спектра имеем дискретную оценку спектра $G_A(\omega_i)$, найденную с помощью БПФ. Причем полученный дискретный спектр располагается в области частот $\omega\in[0,2\omega_m]$, совпадающей с областью интегрирования в (3). Поскольку при оцифровке выполняются равенства $\omega_D=2\omega_m$ и $\exp(\pm j\omega_D t_n)=1$, то выражение для оценки отсчетов входного сигнала будет являться дискретным аналогом выражения (3):

$$a_G(t_n)=\sum_{i=0}^{N/2}\frac{G_A(\omega_i)}{H(\omega_i)}\exp(j\omega_i t_n)\frac{\Delta\omega}{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{i=N/2+1}^{N-1}\frac{G_A(\omega_i)}{H(-(\omega_D-\omega_i))}\exp(j\omega_i t_n)\frac{\Delta\omega}{2\pi}. \tag{8}$$

Обычно для обеспечения устойчивой процедуры восстановления производят фильтрацию выходного сигнала цифровым фильтром нижних частот (ФНЧ) [2, 3]. Отсчеты сигнала после фильтрации можно представить в виде

$$A_F(t_i)=\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}G_A(\omega_n)F(\omega)K_N(\omega_n-\omega)\exp(j\omega t_i)\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{9}$$

где $F(\omega)$ – частотная характеристика цифрового ФНЧ.

Оценка спектра фильтрованного выходного сигнала получается прямым БПФ от (9):

$$G_F(\omega_i)=\frac{\Delta t}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}G_A(\omega_n)F(\omega)K_N(\omega_n-\omega)K_N(\omega-\omega_i)\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{10}$$

Подставив выражение (10) в (8), вместо дискретного спектра $G_A(\omega_i)$ получим оценку восстановленного входного сигнала:

$$a_F(t_i)=\frac{1}{N^2}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{G_A(\omega_n)}{H_D(\omega_k)}F(\omega)K_N(\omega_n-\omega)K_N(\omega-\omega_k)\exp(j\omega_k t_i)\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{11}$$

где

$$H_D(\omega_i)=\begin{cases}H(\omega_i), & |\omega_i|\le\omega_D/2;\\ H(-(\omega_D-\omega_i)), & \omega_D/2\le|\omega_i|\le\omega_D.\end{cases}$$

Заменим сумму в (11) интегралом, воспользовавшись для этого выражением (6):

$$\sum_{n=0}^{N-1} G_A(\omega_n) K_N(\omega_n - \omega) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} H(\xi) S_a(\xi) K_N(\omega - \xi) d\xi. \qquad (12)$$

Подставив (12) в (11), получим

$$a_F(t_i) = \frac{T}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \frac{H(\xi) S_a(\xi)}{H_D(\omega_k)} K_N(\omega - \xi) F(\omega) K_N(\omega - \omega_k) \exp(j\omega_k t_i) \frac{d\xi}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

(13)

Погрешность алгоритма восстановления входного сигнала найдем как норму разности:

$$\Pi_{AF} = \left\| a_F(t_k) - a_T(t_k) \right\| = \max_k \left| a_F(t_k) - a_T(t_k) \right| \forall\, t_k \in [0, T], \qquad (14)$$

где $a_F(t_k)$ – восстановленный сигнал, определяемый выражением (13); $a_T(t_k)$ – отсчеты конечной реализации входного сигнала:

$$a_T(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S_a(\xi) K(\omega - \xi) \exp(j\omega t_k) \frac{d\xi}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (15)$$

Здесь

$$K(\omega - \xi) = \frac{1 - \exp(j(\omega - \xi)T)}{j(\omega - \xi)}$$

– основное спектральное окно для реализации длительностью T [5].

Подставив в (14) выражения (13) и (15), получим

$$\Pi_{AF} = T \max_k \left| \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S_a(\xi) \left(\frac{H(\xi) F(\omega) K_N(\omega - \xi)}{H_D(\omega_i) N} - \frac{K(\omega - \xi)}{T} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{K_N(\omega - \omega_i)}{N} \exp(j\omega_i t_k) \frac{d\xi}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \right|. \qquad (16)$$

Проведя в (16) тождественное преобразование, вычислим оценку погрешности восстановления, обусловленную дискретизацией выходного сигнала по времени и процедурой БПФ, состоящую из двух слагаемых:

$$\Pi_{AF} \le T \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \left| S_a(\xi) \frac{F(\omega) K(\omega - \xi)}{N} \left(\frac{H(\xi)}{H_D(\omega_i)} - 1 \right) \frac{K_N(\omega - \omega_i)}{N} \right| \frac{d\xi}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} +$$

$$+T\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\left|S_a(\xi)\left(\frac{F(\omega)K_N(\omega-\xi)}{N}-\frac{K(\omega-\xi)}{T}\right)\frac{K_N(\omega-\omega_i)}{N}\right|\frac{d\xi}{2\pi}\frac{d\omega}{2\pi}. \quad (17)$$

Первое слагаемое в (17) определяет погрешность восстановления, вызванную дискретизацией и применением БПФ, второе – вызванную БПФ и фильтрацией выходного сигнала.

В процессе измерения и оцифровки в выходном сигнале регистратора появляется аддитивная помеха, обусловленная шумом аналоговой части регистратора и шумом квантования сигнала по амплитуде [5], что искажает оценку спектра выходного сигнала и соответственно увеличивает погрешность восстановления. В выражении (17) при этом появится дополнительное слагаемое, учитывающее влияние шумов аналогового измерительного тракта и шумов квантования выходного сигнала по амплитуде на погрешность восстановления входного сигнала регистратора. Оценка дополнительной погрешности восстановления сигнала, вызванной аддитивной помехой, примет вид

$$\Pi_\varepsilon \le T\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\left|\frac{S_\varepsilon(\xi)F(\omega)K_N(\omega-\xi)}{H_D(\omega_i)}\frac{K_N(\omega-\omega_i)}{N^2}\right|\frac{d\xi}{2\pi}\frac{d\omega}{2\pi}, \quad (18)$$

где $S_\varepsilon(\omega)$ – суммарный спектр шума в выходном сигнале регистратора.

Проведя оценку интегралов в (17) и (18) с помощью интегрального неравенства Коши – Буняковского, получим

$$\Pi_{AF}+\Pi_\varepsilon \le T\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\sqrt{\int_{-\omega_F}^{\omega_F}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\left|S_a(\xi)\right|^2\left|\frac{F(\omega)K_N(\omega-\xi)}{N}\right|d\xi d\omega}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\int_{-\omega_F}^{\omega_F}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\left|\frac{F(\omega)K_N(\omega-\xi)}{N}\right|\left|\left(\frac{H(\xi)}{H_D(\omega_i)}-1\right)\right|^2\left|\frac{K_N(\omega-\omega_i)}{N}\right|^2\frac{d\xi d\omega}{(2\pi)^2}}\right\}+$$

$$+T\sum_{i=0}^{N-1}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\left|S_a(\xi)\right|^2\left|\left(F(\omega)\frac{K_N(\omega-\xi)}{N}-\frac{K(\omega-\xi)}{T}\right)\right|d\xi d\omega}\times$$

$$\times\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\left|\frac{K_N(\omega-\omega_i)}{N}\right|^2\left|\left(F(\omega)\frac{K_N(\omega-\xi)}{N}-\frac{K(\omega-\xi)}{T}\right)\right|\frac{d\xi d\omega}{(2\pi)^2}}+$$

$$+T\sum_{i=0}^{N-1}\sqrt{\int_{-\omega_F}^{\omega_F}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\left|S_\varepsilon(\xi)\right|^2\left|F(\omega)\frac{K_N(\omega-\xi)}{N}\right|d\xi d\omega}\times$$

$$\times \sqrt{\int\limits_{-\omega_F}^{\omega_F} \int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} \left| F(\omega) \frac{K_N(\omega-\xi)}{N} \right| \left| \frac{K_N(\omega-\omega_i)}{N H_D(\omega_i)} \right|^2 \frac{d\xi\, d\omega}{(2\pi)^2}}, \tag{19}$$

где $\omega_F \le \omega_m$ – полоса пропускания ФНЧ.

Вычислим интегралы в (19), аппроксимируя $|K_N(\omega)|$ на отрезке $\omega \in$ $\in [-\Delta\omega, \Delta\omega]$ треугольной функцией и раскладывая функцию $H(\omega)$ в ряд Тейлора около отсчета частоты ω_i:

$$\Pi_{AF} + \Pi_\varepsilon \le \sum_{i=0}^{N_2} \sigma_{aF} \left| \frac{d\ln(|H(\omega_i)|)}{d\omega} + \frac{d\Phi(\omega_i)}{d\omega} \right| \frac{\Delta\omega\sqrt{\Delta\omega}}{\sqrt{30}} +$$

$$+ \sigma_{aF-1}(N_1 - N_2)\frac{\Delta\omega}{\sqrt{3}} + \sum_{i=0}^{N_2} \frac{\sigma_{\varepsilon F}}{|H(\omega_i)|} \frac{\Delta\omega}{\sqrt{3}}, \tag{20}$$

где N_1 – число отсчетов спектра, находящихся в полосе входного сигнала; N_2 – число отсчетов спектра в полосе пропускания ФНЧ; σ_{aF} – среднеквадратичное значение входного сигнала в полосе пропускания фильтра; σ_{aF-1} – среднеквадратичное значение входного сигнала вне полосы пропускания фильтра; $\sigma_{\varepsilon F}$ – среднеквадратичное значение шумовой компоненты выходного сигнала в полосе пропускания фильтра; $\Phi(\omega)$ – фазочастотная характеристика аналоговой части регистратора.

Из выражения (20) видно, что максимальная погрешность восстановления сигнала получается при наличии максимума скорости изменения логарифмической амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик аналоговой части регистратора, т. е. имеющихся резонансных подъемах на частотной характеристике, а влияние шумовой компоненты возрастает с уменьшением модуля коэффициента передачи. Следовательно, для уменьшения погрешности восстановления при проведении цифровой фильтрации ФНЧ должен «обрезать» подъемы сигнала, вызванные резонансом датчиков на собственной или установочной частоте. В присутствии широкополосной помехи для корректной оцифровки сигнала приходится осуществлять передискретизацию, при этом величина N_2 может быть значительно меньше, чем общее число отсчетов сигнала. Таким образом, ФНЧ, имеющий частоту среза, равную максимальной частоте входного сигнала, или сигма–дельта-АЦП значительно снижает погрешность восстановления. При проведении фильтрации стоит проблема выбора оптимальной частоты среза ФНЧ, которую можно оценить из условия равенства погрешности восстановления, вызванной фильтрацией выходного сигнала, и погрешности, вызванной наличием шума в полосе пропускания ФНЧ. Согласно (20) имеем

$$\sigma_{aF-1}(\omega_m - \omega_F) = \sigma_{\varepsilon F}\frac{\omega_F}{H_0}, \tag{21}$$

где H_0 – значение коэффициента передачи аналоговой части регистратора в области плато АЧХ.

Заключение. В работе рассмотрены алгоритм и точность восстановления сигнала по результатам динамических измерений цифровыми регистраторами с использованием БПФ. Точность восстановления сигнала определяется скоростью изменения амплитудной и частотной характеристик аналоговой части регистратора в полосе пропускания цифрового ФНЧ (регуляризирующего сомножителя), величиной разрешения по частоте при быстром преобразовании Фурье и величиной аддитивной помехи. Получено соотношение, позволяющее оценить величину частоты среза цифрового ФНЧ при обеспечении требуемой точности восстановления сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Грановский В. А.** Динамические измерения. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
2. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
3. **Василенко Г. И.** Теория восстановления сигналов: О редукции к идеальному прибору в физике и технике. М.: Сов. радио, 1979.
4. **Леньков С. В.** Измерение амплитуды синусоидального сигнала ускорения в системе вибродиагностики с помощью БФП и сигнатурного спектрального анализа // Датчики и системы. 2004. № 12. С. 12.
5. **Бендат Дж., Пирсол А.** Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.

Физико-технический институт УрО РАН,
E-mail: gep@pti.udm.ru

Поступила в редакцию
17 мая 2005 г.