РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я
2005, том 41, № 5

УДК 681.2.08

Ю. В. Бондаренко

(Новосибирск)

ФИЛЬТРАЦИЯ ШУМА ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПО НЕРАВНОМЕРНЫМ ОТСЧЕТАМ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦИИ *

На основе компьютерного моделирования дана оценка погрешности восстановления сигнала с конечным числом степеней свободы по его периодически неравномерным отсчетам в присутствии некоррелированных аддитивных амплитудных шумов. Приведены результаты сравнения коэффициентов усиления шума в зависимости от степени неравномерности отсчетов при восстановлении сигнала методом фильтрации и методом наименьших квадратов в условиях передискретизации.

Введение. Данная работа является продолжением исследований, связанных с вопросами точности восстановления периодического сигнала по неравномерным отсчетам [1, 2].

В работе [2] с помощью компьютерного моделирования показано, что передискретизация является мощным средством уменьшения шума для процедур восстановления сигнала с конечным числом степеней свободы по неравномерным отсчетам методом наименьших квадратов (МНК) и методом разбиения последовательности исходных неравномерных отсчетов на подпоследовательности с последующим восстановлением сигнала по этим подпоследовательностям и усреднением результатов. Были получены оценки коэффициента усиления шума для этих двух способов восстановления сигнала. Под коэффициентом усиления шума подразумевалось отношение средней дисперсии погрешности восстановленных отсчетов к дисперсии шума исходных отсчетов.

Возможен еще один метод использования передискретизации, который заключается в восстановлении сигнала по всей совокупности неравномерных отсчетов с применением весовых функций и его последующей фильтрации с помощью идеального фильтра нижних частот. В отличие от МНК такой метод не требует обращения матриц высокого порядка, что может оказаться существенным при работе с большими массивами данных. Изменение шума при такой процедуре восстановления сигнала и является предметом данного

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00913) и Президиума РАН (программа 2.13/2005).

исследования. Представляет интерес оценка эффективности этого метода и его сравнение с вышеупомянутыми. Моделирование проводилось с использованием системы MatLab.

Метод восстановления сигнала и исходные допущения. Суть этого метода заключается в том, что непрерывный сигнал $f(t)$ с конечным числом степеней свободы восстанавливается по всей совокупности M неравномерных отсчетов $f(t_r)$ при помощи весовых функций $w_r(t-t_r)$:

$$f(t)=\sum_{r=1}^{M} f(t_r)\,w_r(t-t_r), \tag{1}$$

где

$$w_r(t-t_r)=C_r\prod_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{M}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{M\Delta}(t-t_k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{M\Delta}(t_r-t_k)\right)}, \tag{2}$$

$$C_r=\begin{cases}1 & \text{для нечетных } M;\\ \cos\left(\frac{\pi}{M\Delta}(t-t_r)\right) & \text{для четных } M.\end{cases}$$

Обычно (для упрощения) восстанавливаются только отсчеты в равномерные моменты времени $t=m\Delta$ (здесь Δ – среднее значение интервала дискретизации; $m=1,\dots,M$). Далее сигнал $f(t)$ находится стандартным способом и его обработка осуществляется идеальным фильтром нижних частот.

Подчеркнем, что подобная процедура преобразования значений отсчетов $f(t_r)\Rightarrow f(m\Delta)$ согласно формуле (1) является точной [3, 4]. Однако получение отсчетов сигнала всегда сопровождается наложением шума, обусловленного погрешностью задания исходных отсчетов. Как правило, шум каждого отсчета – случайная величина (независимая от шума других отсчетов). В результате при восстановлении непрерывного сигнала происходит и восстановление случайного процесса, отсчеты которого в моменты выборки являются значениями случайной величины шума.

Если для восстановления использовать зашумленные отсчеты в равномерных точках, то дисперсия восстановленного непрерывного сигнала во всех точках (в том числе и в неравномерных) будет одной и той же. Следует подчеркнуть разницу в результатах восстановления сигнала при равномерной и неравномерной дискретизации. Характеристики непрерывных случайных процессов, восстановленных по равномерным и неравномерным зашумленным отсчетам, будут разными при одних и тех же параметрах шума. Таким образом, преобразование значений отсчетов сигнала из неравномерных позиций в равномерные, $f(t_r)\Rightarrow f(m\Delta)$, и наоборот, $f(m\Delta)\Rightarrow f(t_r)$, с точки зрения влияния шумов не инвариантно. Это можно увидеть и из формулы (2), так как весовые функции $w_r(t-t_r)$ при сближении точек отсчетов t_r и t_k становятся большими и незначительное изменение (шум) значений отсчетов $f(t_r)$ и $f(t_k)$ приводит к большим изменениям в восстановленном сигнале.

Далее анализ проводился при тех же допущениях, что и в работе [2]. Моменты неравномерных отсчетов задавались путем случайного равномерно распределенного некоррелированного смещения (миграции) отсчетов от равномерных позиций:

$$t_r = r\Delta + \mu_r, \quad r = 0, \ldots, M-1. \tag{3}$$

Смещение отсчета t_r от равномерного положения описывалось выражением $\mu_r = \alpha(\text{rand} - 0{,}5)\Delta$, где rand – случайная величина в интервале [0; 1]; множитель α характеризовал размах отклонения (параметр неравномерности) отсчетов. Так как получаемое значение смещения случайно, то осуществлялось усреднение по десяти реализациям случайного набора отсчетов при фиксированном α.

Максимальное значение α принималось равным 0,9, поскольку при $\alpha = 1$ расстояние между некоторыми неравномерными отсчетами может стать бесконечно малым и погрешность восстановления при этом – бесконечно большой. При $\alpha \geq 1$ возможно совпадение генерируемых моментов отсчета, но если контролировать минимальное расстояние между отсчетами и исключать подобные ситуации, то можно оценить ошибку восстановления и для бóльших неравномерностей.

Значения сигнала $f(t_r)$ заданы в M неравномерных точках в присутствии амплитудного шума $\varphi(t_r)$. Этот шум предполагался аддитивным и некоррелированным, его среднее значение (по реализациям) в каждой точке $\overline{\varphi(t_r)} = 0$, дисперсия σ_φ^2, равная $\overline{\varphi(t_r)^2}$, постоянна и не зависит от r. Спектр входного сигнала неизвестен. Известно только, что сигнал имеет N степеней свободы ($M = N \times p$, где $p \geq 1$ – коэффициент передискретизации).

Представим сигнал с шумом в виде $f(t) = f_0(t) + \varphi(t)$. Восстановленные согласно (1) отсчеты сигнала с шумом будут иметь вид

$$f(t) = \sum_{r=1}^{M} (f_0(t_r) + \varphi(t_r))\, w_r(t - t_r). \tag{4}$$

Фильтрацию восстановленного сигнала с шумом проведем с помощью идеального фильтра нижних частот, пропускающего полезный сигнал без искажений:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{r=1}^{M} (f_0(t_r) + \varphi(t_r))\, \tilde{w}_r(t - t_r). \tag{5}$$

(Символ «~» здесь и далее означает применение операции фильтрации.)

Таким образом, при восстановлении сигнала по передискретизированным отсчетам во временной области достаточно выполнить фильтрацию весовых функций $w_r(t - t_r)$, которые являются периодическими (период $T = M\Delta$).

Для оценки погрешности восстановления значений сигнала в равномерных точках рассмотрим процедуру фильтрации шума отдельно, так как линейность соотношения (5) позволяет сделать это:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{r=1}^{M} \varphi(t_r)\, \tilde{w}_r(t - t_r).$$

В равномерных точках

$$\widetilde{\varphi}(k\Delta) = \sum_{r=1}^{M} \varphi(t_r)\,\widetilde{w}_r(k\Delta - t_r), \qquad k = 1, \ldots, M. \tag{6}$$

Как показано в [1], в отсутствие передискретизации среднеквадратическая погрешность восстановления k-го равномерного отсчета, $\left\langle \varepsilon^2(k) \right\rangle$, определяется формулой

$$\left\langle \varepsilon^2(k) \right\rangle = \sigma_\varphi^2 \sum_{r=1}^{M} (w_r(k\Delta - t_r))^2,$$

где σ_φ^2 – дисперсия шума в исходных неравномерных точках. Для учета эффекта фильтрации достаточно в этой формуле заменить w_r на $\widetilde{w}_r$:

$$\left\langle \widetilde{\varepsilon}^2(k) \right\rangle = \sigma_\varphi^2 \sum_{r=1}^{M} (\widetilde{w}_r(k\Delta - t_r))^2. \tag{7}$$

При переходе от соотношения $\varphi(t) = \sum_{r=1}^{M} \varphi(t_r)\,w_r(t - t_r)$, записанного во временной области, в частотную область соответствующие гармоники спектров левой и правой части будут определяться формулой

$$S_\varphi(k) = \sum_{r=1}^{M} \varphi(t_r)\,S_{wr}(k), \tag{8}$$

где $S_\varphi(k)$ и $S_{wr}(k)$ – амплитуды k-х гармоник спектра восстановленного в равномерных точках случайного процесса $\varphi(t)$ и спектра r-й весовой функции соответственно. Можно показать, что для случайного некоррелированного шума с нулевым средним они связаны соотношением

$$\left| S_\varphi(k) \right|^2 = \overline{\varphi(t_r)^2} \sum_{r=1}^{M} \left| S_{wr}(k) \right|^2 = \sigma_\varphi^2 \sum_{r=1}^{M} \left| S_{wr}(k) \right|^2. \tag{9}$$

Фильтрация восстановленного сигнала с помощью идеального фильтра нижних частот убирает высокочастотные составляющие восстановленного шума, не изменяя параметров сигнала и низкочастотных составляющих шума.

Полученное выражение показывает, что спектральная плотность погрешности восстановления сигнала однозначно определяется спектральными плотностями весовых восстанавливающих функций, т. е. характером и степенью неравномерности исходных отсчетов.

Обсуждение результатов моделирования. При моделировании шум $\varphi(t_r)$ в каждой из исходных точек отсчетов задавался в виде случайной величины, равномерно распределенной в интервале $[-1; +1]$. При малых отклонениях моментов отсчетов от равномерных положений $(\alpha \ll 1)$ усредненная по множеству реализаций спектральная плотность восстановленного случай-

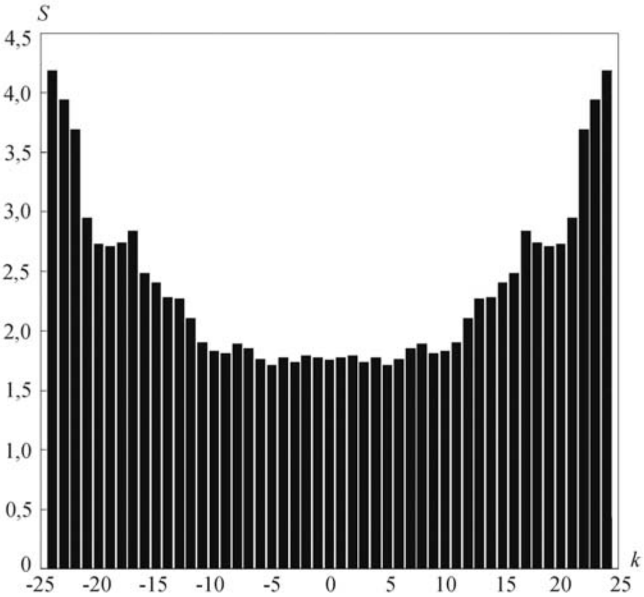

Рис. 1. Пример спектральной плотности восстановленного в равномерные моменты времени случайного процесса (для $\alpha = 0{,}9$)

ного процесса (шума) равномерна. По мере увеличения случайным образом заданной неравномерности возрастают как высокочастотные, так и низкочастотные составляющие шума (хотя последние в меньшей степени). На рис. 1 показана усредненная по десяти случайным неравномерностям отсчетов спектральная плотность восстановленного в равномерные моменты времени случайного процесса при $\alpha = 0{,}9$ (для каждого случая неравномерности проводилось также усреднение результатов по множеству реализаций $\varphi(t_r)$). Спектральная плотность шума в исходных неравномерных точках отсчетов предполагается постоянной и равной единице. Отметим, что, поскольку сигнал заранее неизвестен, для практических целей часто полезно хотя бы приблизительно оценить, как неравномерность отсчетов повлияет на погрешность восстановления, связанную с шумом исходных отсчетов. Такие результаты приведены в [2].

Рис. 2 иллюстрирует сравнение эффективности метода фильтрации и МНК при наличии передискретизации.

Подведем итоги нашего моделирования. Метод наименьших квадратов, как следует из его названия, оптимален в смысле восстановления низкочастотного сигнала, обеспечивающего минимум суммы квадратов отклонений от исходных передискретизированных отсчетов. Видно, что этот метод наиболее эффективно использует избыточные отсчеты для уменьшения влияния неравномерности дискретизации и случайного шума, наложенного на восстанавливаемый сигнал.

Сравнительно высокая эффективность рассмотренного в [2] метода разбиения последовательности исходных отсчетов на подпоследовательности объясняется уменьшением относительной неравномерности отсчетов при таком разбиении и усреднением результатов восстановления, поэтому средняя дисперсия шума значительно уменьшается. Однако его использование при нецелых значениях коэффициента передискретизации p затруднительно.

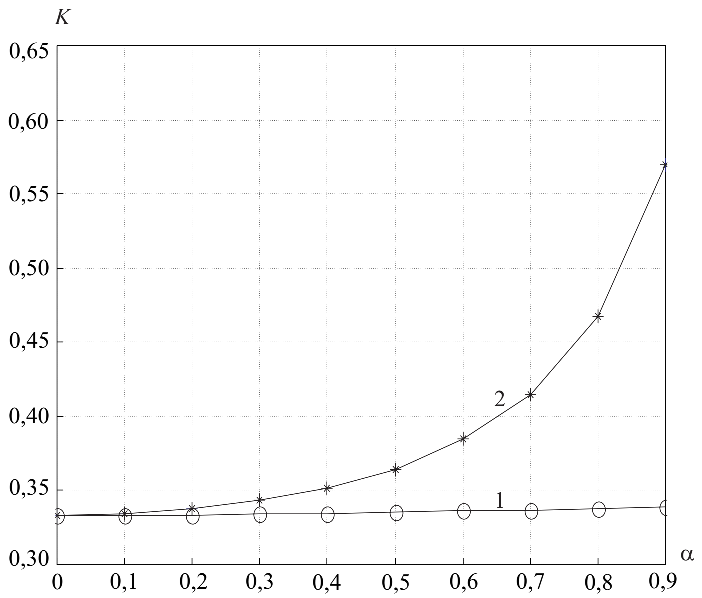

Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления шума K от степени неравномерности α при передискретизации ($p = 3$): метод наименьших квадратов (кривая 1), метод фильтрации (кривая 2)

Использование метода фильтрации при не очень большой степени неравномерности отсчетов ($\alpha \leq 0,5$) оправдано, так как средняя дисперсия погрешности восстановленных отсчетов, связанная с шумом исходных, уменьшается почти в p раз. Метод наименьших квадратов оказывается заметно эффективнее особенно при больших значениях α. Однако метод фильтрации требует меньших вычислительных затрат, чем МНК, и может быть использован при обработке больших массивов данных.

ВЫВОДЫ

1. Для восстановления сигнала с конечным числом степеней свободы по его передискретизированным неравномерным отсчетам в присутствии аддитивного некоррелированного амплитудного шума возможен метод, основанный на восстановлении последовательности передискретизированных равномерных отсчетов посредством весовых функций и последующей фильтрации полученных отсчетов. Уступая МНК по эффективности, он требует меньших вычислительных затрат и может быть использован при обработке больших массивов данных.

2. Спектральная плотность погрешности восстановления равномерных отсчетов однозначно определяется спектральными плотностями весовых восстанавливающих функций, т. е. характером и степенью неравномерности отсчетов.

3. При восстановлении сигнала во временной области по его неравномерным отсчетам достаточно выполнять фильтрацию отсчетных весовых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов В. М., Касперович А. Н., Резник А. Л.** Восстановление сигнала с конечным числом степеней свободы при его неравномерной дискретизации // Автометрия. 2000. № 3. С. 26.
2. **Bondarenko Yu. V., Efimov V. M., Kasperovich A. N., Reznik A. L.** Signal reconstruction from a set of noisy nonuniform samples at oversampling (computer simulation) // Proc. of the IASTED Intern. Conf. "Automation, Control, and Information Technology". Calgary: ACTA Press, 2002. P. 491.
3. **Yen J. L.** On nonuniform sampling of bandwidth-limited signal // IRE Trans. Circuit Theory. 1956. **CT-3**, N 4. P. 251.
4. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Методы теории целых функций в радиоразведке, связи и оптике. М.: ГИФМЛ, 1962.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: bjuv@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
25 ноября 2004 г.