РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 5

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, А. В. Торгов

(Новосибирск)

ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ ДЛЯ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ *

Получены интерполяционные соотношения для безошибочной реконструкции сигнала с ограниченным спектром при периодически неравномерной дискретизации сигнала и его производных. Вычислена дисперсия ошибки восстановления сигнала с неограниченным спектром при использовании этих соотношений.

Введение. В работе [1] получена теорема отсчетов для случая периодически неравномерной дискретизации сигнала. Это соотношение послужило основой для получения теоремы отсчетов при совместной равномерной дискретизации сигнала и его производных [2]. В данной работе рассматривается случай восстановления сигнала, когда осуществляется периодически неравномерная дискретизация: 1) сигнала и его первой производной; 2) сигнала, его первой и второй производных.

Периодически неравномерная дискретизация сигнала и его первой производной. Последующие результаты базируются на теореме отсчетов при периодически неравномерной дискретизации сигнала с ограниченным частотой $|\omega| \le \pi/\Delta$ спектром [1]:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{M-1} f(t_r + nM\Delta) \frac{\sin \frac{\pi}{M\Delta}(t - t_r - nM\Delta)}{\frac{\pi}{M\Delta}(t - t_r - nM\Delta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \ne r}}^{M-1} \frac{\sin \frac{\pi}{M\Delta}(t - t_k - nM\Delta)}{\sin \frac{\pi}{M\Delta}(t_r - t_k)}, \tag{1}$$

где $t_0 < t_1 < \ldots < t_{M-1} < M\Delta$; $M\Delta$ – период неравномерной дискретизации.

Рассмотрим ситуацию, когда величина M четна, а дискретизация сигнала осуществляется в моменты времени $t_0 - \frac{\tau}{2} + n2N\Delta,\ t_0 + \frac{\tau}{2} + n2N\Delta, \ldots$ $\ldots, t_{N-1} - \frac{\tau}{2} + n2N\Delta,\ t_{N-1} + \frac{\tau}{2} + n2N\Delta$ ($M = 2N$). В этом случае в соответст-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00913) и Президиума РАН (программа 2.13/2005).

вии с (1) отсчетные функции выглядят следующим образом:

$$w_{-r}\left(t-t_r+\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_r+\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)}{\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_r+\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)}\frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_r-\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)}{-\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\tau}\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_k+\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_k-\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)}{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k-\tau)}; \qquad (2)$$

$$w_{+r}\left(t-t_r-\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_r-\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)}{\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_r-\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)}\frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_r+\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)}{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\tau}\times$$

$$\times\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_k+\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}\left(t-t_k-\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)}{\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)}. \qquad (3)$$

Введем далее новые переменные [3]

$$\begin{aligned}f^{(0)}(t_r+n2N\Delta)&=\frac{1}{2}\left(f\left(t_r-\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)+f\left(t_r+\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)\right);\\f^{(1)}(t_r+n2N\Delta)&=\frac{1}{\tau}\left(f\left(t_r+\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)-f\left(t_r-\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)\right),\end{aligned} \qquad (4)$$

где $r=\overline{0,N-1}$. Решая эту простую систему уравнений относительно $f\left(t_r-\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)$ и $f\left(t_r+\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)$, получим

$$\begin{aligned}f\left(t_r+\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)&=f^{(0)}(t_r+n2N\Delta)+\frac{\tau}{2}f^{(1)}(t_r+n2N\Delta);\\f\left(t_r-\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)&=f^{(0)}(t_r+n2N\Delta)-\frac{\tau}{2}f^{(1)}(t_r+n2N\Delta).\end{aligned} \qquad (5)$$

При $\tau\to 0$ величины $f^{(0)}(t_r+n2N\Delta)$ и $f^{(1)}(t_r+n2N\Delta)$ стремятся к значению сигнала и его производной в абсциссе, равной величине $(t_r+n2N\Delta)$.

Если учесть, что в соответствии с (1)

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{N-1}\left(f\left(t_r-\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)w_{-r}\left(t-t_r+\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(t_r+\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)w_{+r}\left(t-t_r-\frac{\tau}{2}+n2N\Delta\right)\right), \tag{6}$$

то, подставляя соотношения (5) в формулу (6), получим соотношение

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{N-1}(f^{(0)}(t_r+n2N\Delta)\,w_{(0)r}(t-t_r-n2N\Delta)+$$

$$+f^{(1)}(t_r+n2N\Delta)\,w_{(1)r}(t-t_r-n2N\Delta)), \tag{7}$$

где отсчетные функции

$$w_{(0)r}(t-t_r-n2N\Delta)=w_{-r}\left(t-t_r+\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)+w_{+r}\left(t-t_r-\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right);$$

$$w_{(1)r}(t-t_r-n2N\Delta)=\frac{\tau}{2}\left(-w_{-r}\left(t-t_r+\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)+w_{+r}\left(t-t_r-\frac{\tau}{2}-n2N\Delta\right)\right). \tag{8}$$

Вычисление пределов в (8) (при $\tau\to 0$) приводит к теореме отсчетов для сигнала с ограниченным спектром ($|\omega|\le\pi/\Delta$) при периодически неравномерной дискретизации сигнала и его первой производной:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{N-1}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_r-n2N\Delta)}{\left(\frac{\pi}{2N\Delta}\right)^2(t-t_r-n2N\Delta)^2}\prod_{\substack{k=0\\k\ne r}}^{N-1}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_k)}{\sin^2\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)}\left[f^{(0)}(t_r+n2N\Delta)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+(t-t_r-n2N\Delta)\frac{\pi}{2N\Delta}g_{1r1}\right)+f^{(1)}(t_r+n2N\Delta)(t-t_r-n2N\Delta)\right], \tag{9}$$

где $g_{1r1}=-2\sum\limits_{\substack{k=0\\k\ne r}}^{N-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N\Delta}(t_r-t_k)$.

Сравним теорему отсчетов (9) с соответствующей теоремой отсчетов при равномерной дискретизации из [2]:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2\Delta}(t-2n\Delta)}{\left(\frac{\pi}{2\Delta}\right)^2(t-2n\Delta)^2}[f^{(0)}(2n\Delta)+f^{(1)}(2n\Delta)(t-2n\Delta)]. \tag{10}$$

Соотношение (9) содержит множители $w_{0r}(t) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{N-1} \dfrac{\sin^2 \dfrac{\pi}{2N\Delta}(t - t_k)}{\sin^2 \dfrac{\pi}{2N\Delta}(t_r - t_k)}$, учитывающие периодическую неравномерность дискретизации. Кроме того, дополнительные слагаемые $(t - t_r - n2N\Delta)\dfrac{\pi}{2N\Delta} 2\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{N-1} \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2N\Delta}(t_r - t_k)$ обеспечивают равенство нулю производных отсчетных функций сигнала в моменты времени $\{t_r\}$. Отметим, что если абсциссы отсчетов удовлетворяют условию равномерной дискретизации $t_r = r2\Delta$ $(r = \overline{0, N-1})$, то теорема (9) превращается в теорему отсчетов (8).

Периодически неравномерная дискретизация сигнала, его первой и второй производных. Пусть далее в формуле (1) величина $M = 3N$, а дискретизация сигнала осуществляется в периодические моменты времени $t_0 - \tau + n3N\Delta,\ t_0 + n3N\Delta,\ t_0 + \tau + n3N\Delta,\ \ldots,\ t_{N-1} - \tau + n3N\Delta,\ t_{N-1} + n3N\Delta,$ $t_{N-1} + \tau + n3N\Delta.$ В этом случае из формулы (1) вытекают следующие соотношения для отсчетных функций:

$$w_{-r}(t - t_r + \tau - n3N\Delta) =$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r + \tau - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - \tau - n3N\Delta)}{\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r + \tau - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(-\tau) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(-2\tau)} \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{N-1} \frac{\sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k + \tau - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k - \tau - n3N\Delta)}{\sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k - \tau) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k - 2\tau)};$$

$$w_r(t - t_r - n3N\Delta) =$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r + \tau - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - \tau - n3N\Delta)}{\sin \frac{\pi}{3N\Delta}\tau \cdot \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(-\tau)} \times \tag{11}$$

$$\times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{N-1} \frac{\sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k + \tau - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k - n3N\Delta) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k - \tau - n3N\Delta)}{\sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k + \tau) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k) \cdot \sin \frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k - \tau)};$$

$$w_{+r}(t - t_r - \tau - n3N\Delta) =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r + \tau - n3N\Delta)\cdot \sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - n3N\Delta)\cdot \sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - \tau - n3N\Delta)}{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}2\tau\cdot \sin\frac{\pi}{3N\Delta}\tau\cdot \frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_r - \tau - n3N\Delta)} \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=0\\ k\neq r}}^{N-1} \frac{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k + \tau - n3N\Delta)\cdot \sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k - n3N\Delta)\cdot \sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t - t_k - \tau - n3N\Delta)}{\sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k + 2\tau)\cdot \sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k + \tau)\cdot \sin\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r - t_k)}.$$

где $r = \overline{0, N-1}$.

Как и в предыдущем разделе, введем новые переменные (см. также [3])

$$f^{(0)}(t_0 + n3N\Delta) = \frac{1}{3}(f(t_0 - \tau + n3N\Delta) + f(t_0 + n3N\Delta) + f(t_0 + \tau + n3N\Delta));$$

$$f^{(1)}(t_0 + n3N\Delta) = \frac{1}{2\tau}(f(t_0 + \tau + n3N\Delta) - f(t_0 - \tau + n3N\Delta)); \tag{12}$$

$$f^{(2)}(t_0 + n3N\Delta) = \frac{1}{\tau^2}(f(t_0 - \tau + n3N\Delta) - 2f(t_0 + n3N\Delta) + f(t_0 + \tau + n3N\Delta)).$$

Решение системы уравнений (12) относительно старых переменных дает следующие результаты:

$$f(t_r - \tau + n3N\Delta) = f^{(0)}(t_r + n3N\Delta) - \tau f^{(1)}(t_r + n3N\Delta) + \frac{\tau^2}{6} f^{(2)}(t_r + n3N\Delta);$$

$$f(t_r + n3N\Delta) = f^{(0)}(t_r + n3N\Delta) - \frac{\tau^2}{3} f^{(2)}(t_r + n3N\Delta); \tag{13}$$

$$f(t_r + \tau + n3N\Delta) = f^{(0)}(t_r + n3N\Delta) + \tau f^{(1)}(t_r + n3N\Delta) + \frac{\tau^2}{6} f^{(2)}(t_r + n3N\Delta).$$

В соответствии с (1)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} (f(t_r - \tau + n3N\Delta) w_{-r}(t - t_r + \tau - n3N\Delta) +$$

$$+ f(t_r + n3N\Delta) w_r(t - t_r - n3N\Delta) + f(t_r + \tau + n3N\Delta) w_{+r}(t - t_r - \tau - n3N\Delta)). \tag{14}$$

Подставляя значения старых переменных из (13) в (14), получим соотношения

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} (f^{(0)}(t_r + n3N\Delta) w_{(0)r}(t - t_r - n3N\Delta) +$$

$$+f^{(1)}(t_r+n3N\Delta)\,w_{(1)r}(t-t_r-n3N\Delta)+f^{(2)}(t_r+n3N\Delta)\,w_{(2)r}(t-t_r-n3N\Delta)),\tag{15}$$

где отсчетные функции

$$\begin{gathered}
w_{(0)r}(t-t_r-n3N\Delta)=w_{-r}(t-t_r+\tau-n3N\Delta)+\\
+w_r(t-t_r-n3N\Delta)+w_{+r}(t-t_r-\tau-n3N\Delta);\\
w_{(1)r}(t-t_r-n3N\Delta)=\tau(-w_{-r}(t-t_r+\tau-n3N\Delta)+w_{+r}(t-t_r-\tau-n3N\Delta));\\
w_{(2)r}(t-t_r-n3N\Delta)=\frac{\tau^2}{6}(w_{-r}(t-t_r+\tau-n3N\Delta)-\\
-2w_r(t-t_r-n3N\Delta)+w_{+r}(t-t_r-\tau-n3N\Delta)).
\end{gathered}\tag{16}$$

При $\tau\to 0$ новые переменные стремятся соответственно к значению сигнала и его первой и второй производных, а отсчетные функции (16) – к соответствующим пределам. В итоге имеем теорему отсчетов при периодически неравномерной дискретизации сигнала и его первой и второй производных:

$$\begin{gathered}
f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{N-1}\frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r-n3N\Delta)}{\left(\frac{\pi}{3N\Delta}\right)^3(t-t_r-n3N\Delta)^3}(-1)^{n(N-1)}\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k)}{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)}\times\\
\times\left\{f^{(0)}(t_r+n3N\Delta)\left[1+(t-t_r-n3N\Delta)\frac{\pi}{3N\Delta}g_{2r1}+(t-t_r-n3N\Delta)^2\left(\frac{\pi}{3N\Delta}\right)^2g_{2r2}\right]+\right.\\
+f^{(1)}(t_r+n3N\Delta)(t-t_r-n3N\Delta)\left[1+(t-t_r-n3N\Delta)\frac{\pi}{3N\Delta}g_{2r1}\right]+\\
\left.+f^{(2)}(t_r+n3N\Delta)\frac{1}{2!}(t-t_r-n3N\Delta)^2\right\},
\end{gathered}\tag{17}$$

где

$$g_{2r1}=-3\sum_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k),$$

$$g_{2r2}=\frac{1}{2}\left[3N-2+3\sum_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)+9\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)\right)^2\right].$$

Если периодическая неравномерность дискретизации исчезает ($t_r = r3\Delta$, $r = \overline{0, N-1}$), формула (17) переходит в соотношение [3]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 \frac{\pi}{3\Delta}(t - n3\Delta)}{\left(\frac{\pi}{3\Delta}\right)^3 (t - n3\Delta)^3} \left\{ f^{(0)}(n3\Delta)\left[1 + \frac{1}{2}(t - n3\Delta)^2 \left(\frac{\pi}{3\Delta}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + f^{(1)}(n3\Delta)(t - n3\Delta) + f^{(2)}(n3\Delta)\frac{1}{2}(t - n3\Delta)^2 \right\}, \tag{18}$$

так как в этом случае $g_{2r1} = 0$, а $g_{2r2} = N^2/2$.

Дисперсия ошибки восстановления. В данной работе получено соотношение для дисперсии ошибки реконструкции сигнала на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$ при использовании теорем (9) и (17). В соответствии с теоремой (9) дисперсия ошибки

$$\varepsilon^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega) \times$$

$$\times \left| e^{-i\omega t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} e^{-i\omega(t_r + n2N\Delta)} [w_{(0)r}(t - t_r - n2N\Delta) - i\omega w_{(1)r}(t - t_r - n2N\Delta)] \right|^2, \tag{19}$$

где $w_{(0)r}(t - t_r - n2N\Delta)$, $w_{(1)r}(t - t_r - n2N\Delta)$ – отсчетные функции сигнала и его первой производной из соотношения (9).

Если учесть, что

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2N\Delta}(t - t_r - n2N\Delta)}{\left(\frac{\pi}{2N\Delta}\right)^2 (t - t_r - n2N\Delta)^2} = \frac{N\Delta}{\pi} \int_{-\pi/N\Delta}^{\pi/N\Delta} d\lambda e^{-i\lambda(t - t_r - n2N\Delta)} \left(1 - \left|\frac{\lambda N\Delta}{\pi}\right|\right); \tag{20}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2N\Delta}(t - t_r - n2N\Delta)}{\left(\frac{\pi}{2N\Delta}\right)^2 (t - t_r - n2N\Delta)^2}(t - t_r - n2N\Delta) = i\left(\frac{N\Delta}{\pi}\right)^2 \int_{-\pi/N\Delta}^{\pi/N\Delta} d\lambda e^{-i\lambda(t - t_r - n2N\Delta)} \operatorname{sign}\lambda,$$

то после подстановки в соотношение (19) выражений для отсчетных функций с учетом (20) и использования разложения в тригонометрический ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(-\omega + \lambda + \frac{\pi}{N\Delta} n\right) = \frac{N\Delta}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\omega+\lambda)n2N\Delta}$ получим

$$\varepsilon^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega) \left| 1 - \sum_{r=0}^{N-1} w_{0r}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1\left[1 - \left|\frac{\omega N\Delta}{\pi} - n\right|\right] e^{i\frac{\pi}{N\Delta} n(t - t_r)} \times\right.$$

$$\times\left[1-\left|\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right|+\frac{\omega N\Delta}{\pi}\operatorname{sign}\left(\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right)+i\frac{g_{1r1}}{2}\operatorname{sign}\left(\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right)\right]\Bigg|^2. \qquad (21)$$

Так как

$$1\left[1-\left|\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right|\right]\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{N\Delta}n(t-t_r)}\times$$

$$\times\left[1-\left|\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right|+\frac{\omega N\Delta}{\pi}\operatorname{sign}\left(\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right)+i\frac{g_{1r1}}{2}\operatorname{sign}\left(\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right)\right]=$$

$$=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{N\Delta}n(t-t_r)}\left\{\left(1-n-i\frac{q_{1r1}}{2}\right)1\left[\left(\frac{\omega N\Delta}{\pi}-(n-1)\right)\left(n-\frac{\omega N\Delta}{\pi}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left(1+n+i\frac{g_{1r1}}{2}\right)1\left[\left(\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right)\left(n+1-\frac{\omega N\Delta}{\pi}\right)\right]\right\},$$

то при $n<\frac{\omega N\Delta}{\pi}<n+1$ множитель в соотношении (21) при функции $w_{0r}(t)$ есть

$$P_r(t,n)=-\left(n+\frac{i}{2}g_{1r1}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{N\Delta}(n+1)(t-t_r)}+\left(n+1+\frac{i}{2}g_{1r1}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{N\Delta}n(t-t_r)}.$$

В связи с этим после усреднения соотношения (21) по времени на интервале $N2\Delta$ формула для дисперсии ошибки приобретает следующий вид:

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle=2\int_0^\infty d\omega S_f(\omega)\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}1\left[\left(\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right)\left(n+1-\frac{\omega N\Delta}{\pi}\right)\right]\times\right.$$

$$\times\sum_{r=0}^{N-1}\left\langle w_{0r}(t)(P_r(t,n)+P_r^*(t,n))\right\rangle+$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}1\left[\left(\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right)\left(n+1-\frac{\omega N\Delta}{\pi}\right)\right]\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{N-1}\left\langle w_{0r}(t)w_{0p}(t)P_{rp}(t,n)\right\rangle\right], \qquad (22)$$

где

$$P_{rp}(t,n)=P_r(t,n)P_r^*(t,n)=\cos\frac{\pi}{N\Delta}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t_p-t_r)[a(r)a(p)+b(r)b(p)]+$$

$$+\sin\frac{\pi}{N\Delta}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t_p-t_r)[a(r)b(p)-a(p)b(r)],$$

$$a(r)=\cos\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_r)+g_{1r1}\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_r),$$

$$b(r)=g_{1r1}\cos\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_r)-(2n+1)\sin\frac{\pi}{2N\Delta}(t-t_r).$$

Анализ показывает, что второе слагаемое под интегралом в (22) равно двум при $0\le n\le N-1$ и нулю при $n\ge N$, а третье слагаемое в (22) равно единице при $0\le n\le N-1$. Поэтому дисперсия ошибки

$$\left\langle \varepsilon^2\right\rangle=2\int\limits_{\frac{\pi}{\Delta}}^{\infty}d\omega S_f(\omega)+2\sum_{n=N}^{\infty}\int\limits_{n\frac{\pi}{N\Delta}}^{(n+1)\frac{\pi}{N\Delta}}d\omega S_f(\omega)\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{N-1}\left\langle w_{0r}(t)\,w_{0p}(t)P_{rp}(t,n)\right\rangle. \tag{23}$$

Это соотношение позволяет вычислить дисперсию реконструкции сигнала при помощи теоремы (9) на частотах $|\omega|>\pi/\Delta$.

При использовании теоремы (17) для сигнала с неограниченным по частоте спектром дисперсия ошибки

$$\varepsilon^2(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega S_f(\omega)\Bigg|\mathrm{e}^{-i\omega t}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-i\omega(t_r+n3N\Delta)}\times$$

$$\times[w_{(0)r}(t-t_r-n3N\Delta)-i\omega w_{(1)r}(t-t_r-n3N\Delta)-\omega^2 w_{(2)r}(t-t_r-n3N\Delta)]\Bigg|^2, \tag{24}$$

где отсчетные функции сигнала, его первой и второй производных ($w_{(0)r}(t-t_r-n3N\Delta)$, $w_{(1)r}(t-t_r-n3N\Delta)$ и $w_{(2)r}(t-t_r-n3N\Delta)$ соответственно) определяются соотношением (16).

Рассмотрим случай, когда величина N нечетна. Если воспользоваться равенством

$$\frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_r-n3N\Delta)}{\left(\frac{\pi}{2N\Delta}\right)^3(t-t_r-n3N\Delta)^{3-m}}=(-i)^m\frac{N\,3\Delta}{2\pi}\int\limits_{-\pi/N\Delta}^{\pi/N\Delta}d\lambda\,\mathrm{e}^{-i\lambda(t-t_r-n3N\Delta)}\psi^{(m)}(\lambda), \tag{25}$$

где

$$\psi^{(0)}(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\frac{3N\Delta}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\pi}{N\Delta}+\lambda\right)^2 1\left[\left(\lambda+\frac{\pi}{N\Delta}\right)\left(-\frac{\pi}{3N\Delta}-\lambda\right)\right]+$$

$$+\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{3N\Delta}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\pi}{3N\Delta}+\lambda\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3N\Delta}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\pi}{3N\Delta}-\lambda\right)^2\right]1\left[\left(\lambda+\frac{\pi}{3N\Delta}\right)\left(\frac{\pi}{3N\Delta}-\lambda\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{3N\Delta}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\pi}{N\Delta}-\lambda\right)^2 1\left[\left(\lambda-\frac{\pi}{3N\Delta}\right)\left(\frac{\pi}{N\Delta}-\lambda\right)\right], \tag{26}$$

а также разложением $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(-\omega+\lambda+\frac{2\pi}{3N\Delta}n\right)=\frac{3N\Delta}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i(-\omega+\lambda)n3N\Delta}$, то соотношение (24) принимает следующий вид:

$$\varepsilon^2(t)=\int_{|\omega|>\pi/\Delta}d\omega S_f(\omega)\left|1-\sum_{r=0}^{N-1}w_{0r}(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}1\left[1-\left|\frac{\omega N\Delta}{\pi}-n\right|\right]\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3N\Delta}n(t-t_r)}\times\right.$$

$$\times\left[\psi^{(0)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3N\Delta}n\right)-i\frac{\pi}{3N\Delta}g_{2r1}\psi^{(1)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3N\Delta}n\right)-\left(\frac{\pi}{3N\Delta}\right)^2g_{2r2}\psi^{(2)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3N\Delta}n\right)-\right.$$

$$\left.\left.-i\omega\left(-i\psi^{(1)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3N\Delta}n\right)-\frac{\pi}{3N\Delta}g_{2r1}\psi^{(2)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3N\Delta}n\right)\right)+\frac{\omega^2}{2}\psi^{(2)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3N\Delta}n\right)\right]\right|^2, \tag{27}$$

где $w_{0r}(t)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq r}}^{N-1}\frac{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t-t_k)}{\sin^3\frac{\pi}{3N\Delta}(t_r-t_k)}$.

Преобразуя формулу (27), получим

$$\varepsilon^2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega S_f(\omega)\left|1-\sum_{r=0}^{N-1}w_{0r}(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_r(t,n)\times\right.$$

$$\left.\times1\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{3N\Delta}n+\frac{\pi}{3N\Delta}\right)\left(\frac{2\pi}{3N\Delta}n+\frac{\pi}{3N\Delta}-\omega\right)\right]\right|^2, \tag{28}$$

где

$$P_r(t,n)=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3N\Delta}(n+1)(t-t_r)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-n\right)^2-\frac{1}{4}g_{2r2}-\frac{i}{2}g_{2r1}\left(\frac{1}{2}-n\right)\right]+$$

$$+\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3N\Delta}n(t-t_r)}\left[\frac{3}{4}-n^2+\frac{1}{2}g_{2r2}-ig_{2r1}n\right]+$$

$$+\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3N\Delta}(n-1)(t-t_r)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+n\right)^2-\frac{1}{4}g_{2r2}+\frac{i}{2}g_{2r1}\left(\frac{1}{2}+n\right)\right]. \tag{29}$$

После усреднения соотношения (28) по времени на периоде $3N\Delta$ придем к окончательному результату:

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle=2\int_{\frac{\pi}{\Delta}}^{\infty}d\omega S_f(\omega)+2\sum_{n=\frac{3N+1}{2}}^{\infty}\int_{n\frac{2\pi}{3N\Delta}-\frac{\pi}{3N\Delta}}^{n\frac{\pi}{3N\Delta}+\frac{\pi}{3N\Delta}}d\omega S_f(\omega)\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{N-1}\left\langle w_{0r}(t)w_{0p}(t)P_{rp}(t,n)\right\rangle, \tag{30}$$

где

$$P_{rp}(t,n)=P_r(t,n)P_p^*(t,n)=\cos\frac{2\pi}{3N\Delta}n(t_p-t_r)[a(r)a(p)+b(r)b(p)]+$$

$$+\sin\frac{2\pi}{3N\Delta}n(t_p-t_r)[a(r)b(p)-a(p)b(r)], \tag{31}$$

$$a(r)=\cos\frac{2\pi}{3N\Delta}(t-t_r)\left[\frac{1}{4}+n^2-\frac{1}{2}g_{2r2}\right]+\frac{3}{4}-n^2+\frac{1}{2}g_{2r2}+\frac{1}{2}g_{2r1}\sin\frac{2\pi}{3N\Delta}(t-t_r),$$

$$b(r)=ng_{2r1}\cos\frac{2\pi}{3N\Delta}(t-t_r)-n\sin\frac{2\pi}{3N\Delta}(t-t_r)-ng_{2r1}.$$

Соотношение (30) определяет дисперсию ошибки реконструкции сигнала на частотах $|\omega|>\pi/\Delta$.

ВЫВОДЫ

В данной работе на основании [1] получены теоремы отсчетов для двух случаев: 1) одновременной периодически неравномерной дискретизации сигнала и его первой производной; 2) одновременной периодически неравномерной дискретизации сигнала, его первой и второй производных. Кроме того, выведена формула для дисперсии реконструкции сигнала на частотах $|\omega|>\pi/\Delta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Yen J. L.** On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals // IRE Trans. on Circuit Theory. 1956. **3**, N 4. P. 251.
2. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Методы теории целых функций в радиотехнике, связи и оптике. М.: ГИФМЛ, 1962.
3. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Васьков С. Т.** О дисперсии ошибки восстановления сигнала при дополнительном использовании отсчетов его производных // Автометрия. 2004. **40**, № 6. С. 110.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
23 мая 2005 г.