

**А. П. Трифонов, Ю. Н. Прибытков**

*(Воронеж)*

**ОБНАРУЖЕНИЕ ОБЪЕКТОВ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПЛОЩАДЬЮ  
ПРИ НАЛИЧИИ ФОНА**

Выполнен синтез алгоритма обнаружения гауссовского изображения с неизвестной площадью на гауссовском фоне при наличии пространственного шума для аппликативной модели взаимодействия изображения и фона. Найдены характеристики алгоритма и исследовано влияние различия статистических характеристик фона и изображения на эффективность его обнаружения.

**Введение.** Необходимость в обнаружении объектов по их изображениям, как правило, возникает при обработке результатов дистанционного наблюдения, полученных в условиях низкого отношения сигнал/шум. Такая задача существенно отличается от хорошо изученных вопросов обнаружения одномерных сигналов в шумах. Для систем дистанционного наблюдения кроме флуктуационной помехи характерен еще один вид мешающего сигнала. В этих системах объект наблюдается на некоторой подстилающей поверхности. Сигнал, рассеянный этой поверхностью, представляет собой мешающий фон [1, 2]. Поэтому в задачу системы дистанционного наблюдения входит не только компенсация пространственного шума, но и выделение объекта на мешающем фоне. Решение этой задачи требует учета эффектов затенения объектом части подстилающей поверхности [1–3]. На практике часто априори неизвестна площадь обнаруживаемого изображения [2, 4]. Такая ситуация характерна, например, для наблюдения объектов, расположенных на неизвестном расстоянии от оптической или радиолокационной системы.

Задачам синтеза и анализа алгоритмов обнаружения объектов по их изображениям посвящен ряд работ [1–5]. В частности, в [1, 3, 5] рассмотрена задача обнаружения изображений с учетом эффекта затенения, однако при синтезе алгоритма обнаружения предполагалось, что площадь обнаруживаемого изображения априори известна. В [2, 4] проведен синтез и анализ алгоритмов обнаружения изображений с неизвестной площадью в предположении, что реализация наблюдаемых данных описывается моделью пуассоновского поля точек, что соответствует оптической локации. В то же время изображения реальных объектов, полученные в результате активной или пассивной радиолокации, часто достаточно хорошо описываются гауссовскими полями [6, 7].

Целью данной работы являются синтез и анализ алгоритма обнаружения гауссовского изображения с неизвестной площадью на гауссовском фоне, а

также определение влияния различия статистических характеристик фона и изображения на эффективность обнаружения.

**Постановка задачи.** Пусть в двумерной области  $G$  доступна наблюдению реализация гауссовского случайного поля  $x(\mathbf{r})$ . Здесь  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$  – радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей  $G$ . Положим, что при гипотезе  $H_i, i = 0, 1$ , поле  $x(\mathbf{r})$  представляет собой сумму гауссовского двумерного случайного сигнала  $\xi_i(\mathbf{r}, \chi)$ , содержащего неизвестный параметр  $\chi$ , и гауссовского белого шума  $n(\mathbf{r})$  с нулевым математическим ожиданием и одно-сторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Поля  $\xi_i(\mathbf{r}, \chi)$  и  $n(\mathbf{r})$  считаем статистически независимыми. Таким образом, при гипотезе  $H_i$

$$x(\mathbf{r}) = \xi_i(\mathbf{r}, \chi_0) + n(\mathbf{r});$$

$$a_{xi}(\mathbf{r}, \chi_0) = a_i(\mathbf{r}, \chi_0); \quad B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_0) = B_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_0) + N_0\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2,$$

где  $a_i(\mathbf{r}, \chi)$  и  $B_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi)$  – математические ожидания и корреляционные функции случайных полей  $\xi_i(\mathbf{r}, \chi)$ ;  $a_{xi}(\mathbf{r}, \chi)$  и  $B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi)$  – математические ожидания и корреляционные функции наблюдаемых данных  $x(\mathbf{r})$ ;  $\delta(\mathbf{r})$  – дельта-функция;  $\chi_0$  – истинное значение неизвестного параметра.

Как известно [8, 9], для решения задач проверки гипотез  $H_0$  и  $H_1$  необходимо формировать функционал отношения правдоподобия (ФОР) или его логарифм. Явный вид логарифма ФОР для задачи различения гауссовских полей с известными параметрами найден в [3]. Обобщая этот результат на случай, когда наблюдаемые поля содержат неизвестный параметр  $\chi$ , получим выражение для логарифма ФОР:

$$\begin{aligned} L(\chi) = & \frac{1}{N_0} \iint_G x(\mathbf{r}_1)x(\mathbf{r}_2)[Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi) - Q_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi)]d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \\ & + \int_G x(\mathbf{r})[V_1(\mathbf{r}, \chi) - V_0(\mathbf{r}, \chi)]d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_G [a_1(\mathbf{r}, \chi)V_1(\mathbf{r}, \chi) - a_0(\mathbf{r}, \chi)V_0(\mathbf{r}, \chi)]d\mathbf{r} - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda \int_G [\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda, \chi) - \theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda, \chi)]d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$V_i(\mathbf{r}, \chi) = 2 \left[ a_i(\mathbf{r}, \chi) - \int_G a_i(\mathbf{r}_1, \chi) Q_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \chi) d\mathbf{r}_1 \right] / N_0, \quad (2)$$

$$Q_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi) = \theta_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 1, \chi),$$

а функции  $\theta_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda, \chi)$  являются решением интегральных уравнений

$$\frac{N_0}{2} \theta_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda, \chi) + \lambda \int_G \theta_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, \lambda, \chi) B_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \chi) d\mathbf{r} = B_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi). \quad (3)$$

Воспользуемся полученными выражениями для решения задачи обнаружения изображения объекта с неизвестной площадью на мешающем фоне в присутствии пространственного шума.

Предположим, что при гипотезе  $H_1$  поле  $\xi_1(\mathbf{r})$  содержит полезное изображение  $s(\mathbf{r})$  и фон  $v(\mathbf{r})$ . Будем считать, что изображение занимает область  $\Omega_S$ . Тогда согласно аппликативной модели взаимодействия фоновое излучение формируется областью  $\Omega_F$ , дополняющей  $\Omega_S$  до  $G$  такой, что  $\Omega_S \cup \Omega_F = G$ , т. е. при гипотезе  $H_1$  поле  $\xi_1(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, \Omega_S)s(\mathbf{r}) + I(\mathbf{r}, \Omega_F)v(\mathbf{r})$ , а наблюдаемая реализация гауссовского случайного поля

$$H_1: x(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, \Omega_S)s(\mathbf{r}) + I(\mathbf{r}, \Omega_F)v(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Здесь функция  $I(\mathbf{r}, \Omega) = 1$ , если  $\mathbf{r} \in \Omega$ , и  $I(\mathbf{r}, \Omega) = 0$ , если  $\mathbf{r} \notin \Omega$ . Формула (4) является математическим выражением того факта, что в пределах  $\Omega_S$  поле  $x(\mathbf{r})$  есть сумма сигнала и шума, а в пределах  $\Omega_F$  является суммой фона и шума. Таким образом, в области, занимаемой полезным изображением (если оно есть), фон отсутствует.

Описанное аппликативное взаимодействие сигнала и фона не является ни линейным, ни аддитивным, однако оно не нарушает гауссовского характера распределения наблюдаемого поля  $x(\mathbf{r})$ . Полезное изображение занимает область  $\Omega_S \equiv \Omega(\chi_0)$  площадью  $\chi_0$ . Форма области  $\Omega(\chi)$  площадью  $\chi$  описывается индикатором

$$I_S(\mathbf{r}, \chi) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega_S; \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega_S. \end{cases}$$

Теперь наблюдаемые данные при гипотезе  $H_1$  (4) можно переписать в виде

$$H_1: x(\mathbf{r}) = I_S(\mathbf{r}, \chi_0)s(\mathbf{r}) + [1 - I_S(\mathbf{r}, \chi_0)]v(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Здесь  $\chi_0$  – истинное значение неизвестной площади обнаруживаемого изображения, которая принимает значение из интервала  $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ .

При гипотезе  $H_0$  будем считать, что полезное изображение  $s(\mathbf{r})$  отсутствует, а фон занимает всю область  $G$ , тогда поле  $\xi_0(\mathbf{r})$  представляет собой фон  $v(\mathbf{r})$ , т. е. при гипотезе  $H_0$  имеем  $\xi_0(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r})$ , а наблюдаемая реализация гауссовского случайного поля

$$H_0: x(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Предположим, что полезное изображение, фон и пространственный шум представляют собой независимые гауссовские случайные поля, тогда математическое ожидание и корреляционную функцию наблюдаемых данных  $x(\mathbf{r})$  при обеих гипотезах (5) и (6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_1: a_{x1}(\mathbf{r}) &= a_s(\mathbf{r})I_s(\mathbf{r}, \chi_0) + a_v(\mathbf{r})[1 - I_s(\mathbf{r}, \chi_0)]; \\ B_{x1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= I_s(\mathbf{r}_1, \chi_0)I_s(\mathbf{r}_2, \chi_0)B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ &+ [1 - I_s(\mathbf{r}_1, \chi_0)][1 - I_s(\mathbf{r}_2, \chi_0)]B_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + N_0\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2; \end{aligned} \quad (7)$$

$$H_0: a_{x0}(\mathbf{r}) = a_v(\mathbf{r});$$

$$B_{x0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + N_0\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2.$$

Здесь  $a_s(\mathbf{r})$ ,  $a_v(\mathbf{r})$  – математические ожидания, а  $B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и  $B_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  – корреляционные функции изображения и фона соответственно.

**Алгоритм обнаружения.** Далее будем считать, что полезное изображение  $s(\mathbf{r})$  и фон  $v(\mathbf{r})$  однородны на всей плоскости, частью которой является область наблюдения  $G$ . Поскольку области  $\Omega_S$  и  $G$  ограничены, то случайные поля, наблюдаемые в пределах этих областей, нельзя считать однородными. Предположим, что площади  $\chi_0$  и  $\chi_G$  областей  $\Omega_S$  и  $G$  соответственно много больше областей пространственной корреляции сигнала  $s(\mathbf{r})$  и фона  $v(\mathbf{r})$ . Это позволяет приближенно полагать изображение  $s(\mathbf{r})$  и фон  $v(\mathbf{r})$  однородными в областях  $\Omega_S$  и  $G$ , т. е. считаем, что внутри каждой из них справедливы выражения:

$$a_s(\mathbf{r}) = a_s; \quad a_v(\mathbf{r}) = a_v; \quad B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); \quad B_v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (8)$$

Для того чтобы определить явный вид логарифма ФОП (1), необходимо найти решения уравнений (3), используя для этого метод, представленный в работе [9]:

$$\begin{aligned} \theta_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda, \chi) \approx & \frac{1}{4\pi^2} \left\{ I_S(\mathbf{r}_1, \chi) I_S(\mathbf{r}_2, \chi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s \rho_s(\omega)}{1 + \lambda q_s \rho_s(\omega)} \exp(j\omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) d\omega + \right. \\ & \left. + [1 - I_S(\mathbf{r}_1, \chi)] [1 - I_S(\mathbf{r}_2, \chi)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_v \rho_v(\omega)}{1 + \lambda q_v \rho_v(\omega)} \exp(j\omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) d\omega \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\theta_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda) \approx \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_v \rho_v(\omega)}{1 + \lambda q_v \rho_v(\omega)} \exp(j\omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) d\omega, \quad (10)$$

где  $q_s = \frac{2G_s(0)}{N_0}$ ;  $q_v = \frac{2G_v(0)}{N_0}$ ;  $\rho_s(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(0)}$ ;  $\rho_v(\omega) = \frac{G_v(\omega)}{G_v(0)}$ ;  $G_s(\omega)$  и  $G_v(\omega)$  – спектральные плотности флуктуаций изображения и фона соответственно:

$$G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\mathbf{r}) \exp(-j\omega\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \quad G_v(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_v(\mathbf{r}) \exp(-j\omega\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Подставляя (9), (10) в (1) и (2), получим явный вид логарифма ФОП:

$$\begin{aligned} L(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega(\chi)} y_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_{\Omega(\chi)} y_0^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{2}{N_0} \left[ \frac{a_s}{1 + q_s} - \frac{a_v}{1 + q_v} \right] \int_{\Omega(\chi)} x(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \\ & - \frac{\chi}{N_0} \left[ \frac{a_s^2}{1 + q_s} - \frac{a_v^2}{1 + q_v} \right] - \frac{\chi}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \frac{1 + q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_v \rho_v(\omega)} \right] d\omega, \quad (11) \end{aligned}$$

где  $y_i(\mathbf{r})$  – сигналы на выходах пространственных фильтров с импульсными характеристиками  $H_i(\mathbf{r})$ , на вход которых подается реализация случайного

поля  $x(\mathbf{r})$ . Передаточные функции этих фильтров должны удовлетворять условиям

$$|H_1(\omega)|^2 = 2q_s \rho_s(\omega) / [N_0(1 + q_s \rho_s(\omega))],$$

$$|H_0(\omega)|^2 = 2q_v \rho_v(\omega) / [N_0(1 + q_v \rho_v(\omega))].$$

Если истинное значение площади  $\chi_0$  полезного изображения априори известно, то решение о наличии полезного изображения  $s(\mathbf{r})$  в наблюдаемой реализации  $x(\mathbf{r})$  выносится на основе сравнения ФОП или его логарифма (11) в точке  $\chi_0$  с некоторым порогом  $h$  [8]. При превышении порога, когда  $L(\chi_0) > h$ , принимается решение в пользу гипотезы  $H_1$  (полезное изображение есть). В противном случае, если  $L(\chi_0) < h$ , считают справедливой гипотезу  $H_0$  (полезного изображения нет).

Одно из возможных решений задачи обнаружения изображения в условиях априорной неопределенности относительно его площади является применение алгоритма максимального правдоподобия (АМП) [8, 9]. При синтезе такого алгоритма неизвестное значение параметра  $\chi$  заменяется на его оценку максимального правдоподобия. Следовательно, АМП принимает решение согласно правилу

$$L = \sup_{\chi} L(\chi) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} h, \quad \chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}].$$

**Характеристики алгоритма обнаружения.** Обычно [8, 9] эффективность алгоритма обнаружения характеризуют величинами вероятностей ошибки ложной тревоги  $\alpha$  и ошибки пропуска сигнала  $\beta$ . Согласно определению [8, 9] можем записать:

$$\alpha = P[H_1 | H_0] = P[\sup_{\chi} L(\chi) > h | H_0],$$

$$\beta = P[H_0 | H_1] = P[\sup_{\chi} L(\chi) < h | H_1].$$

Здесь через  $P[H_i | H_j]$ ,  $i, j = 0, 1$ , обозначена вероятность принятия решения о справедливости гипотезы  $H_i$ , в то время как верна гипотеза  $H_j$ . Таким образом, для нахождения  $\alpha$  и  $\beta$  необходимо определить вероятности превышения (и не превышения) максимумом логарифма ФОП (11) порога  $h$ . Для этого необходимо располагать законом распределения случайной величины  $L$  при обеих гипотезах  $H_i$ ,  $i = 0, 1$ .

Обозначим  $\mu_s = \chi_{\min} S_{\omega_s} / 4\pi^2$ ,  $\mu_v = \chi_{\min} S_{\omega_v} / 4\pi^2$ , где  $S_{\omega_s}$  и  $S_{\omega_v}$  – площади областей  $\omega_s$  и  $\omega_v$  на плоскости частот, занимаемые спектральными плотностями полезного изображения  $G_s(\omega)$  и фона  $G_v(\omega)$  соответственно.

Согласно [8, 10] при

$$\mu_s \rightarrow \infty, \quad \mu_v \rightarrow \infty \tag{12}$$

распределение логарифма ФОП при фиксированном неизвестном параметре  $\chi$  сходится к гауссовскому. В дальнейшем будем полагать, что площадь обла-

сти  $G$  велика настолько, что  $\mu_s \gg 1$ ,  $\mu_v \gg 1$ . Тогда логарифм ФОП (11) можно приближенно считать гауссовской случайной функцией аргумента  $\chi$ .

Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию для (11). С этой целью воспользуемся записью логарифма ФОП в общем виде (1). Пусть на вход алгоритма различения случайных полей (1) поступает реализация наблюдаемых данных  $x(\mathbf{r})$ , зависящая от истинного значения  $\chi_0$  неизвестного параметра. Определим условное математическое ожидание

$$m(\chi | \chi_0) = \langle L(\chi) | \chi_0 \rangle$$

и корреляционную функцию

$$K(\chi_1, \chi_2 | \chi_0) = \langle [L(\chi_1) - \langle L(\chi_1) | \chi_0 \rangle][L(\chi_2) - \langle L(\chi_2) | \chi_0 \rangle] | \chi_0 \rangle$$

логарифма ФОП (1). Для этого выполним усреднение логарифма ФОП по реализациям наблюдаемых данных:

$$\begin{aligned} m(\chi | \chi_0) &= \frac{1}{N_0} \iint_{GG} B_x(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_0) [\mathcal{Q}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi) - \mathcal{Q}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \\ &+ \frac{1}{N_0} \iint_{GG} a_x(\mathbf{r}_1, \chi_0) a_x(\mathbf{r}_2, \chi_0) [\mathcal{Q}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi) - \mathcal{Q}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \\ &+ \int_G a_x(\mathbf{r}, \chi_0) [V_1(\mathbf{r}, \chi) - V_0(\mathbf{r}, \chi)] d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_G [a_1(\mathbf{r}, \chi) V_1(\mathbf{r}, \chi) - a_0(\mathbf{r}, \chi) V_0(\mathbf{r}, \chi)] d\mathbf{r} - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda \int_G [\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda, \chi) - \theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda, \chi)] d\mathbf{r}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} K(\chi_1, \chi_2 | \chi_0) &= \\ &= \frac{2}{N_0^2} \iiint_{GGGG} B_x(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \chi_0) B_x(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4, \chi_0) [\mathcal{Q}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_1) - \mathcal{Q}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_1)] \times \\ &\times [\mathcal{Q}_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \chi_2) - \mathcal{Q}_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \chi_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \\ &+ \frac{4}{N_0^2} \iiint_{GGGG} B_x(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \chi_0) a_x(\mathbf{r}_2, \chi_0) a_x(\mathbf{r}_4, \chi_0) [\mathcal{Q}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_1) - \mathcal{Q}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_1)] \times \\ &\times [\mathcal{Q}_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \chi_2) - \mathcal{Q}_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \chi_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \\ &+ \frac{2}{N_0} \iiint_{GGG} a_x(\mathbf{r}_1, \chi_0) B_x(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \chi_0) [\mathcal{Q}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_1) - \mathcal{Q}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_1)] \times \\ &\times [V_1(\mathbf{r}_3, \chi_2) - V_0(\mathbf{r}_3, \chi_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 + \\ &+ \frac{2}{N_0} \iiint_{GGG} a_x(\mathbf{r}_1, \chi_0) B_x(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \chi_0) [\mathcal{Q}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_2) - \mathcal{Q}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_2)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [V_1(\mathbf{r}_3, \chi_1) - V_0(\mathbf{r}_3, \chi_1)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 + \\
& + \int_G \int_G B_x(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \chi_0) [V_1(\mathbf{r}_1, \chi_1) - V_0(\mathbf{r}_1, \chi_1)] [V_1(\mathbf{r}_2, \chi_2) - V_0(\mathbf{r}_2, \chi_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (7), (9), (10) в (13), (14) и учитывая (8), получим явный вид моментов логарифма ФОП (11) при обеих гипотезах: при наличии изображения в принятой реализации (т. е. когда справедлива гипотеза  $H_1$ ):

$$m(\chi | \chi_0) = m_1(\eta) = [(k_1 + k_2) \min(\eta, \eta_0) - \eta k_2] / \eta_{\min}, \tag{15}$$

$$K(\chi_1, \chi_2 | \chi_0) = K_1(\eta_1, \eta_2) = [\min(\eta_1, \eta_2) d_2 + (d_1 - d_2) \min(\eta_1, \eta_2, \eta_0)] / \eta_{\min} \tag{16}$$

и при отсутствии изображения в принятой реализации (т. е. когда справедлива гипотеза  $H_0$ ):

$$m(\chi | \chi_0 = 0) = m_0(\eta) = -k_2 \eta / \eta_{\min}, \tag{17}$$

$$K(\chi_1, \chi_2 | \chi_0 = 0) = K_0(\eta_1, \eta_2) = \min(\eta_1, \eta_2) d_2 / \eta_{\min}, \tag{18}$$

где  $\eta = \chi / \chi_{\max}$ ;  $\eta_0 = \chi_0 / \chi_{\max}$ ;  $\eta_{\min} = \chi_{\min} / \chi_{\max} = 1/R$ ;  $R = \chi_{\max} / \chi_{\min}$  — динамический диапазон изменения неизвестной площади;

$$\begin{aligned}
k_1 = \frac{\chi_{\min}}{2} & \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s \rho_s(\omega) - q_v \rho_v(\omega)}{1 + q_v \rho_v(\omega)} d\omega - \right. \\
& \left. - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \frac{1 + q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_v \rho_v(\omega)} \right] d\omega + \frac{2}{N_0} (a_s - a_v)^2 \frac{1}{1 + q_v} \right]; \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 = \frac{\chi_{\min}}{2} & \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \frac{1 + q_s \rho_s(\omega)}{1 + q_v \rho_v(\omega)} \right] d\omega - \right. \\
& \left. - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s \rho_s(\omega) - q_v \rho_v(\omega)}{1 + q_s \rho_s(\omega)} d\omega + \frac{2}{N_0} (a_s - a_v)^2 \frac{1}{1 + q_s} \right]; \tag{20}
\end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{\chi_{\min}}{2} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{q_s \rho_s(\omega) - q_v \rho_v(\omega)}{1 + q_v \rho_v(\omega)} \right]^2 d\omega + \frac{4}{N_0} (a_s - a_v)^2 \frac{1 + q_s}{(1 + q_v)^2} \right]; \tag{21}$$

$$d_2 = \frac{\chi_{\min}}{2} \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{q_s \rho_s(\omega) - q_v \rho_v(\omega)}{1 + q_s \rho_s(\omega)} \right]^2 d\omega + \frac{4}{N_0} (a_s - a_v)^2 \frac{1 + q_v}{(1 + q_s)^2} \right]. \quad (22)$$

Выражения (15)–(18) показывают, что математическое ожидание и корреляционная функция логарифма ФОП являются кусочно-дифференцируемыми. В частности, из (18) следует, что при отсутствии полезного изображения, т. е. когда справедлива гипотеза  $H_0$ , флуктуирующую часть логарифма ФОП можно приближенно считать винеровским случайным процессом [10]. Поэтому для определения вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала воспользуемся развитым в работах [8, 9] методом локально-марковской аппроксимации.

В работе [9] показано, что если первые два момента логарифма ФОП кусочно-дифференцируемы, то случайный гауссовский процесс  $L(\chi)$  при обеих гипотезах можно приближенно считать марковским диффузионным процессом в окрестности истинного значения параметра  $\chi_0$ . Поэтому для полного в статистическом смысле описания логарифма ФОП необходимо найти начальную плотность вероятности и вероятность перехода для  $L(\chi)$ , которая является решением уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова [10]. Используя методику, изложенную в [9], найдем коэффициенты сноса

$$M_1(L, \eta | H_i) = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0^+} \frac{\langle [L(\eta + \Delta\eta) - L(\eta)] | L(\eta) \rangle}{\Delta\eta}$$

и диффузии

$$M_2(L, \eta | H_i) = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0^+} \frac{\langle [L(\eta + \Delta\eta) - L(\eta)]^2 | L(\eta) \rangle}{\Delta\eta}$$

при обеих гипотезах: при гипотезе  $H_0$

$$M_1(L, \eta | H_0) = -k_2 / \eta_{\min}; \quad M_2(L, \eta | H_0) = d_2 / \eta_{\min}, \quad (23)$$

а при гипотезе  $H_1$

$$M_1(L, \eta | H_1) = \frac{1}{\eta_{\min}} \begin{cases} k_1, & \eta_{\min} \leq \eta \leq \eta_0; \\ -k_2, & \eta_0 < \eta \leq 1, \end{cases} \quad (24)$$

$$M_2(L, \eta | H_1) = \frac{1}{\eta_{\min}} \begin{cases} d_1, & \eta_{\min} \leq \eta \leq \eta_0; \\ d_2, & \eta_0 < \eta \leq 1. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае начальной плотностью вероятности будет одномерная плотность вероятности логарифма ФОП при  $\eta = \eta_{\min}$ . Учитывая его асимптотически гауссовский характер при выполнении (12) для начальной плотности вероятности имеем выражение

$$W(L; \eta_{\min} | H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i(\eta_{\min})} \exp \left\{ -\frac{(L - m_i(\eta_{\min}))^2}{2\sigma_i^2(\eta_{\min})} \right\}. \quad (25)$$



Из (15)–(18) следует, что

$$m_0(\eta_{\min}) = -k_2, \quad \sigma_0^2(\eta_{\min}) = d_2; \quad m_1(\eta_{\min}) = k_1, \quad \sigma_1^2(\eta_{\min}) = d_1.$$

Решая уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова с коэффициентами (23) и (24) при начальных (25) и соответствующих граничных условиях, как это сделано в [9], находим вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала при обнаружении полезного изображения с неизвестной площадью:

$$\begin{aligned} \alpha(h) = & 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x - h_1 - z_N)^2}{2}\right] \times \\ & \times \left\{ \Phi\left(z_N \sqrt{\frac{1 - \eta_{\min}}{\eta_{\min}}} + x \sqrt{\frac{\eta_{\min}}{1 - \eta_{\min}}}\right) - \right. \\ & \left. - \exp(-2xz_N) \Phi\left(z_N \sqrt{\frac{1 - \eta_{\min}}{\eta_{\min}}} - x \sqrt{\frac{\eta_{\min}}{1 - \eta_{\min}}}\right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \beta(h, \eta_0) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x + z_1)^2 + h_2^2 - 2h_2z_1}{2}\right] \times \\ & \times \left\{ \Phi\left(z_N \sqrt{\frac{1 - \eta_0}{\eta_{\min}}} + xA \sqrt{\frac{\eta_0}{1 - \eta_0}}\right) - \right. \\ & \left. - \exp\left(-2xAz_N \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta_{\min}}}\right) \Phi\left(z_N \sqrt{\frac{1 - \eta_0}{\eta_{\min}}} - xA \sqrt{\frac{\eta_0}{1 - \eta_0}}\right) \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp(xh_2) \Phi\left(h_2 \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_{\min}}{\eta_{\min}}} + x \sqrt{\frac{\eta_{\min}}{\eta_0 - \eta_{\min}}}\right) - \right. \\ & \left. - \exp(-xh_2) \Phi\left(h_2 \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_{\min}}{\eta_{\min}}} - x \sqrt{\frac{\eta_{\min}}{\eta_0 - \eta_{\min}}}\right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$h_1 = h/\sqrt{d_2}; \quad z_N^2 = k_2^2/d_2; \quad z_1^2 = k_1^2 \eta_0/d_1 \eta_{\min}; \quad h_2 = h \sqrt{\eta_{\min}/d_1 \eta_0}; \quad A^2 = d_1/d_2;$$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \exp(-x^2/2) dx / \sqrt{2\pi}$$

– интеграл вероятности. Найденные выражения (26), (27) позволяют провести анализ эффективности работы АМП для различных статистических ха-

рактических характеристик полезного изображения и фона, а также определить степень влияния их различия на эффективность обнаружения.

Рассмотрим поведение полученных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала при уменьшении интервала априорных значений неизвестной площади. Предположим, что  $\chi_{\max} \rightarrow \chi_{\min}$ , т. е. априорный интервал возможных значений площади стягивается в точку. Переходя к пределу при  $\eta_{\min} \rightarrow 1$  и  $\eta_0 \rightarrow 1$  в выражениях (26) и (27), получаем

$$\alpha = 1 - \Phi(u); \quad \beta = \Phi(h_2 - z_1), \quad (28)$$

где нормированный порог  $u = (h + k_2) / \sqrt{d_2}$ . Эти выражения совпадают с формулами для вероятностей ложной тревоги и пропуска изображения при обнаружении изображения с априори известной площадью [3].

Пусть спектральные плотности полезного изображения и фона можно считать постоянными в пределах областей  $\omega_s$  и  $\omega_v$  соответственно, т. е.  $\rho_s(\omega) = I(\omega, \omega_s)$ ,  $\rho_v(\omega) = I(\omega, \omega_v)$ . Тогда параметры (19)–(22), определяющие эффективность обнаружения, примут вид

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2\chi_{\min}}{N_0} (a_s - a_v)^2 \frac{1}{1 + q_v} + \mu_s (q_s - \ln(1 + q_s)) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_v \left( \frac{q_v}{1 + q_v} - \ln(1 + q_v) \right) - \gamma \sqrt{\mu_s \mu_v} \frac{q_s q_v}{1 + q_v} \right], \\ k_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2\chi_{\min}}{N_0} (a_s - a_v)^2 \frac{1}{1 + q_s} + \mu_s \left( \ln(1 + q_s) - \frac{q_s}{1 + q_s} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_v (\ln(1 + q_v) - q_v) - \gamma \sqrt{\mu_s \mu_v} \frac{q_s q_v}{1 + q_s} \right], \\ d_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4\chi_{\min}}{N_0} (a_s - a_v)^2 \frac{1 + q_s}{(1 + q_v)^2} + \mu_s q_s^2 + \mu_v \left( \frac{q_v}{1 + q_v} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \sqrt{\mu_s \mu_v} \left( \left( \frac{q_s - q_v}{1 + q_v} \right)^2 - \left( \frac{q_v}{1 + q_v} \right)^2 - q_s^2 \right) \right], \\ d_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4\chi_{\min}}{N_0} (a_s - a_v)^2 \frac{1 + q_v}{(1 + q_s)^2} + \mu_s \left( \frac{q_s}{1 + q_s} \right)^2 + \mu_v q_v^2 + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \sqrt{\mu_s \mu_v} \left( \left( \frac{q_s - q_v}{1 + q_s} \right)^2 - \left( \frac{q_s}{1 + q_s} \right)^2 - q_v^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma = S_{\omega_{sv}} / \sqrt{S_{\omega_s} S_{\omega_v}}$  – коэффициент, определяющий степень перекрытия областей, занимаемых спектральными плотностями полезного изображения и фона;  $S_{\omega_{sv}}$  – площадь области перекрытия этих областей.

Предположим, что интенсивности полезного изображения и фона много меньше интенсивности пространственного шума, т. е.  $q_s \ll 1$ ,  $q_v \ll 1$ . Тогда

$$k_1 = k_2 = k = \frac{1}{4} \left[ \frac{4\chi_{\min}}{N_0} (a_s - a_v)^2 + \mu_s q_s^2 + \mu_v q_v^2 - 2\gamma \sqrt{\mu_s \mu_v} q_s q_v \right],$$

$$d_1 = d_2 = d = \frac{1}{2} \left[ \frac{4\chi_{\min}}{N_0} (a_s - a_v)^2 + \mu_s q_s^2 + \mu_v q_v^2 - 2\gamma \sqrt{\mu_s \mu_v} q_s q_v \right],$$

а выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала (26) и (27) несколько упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha(h) = & 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x - h/2z\sqrt{\eta_{\min}} - z\sqrt{\eta_{\min}})^2}{2} \right] \times \\ & \times \left\{ \Phi \left( z\sqrt{1 - \eta_{\min}} + x\sqrt{\frac{\eta_{\min}}{1 - \eta_{\min}}} \right) - \right. \\ & \left. - \exp(-2xz\sqrt{\eta_{\min}}) \Phi \left( z\sqrt{1 - \eta_{\min}} - x\sqrt{\frac{\eta_{\min}}{1 - \eta_{\min}}} \right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \beta(h, \eta_0) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x + z\sqrt{\eta_0})^2 + h^2/4z^2\eta_0 - h}{2} \right] \times \\ & \times \left\{ \Phi \left( z\sqrt{1 - \eta_0} + x\sqrt{\frac{\eta_0}{1 - \eta_0}} \right) - \exp(-2xz\sqrt{\eta_0}) \Phi \left( z\sqrt{1 - \eta_0} - x\sqrt{\frac{\eta_0}{1 - \eta_0}} \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp \left( x\frac{h}{2z\sqrt{\eta_0}} \right) \Phi \left( \frac{h}{2z\sqrt{\eta_0}} \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_{\min}}{\eta_{\min}}} + x\sqrt{\frac{\eta_{\min}}{\eta_0 - \eta_{\min}}} \right) - \right. \\ & \left. - \exp \left( -x\frac{h}{2z\sqrt{\eta_0}} \right) \Phi \left( \frac{h}{2z\sqrt{\eta_0}} \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_{\min}}{\eta_{\min}}} - x\sqrt{\frac{\eta_{\min}}{\eta_0 - \eta_{\min}}} \right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$z^2 = \frac{k^2}{d\eta_{\min}} = \frac{4\chi_{\min}(a_s - a_v)^2/N_0 + \mu_s q_s^2 + \mu_v q_v^2 - 2\gamma\sqrt{\mu_s \mu_v} q_s q_v}{8\eta_{\min}} = \frac{d}{4\eta_{\min}}.$$

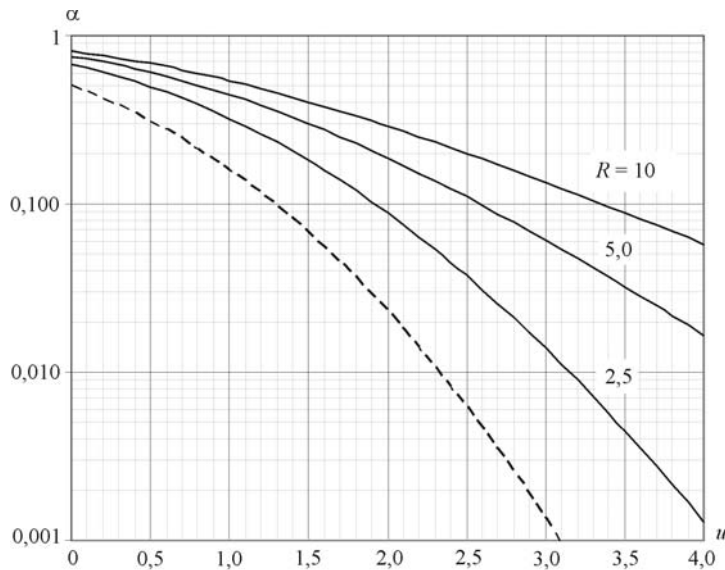


Рис. 1

Полученные зависимости (29), (30) показывают, что при малых интенсивностях изображения и фона характеристики обнаружения определяются величиной динамического диапазона изменения возможных значений неизвестной площади  $R = 1/\eta_{\min}$  и максимальным значением отношения сигнал/шум  $z$ . Это позволяет исследовать степень влияния величины динамического диапазона изменения неизвестной площади на эффективность обнаружения. На рис. 1 сплошными линиями представлены зависимости вероятности ложной тревоги (29) от нормированного порога  $u = (h + k)/\sqrt{d}$  при различных значениях  $R$  и  $z = 1$ , а штриховой линией – вероятность ложной тревоги при обнаружении изображения с априори известной площадью. Эти кривые показывают, что увеличение динамического диапазона изменения неизвестной площади приводит к существенному повышению значения вероятности ложной тревоги. Для оценки эффективности обнаружения при различных значениях динамического диапазона  $R$  воспользуемся критерием Неймана – Пирсона [8], согласно которому порог  $h$  в формулах (29), (30) определяется по заданной вероятности ложной тревоги  $\alpha_0$ , т. е. является решением уравнения

$$\alpha(h) = \alpha_0.$$

Решая численно это уравнение и подставляя полученное значение порога в (30), найдем значение вероятности пропуска сигнала. На рис. 2 сплошными линиями показаны зависимости вероятности пропуска сигнала (30) от отношения сигнал/шум  $z$  при фиксированном значении ложной тревоги  $\alpha_0 = 10^{-3}$  и различных значениях  $R$ . При построении этих кривых было выбрано  $\eta_0 = 0,5$ . Штриховая кривая на рис. 2 соответствует вероятности пропуска сигнала при априори известной площади изображения. Из рисунка видно, что проигрыш в эффективности обнаружения изображения из-за незнания его площади может быть значительным, причем он возрастает с увеличением динамического диапазона  $R$ .

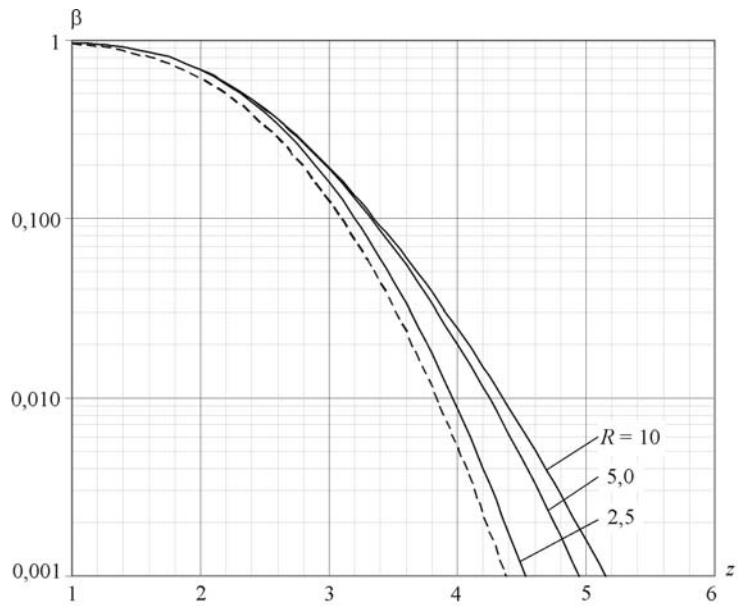


Рис. 2

На рис. 3 приведена вероятность ложной тревоги для известной площади изображения, полученная по формулам (28) (штриховая линия). На этом же рисунке сплошными линиями представлены зависимости вероятности ложной тревоги (26) от нормированного порога  $u$ . При построении этих зависимостей предполагалось, что  $a_s = a_v$ ,  $\mu_s = \mu_v = 200$ ,  $R = 1/\eta_{\min} = 10$ , а спектральные плотности полезного изображения и фона занимают одну область на плоскости пространственных частот, т. е.  $\gamma = 1$ . Приведенные зависимости

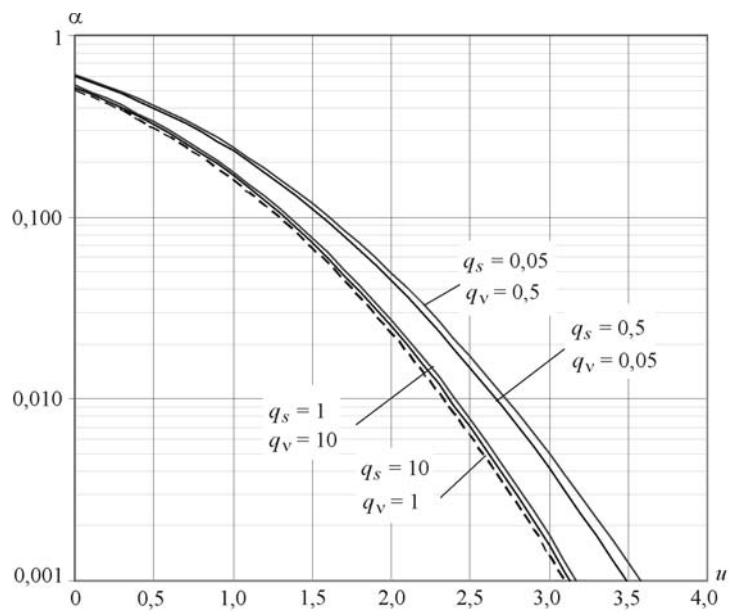


Рис. 3

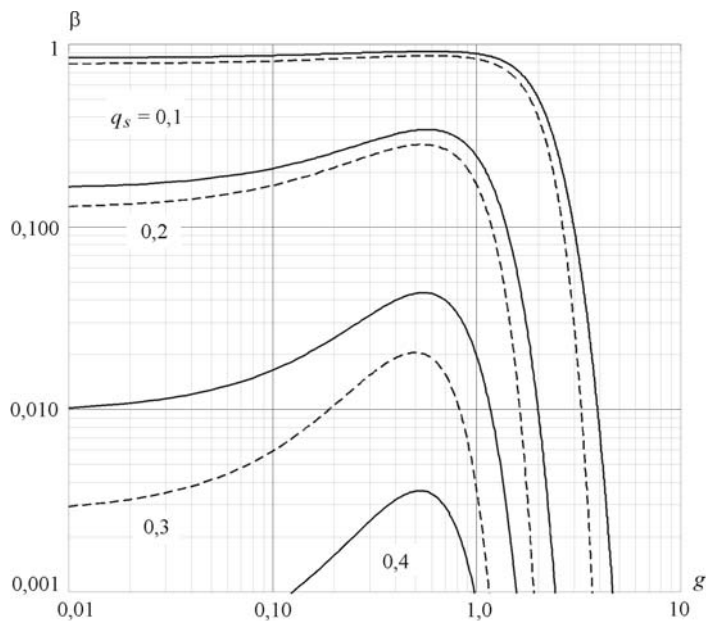


Рис. 4

позволяют сделать вывод о том, что априорное незнание площади полезного изображения может существенно повысить вероятность ошибки ложной тревоги, когда интенсивности изображения и фона малы по сравнению с интенсивностью пространственного шума. Если интенсивности фона и изображения существенно превосходят интенсивность пространственного шума, то значения вероятностей ложной тревоги для АМП близки к значениям вероятности ложной тревоги для алгоритма, работающего в условиях априори известной площади изображения.

Рассмотрим влияние различия величин нормированных спектральных плотностей изображения  $q_s$  и фона  $q_v$  на эффективность работы АМП. Для оценки эффективности обнаружения в этом случае также воспользуемся критерием Неймана – Пирсона [8]. На рис. 4 сплошными линиями показаны зависимости вероятности пропуска сигнала от отношения величин спектральных плотностей фона и изображения  $g = q_v/q_s$  при фиксированной вероятности ложной тревоги  $\alpha_0 = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $\eta_0 = 0,5$ ,  $R = 10$ . Штриховыми линиями представлены вероятности пропуска, полученные для случая обнаружения изображения с априори известной площадью.

Эти зависимости показывают, что незнание истинного значения площади изображения может существенно понизить эффективность его обнаружения. Немонотонный характер приведенных кривых объясняется ухудшением эффективности обнаружения по мере приближения статистических характеристик фона к статистическим характеристикам изображения.

Рассмотрим влияние различия степени перекрытия областей, занимаемых спектральными областями изображения и фона, на эффективность обнаружения. На рис. 5 сплошными линиями представлены зависимости вероятности пропуска сигнала от параметра  $g$  при различных значениях  $\gamma$  и фиксированном  $q_s = 0,3$ , а штриховыми линиями – вероятности пропуска сигнала, полученные для случая обнаружения изображения с известной пло-

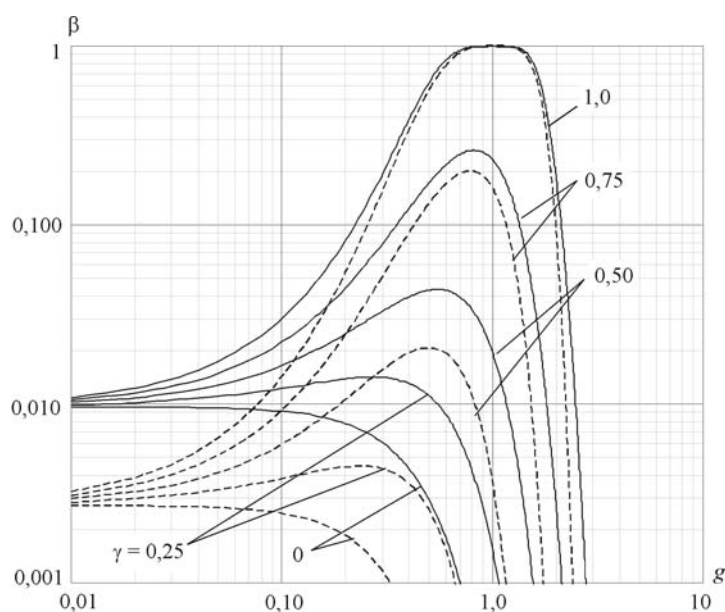


Рис. 5

щадь. Эти кривые показывают, что увеличение степени перекрытия областей, занимаемых спектральными плотностями изображения и фона, приводит к снижению степени различия фона и изображения и, следовательно, к снижению эффективности обнаружения как при известной, так и при неизвестной площади изображения. В частности, при  $\gamma = 1$  и  $g = 1$  изображение и фон неразличимы в статистическом смысле, что обуславливает невозможность правильного обнаружения. Если это условие не выполняется и обнаружение возможно, то априорное знание истинного значения площади изображения может существенно повысить эффективность обнаружения.

**Заключение.** Таким образом, выполнен синтез алгоритма максимального правдоподобия обнаружения полезного изображения с неизвестной площадью и получены характеристики алгоритма, которые позволяют исследовать влияние различия статистических характеристик фона и изображения на эффективность обнаружения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бычков А. А., Понькин В. А. Обнаружение изображений пространственно протяженных затеняющих фон объектов // Автометрия. 1992. № 4. С. 33.
2. Осецкая Г. А. Обнаружение оптического изображения с неизвестными интенсивностью и площадью при наличии фона с неизвестной интенсивностью // Там же. С. 40.
3. Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н. Обнаружение случайных изображений пространственно протяженных объектов, затеняющих фон // Автометрия. 2000. № 4. С. 14.
4. Осецкая Г. А. Обнаружение оптического изображения с неизвестной площадью // Радиотехника. 1994. № 1. С. 64.
5. Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н. Обнаружение квазидетерминированного изображения при наличии фона с неизвестными параметрами // Автометрия. 2002. № 4. С. 19.

6. **Перетягин Г. И.** Представление изображений гауссовыми случайными полями // Автометрия. 1984. № 6. С. 42.
7. **Васильев К. К., Драган Я. П., Казаков В. А. и др.** Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995.
8. **Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др.** Теория обнаружения сигналов /Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
9. **Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И.** Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами /Под.ред. А. П. Трифонова. Воронеж: ВГУ, 1991.
10. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.

*Воронежский государственный университет,  
E-mail: trif@rf.phys.vsu.ru*

*Поступила в редакцию  
2 августа 2004 г.*