

Г. А. Кашеева

*(Новосибирск)***АНАЛИЗ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА ОЦЕНКУ
МГНОВЕННОЙ ЧАСТОТЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО СИГНАЛА**

На примере чисто гармонических квадратурных сигналов проведен анализ факторов, влияющих на оценку мгновенной частоты аналитического сигнала, определяемой в соответствии с предлагаемым алгоритмом. Показано, что совместное влияние нескольких факторов может приводить к существенным отклонениям мгновенной частоты от ее номинального значения, однако, средняя за период частота при этом равна номинальной, что, в свою очередь, открывает широкие перспективы использования рассматриваемого алгоритма для измерения мгновенной скорости, а также других параметров движения.

Введение. Одной из острейших проблем современных систем связи, гидро- и радиолокации, а также научного эксперимента является повышение быстродействия устройств, измеряющих частоту получаемых сигналов. Наиболее радикальным способом ее решения является, по мнению авторов [1], использование алгоритма оценки мгновенной частоты как производной фазы по времени аналитического сигнала вида

$$\xi(t) = A(t) \exp \{-j[\omega_0 t + \varphi(t)]\} = V(t) - jU(t), \quad (1)$$

где

$$V(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad U(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (2)$$

Амплитуда этого сигнала, его полная фаза и мгновенная частота могут быть определены как

$$A(t) = \sqrt{U^2(t) + V^2(t)}, \quad (3)$$

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{U(t)}{V(t)}, \quad (4)$$

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\operatorname{arctg} \frac{U(t)}{V(t)} \right) = \frac{U'(t)V(t) - V'(t)U(t)}{U^2(t) + V^2(t)}. \quad (5)$$

Несмотря на определенную сложность алгоритма (5), прогресс техники аналого-цифрового преобразования и микропроцессорной техники позволя-

ет легко реализовать его на практике и отойти от привычных оценок частоты как величины, обратной периоду сигнала, или как величины, равной отношению числа периодов к интервалу времени, на котором подсчитывается это число. Примером системы, реализующей алгоритм (5), может служить лазерный доплеровский измеритель скорости, описанный в [1].

Целью предлагаемого исследования является анализ погрешностей алгоритма (5) с учетом условий его реализации. На примере чисто гармонических квадратурных сигналов вида $U(t) = U_0 \sin \omega t$ и $V(t) = V_0 \cos \omega t$ найдены и проанализированы выражения для оценок мгновенной частоты [2] и ее среднеквадратичных отклонений в различных реальных ситуациях, связанных с наличием мешающих факторов, обусловленных неидентичностью элементов в цепях синусной и косинусной компонент сигнала, нелинейными искажениями в трактах усиления, приводящими к различию коэффициентов усиления. К числу факторов, влияющих на отклонения мгновенной частоты, определяемой в соответствии с алгоритмом (5), от ее номинального значения ω относятся:

- 1) неравенство амплитуд квадратурных компонент сигнала;
- 2) нестрогая квадратурность компонент;
- 3) наличие постоянного смещения одной или двух компонент;
- 4) наличие в каждом из ортогональных сигналов высших гармоник;
- 5) неточное дифференцирование квадратурных компонент сигнала по методу конечных разностей;
- 6) дискретизация сигналов (квантование) по амплитуде и времени с целью их компьютерной обработки;
- 7) наличие в сигналах аддитивных узкополосных шумов.

Анализ влияния неравенства амплитуд квадратурных компонент сигнала на отклонение мгновенной частоты. Неравенство амплитуд квадратурных компонент сигнала может быть обусловлено неидентичностью элементов в их цепях, нелинейными искажениями, приводящими к различию коэффициентов усиления в соответствующих трактах.

Выражения для ортогональных сигналов и их производных в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$U(t) = U_0 \sin \omega t, \quad U' = \omega U_0 \cos \omega t;$$

$$V(t) = V_0 \cos \omega t, \quad V' = -\omega V_0 \sin \omega t; \quad U_0 \neq V_0.$$

Подставляя эти выражения в (5), для мгновенной частоты $\omega_i(t)$ получим следующее выражение:

$$\omega_i(t) = \frac{U'V - V'U}{U^2 + V^2} = \frac{\omega U_0 V_0 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}{U_0^2 \sin^2 \omega t + V_0^2 \cos^2 \omega t} = \omega \frac{1}{\frac{U_0}{V_0} \sin^2 \omega t + \frac{V_0}{U_0} \cos^2 \omega t}.$$

Если $U_0 = V_0 + \Delta V$, то при условии $\Delta V/V_0 \ll 1$ получим

$$\omega_i(t) = \omega \frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{V_0} \cos 2\omega t} \cong \omega \left[1 + \frac{\Delta V}{V_0} \cos 2\omega t \right]. \quad (6)$$

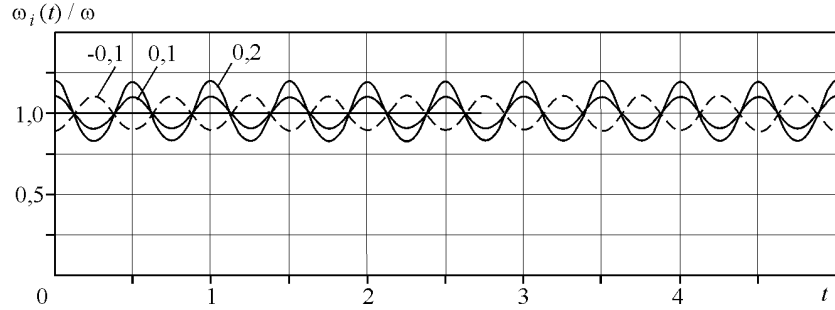


Рис. 1

Абсолютные и относительные отклонения мгновенной частоты (6) от ее номинального значения в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$\Delta\omega_i(t) = \omega_i - \omega = \omega \frac{\Delta V}{V_0} \cos 2\omega t; \quad \delta\omega(t) = \frac{\Delta\omega_i(t)}{\omega} = \frac{\Delta V}{V_0} \cos 2\omega t. \quad (7)$$

Характер изменения относительной мгновенной частоты $\omega_i(t)/\omega$ (7) показан на рис. 1 для трех значений $\Delta V/V_0$ коэффициента неравенства амплитуд ортогональных сигналов. Как следует из (7) и рис. 1, при неравенстве амплитуд квадратурных компонент относительные отклонения мгновенной частоты имеют периодический характер и меняются с удвоенной частотой заданных квадратурных сигналов. Величина относительных отклонений изменяется в пределах $[-\Delta V/V_0; +\Delta V/V_0]$, среднее отклонение мгновенной частоты за целое число периодов будет равно нулю, а относительное среднеквадратичное отклонение составит $0,7(\Delta V/V_0)$.

Анализ влияния нестрогой квадратурности компонент. Представив для рассматриваемого случая квадратурные сигналы и их производные как

$$U = U_0 \sin \omega t, \quad U' = \omega U_0 \cos \omega t; \\ V = U_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad V' = -\omega U_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где φ – угол неортогональности, получим

$$\omega_i(t) = \frac{U'V - V'U}{U^2 + V^2} = \omega \frac{\cos \varphi}{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t + \varphi)}.$$

Обычно $\varphi \ll 1$, в этом случае $\cos \varphi \cong 1$, $\sin \varphi \cong \varphi$, в результате получим

$$\frac{\omega_i(t)}{\omega} \cong 1 + \varphi \sin 2\omega t; \quad (8)$$

$$\Delta\omega_i(t) = \omega_i(t) - \omega \cong \omega \varphi \sin 2\omega t; \quad \delta\omega(t) \cong \frac{\Delta\omega_i(t)}{\omega} = \varphi \sin 2\omega t.$$

Графики изменения относительной мгновенной частоты (8) для четырех значений угла неортогональности φ ($1-3$ и 6°) показаны на рис. 2 (соответст-

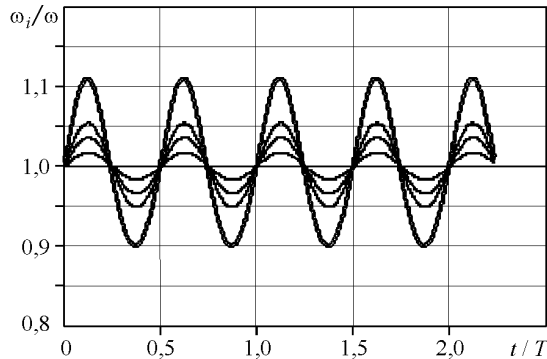


Рис. 2

венно снизу вверх). Текущее время нормировано на период основной частоты сигнала $T = 2\pi/\omega$.

В соответствии с (8) и рис. 2 относительные отклонения $\delta\omega$ мгновенной частоты, обусловленные нестрогой ортогональностью квадратурных компонент, изменяются в пределах $[-\varphi; +\varphi]$ с частотой 2ω ; среднее значение мгновенной частоты за период равно ее номинальному значению ω , а относительное среднеквадратичное отклонение составляет $0,7\varphi$. Следовательно, даже такие малые значения угла неортогональности, как $0,5^\circ$, могут приводить к отклонениям мгновенной частоты порядка 1 %.

Совместное влияние неравенства амплитуд и нестрогой квадратурности компонент. В рассматриваемом случае выражения для квадратурных сигналов и их производных имеют вид

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \sin \omega t, & U'(t) &= \omega U_0 \cos \omega t; \\ V(t) &= V_0 \cos(\omega t + \varphi), & V'(t) &= -\omega V_0 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

В соответствии с (5)

$$\omega_i(t) = \frac{U'V - V'U}{U^2 + V^2} = \frac{\omega \cos \varphi}{\frac{U_0}{V_0} \sin^2 \varphi + \frac{V_0}{U_0} \cos^2(\omega t + \varphi)}. \quad (9)$$

При условиях: $U_0 = V_0 + \Delta V$, $\Delta V/V_0 \ll 1$, $\varphi \ll 1$, пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка, получаем

$$\omega_i(t) \cong \omega \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \cos 2\omega t + \varphi \sin 2\omega t \right). \quad (10)$$

Абсолютные и относительные отклонения мгновенной частоты от ее номинального значения представлены выражениями

$$\Delta\omega_i(t) = \omega_i(t) - \omega = \omega \left(\frac{\Delta V}{V_0} \cos 2\omega t + \varphi \sin 2\omega t \right), \quad (11)$$

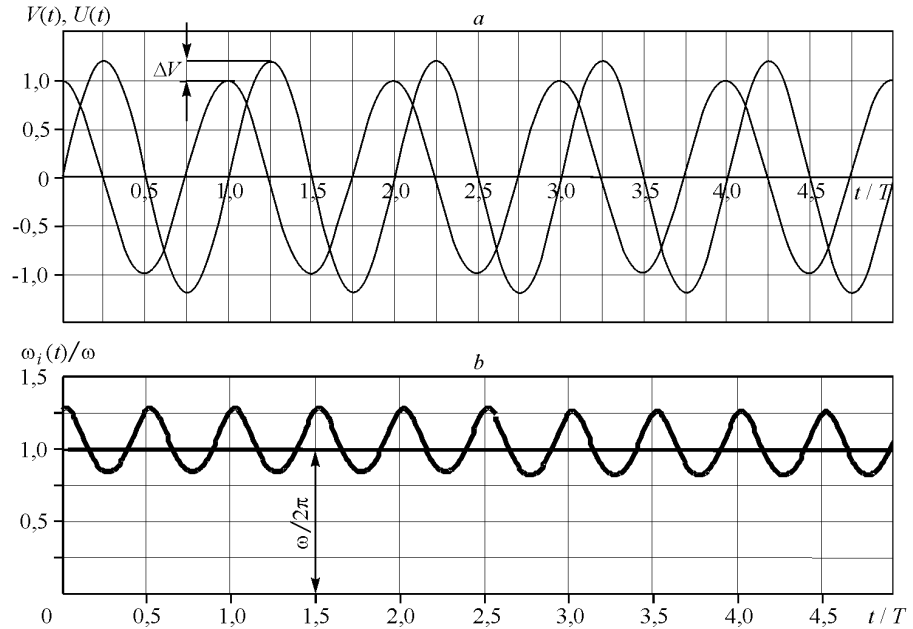


Рис. 3

$$\delta\omega(t) = \frac{\omega_i - \omega}{\omega} = \frac{\Delta V}{V_0} \cos 2\omega t + \varphi \sin 2\omega t. \quad (12)$$

Первое слагаемое в (12) отвечает за погрешность, связанную с неравенством амплитуд, а второе – за погрешность, связанную с нестрогой ортогональностью квадратурных компонент сигнала.

Поскольку функции $\sin 2\omega t$ и $\cos 2\omega t$ являются ортогональными, то при максимальном отклонении частоты, вызванном неравенством амплитуд, отклонение, обусловленное нестрогой ортогональностью сигналов, будет минимальным, и наоборот.

Среднее за период значение мгновенной частоты будет в точности равно номинальной частоте сигнала, а среднеквадратичное отклонение за период составит $0,7\sqrt{(\Delta V/V_0)^2 + \varphi^2}$.

На рис. 3 представлены эпюры квадратурных компонент сигнала (a) и график изменения мгновенной частоты (b) при совместном влиянии обоих факторов ($\Delta V/V_0 = 0,2$; $\varphi = 4^\circ = 0,07$ рад; $\sigma/\omega = 0,148$). Видно, что мгновенная частота является периодической функцией времени и изменяется с удвоенной номинальной частотой 2ω , а ее максимальные абсолютные отклонения составляют 27 % от основной частоты.

Влияние постоянного смещения одного или двух ортогональных сигналов. Выражения для квадратурных сигналов и их производных в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} U &= A \sin \omega t + a_1, & U' &= A \omega \cos \omega t; \\ V &= A \cos \omega t + b_1, & V' &= -A \omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

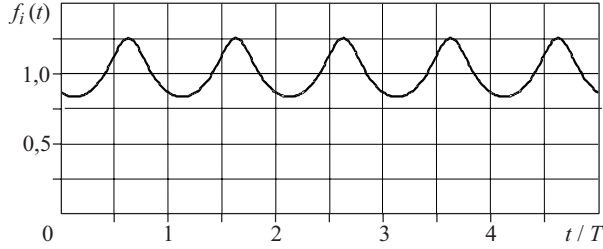


Рис. 4

Мгновенная частота в соответствии с предлагаемым алгоритмом определится как

$$\omega_i(t) = \frac{U'V - V'U}{U^2 + V^2} = \omega \frac{1 + \frac{a_1}{A} \sin \omega t + \frac{b_1}{A} \cos \omega t}{1 + 2 \left(\frac{a_1}{A} \sin \omega t + \frac{b_1}{A} \cos \omega t \right) + \frac{a_1^2 + b_1^2}{A^2}}. \quad (13)$$

Если положить $a_1/b_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $c = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, то $a_1 = c \sin \alpha$, $b_1 = c \cos \alpha$. Подставив a_1 и b_1 в (13), получим

$$\omega_i(t) = \omega \frac{1 + \frac{c}{A} \cos(\omega t - \alpha)}{1 + 2 \frac{c}{A} \cos(\omega t - \alpha) + \frac{c^2}{A^2}}. \quad (14)$$

График мгновенной циклической частоты $f_i(t) = \omega_i(t)/2\pi$ (14) для случая $\omega = 2\pi \cdot 1$, $\alpha = \pi/4$, $c/A = 0,2$ приведен на рис. 4.

Среднее за период $T = 2\pi/\omega$ значение мгновенной частоты

$$\langle \omega_i(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \omega_i(t) dt = \omega \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \frac{c}{A} \cos(\omega t - \alpha)}{1 + 2 \frac{c}{A} \cos(\omega t - \alpha) + \frac{c^2}{A^2}} dt = \omega, \quad (15)$$

а ее относительное стандартное отклонение определится как

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\langle [\omega_i(t)]^2 \rangle - \langle \omega_i(t) \rangle^2}{\omega^2}} = \sqrt{\left[\frac{1}{T} \int_0^T f^2(c, \alpha, \omega t) dt \right] - 1}, \quad (16)$$

где

$$f(c, \alpha, \omega t) = \frac{1 + \frac{c}{A} \cos(\omega t - \alpha)}{1 + 2 \frac{c}{A} \cos(\omega t - \alpha) + \frac{c^2}{A^2}}.$$

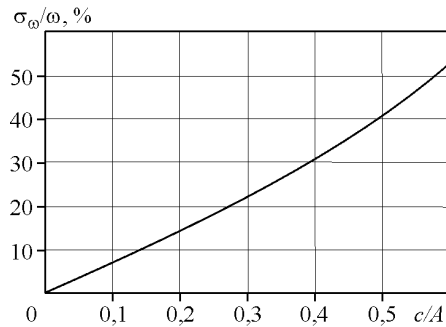


Рис. 5

Из (15) следует, что среднее за период значение мгновенной частоты равно номинальной частоте квадратурных сигналов ω .

Зависимость (16) относительного среднеквадратичного отклонения мгновенной частоты от величины постоянного относительного смещения c/A показана на рис. 5. Видно, что значение отклонения меняется практически линейно с величиной постоянного смещения и может достигать десятков процентов при величинах $c/A \geq 0,3$.

Спектр мгновенной частоты (14) содержит как нулевую гармонику высокой интенсивности, соответствующую среднему значению мгновенной частоты, так и первую, вторую и третью гармоники номинальной частоты (рис. 6).

Совместное влияние неравенства амплитуд квадратурных компонент, их нестрогой ортогональности и постоянного смещения. Выражения для ортогональных сигналов и их производных в этом случае имеют вид

$$U = U_0 \sin \omega t + a_1, \quad U' = \omega U_0 \cos \omega t, \quad U_0 = V_0 + \Delta V;$$

$$V = V_0 \cos(\omega t + \varphi) + b_1, \quad V' = -\omega V_0 \sin(\omega t + \varphi); \quad c = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.$$

Численный анализ характеристик мгновенной частоты, определяемой в соответствии с алгоритмом (5), показал, что при любом соотношении указанных факторов среднее за период или целое число периодов значение мгновенной частоты равно ее номинальному значению ω . Среднеквадратичные отклонения частоты меняются в широких пределах. На рис. 7 представлены трехмерные графики среднеквадратичных отклонений в функции коэффициента неравенства амплитуд $\Delta V/V_0$ и коэффициента относительного смещения c/V_0 при двух значениях угла неортогональности $\varphi = 0$ (a) и $\varphi = 10^\circ$ (b).

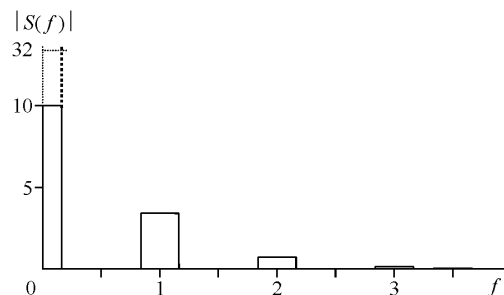


Рис. 6

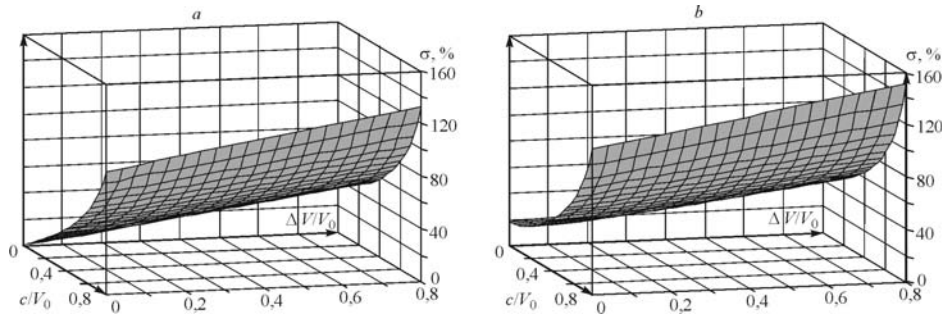


Рис. 7

Одна из возможных реализаций относительной мгновенной частоты, показывающая границы ее возможных изменений, приведена на рис. 8 ($\Delta V/V_0 = 0,2$; $\varphi = 0,05$; $c/V_0 = 0,3$).

Амплитудный спектр мгновенной частоты для рассматриваемого случая (номинальная частота равна 10 Гц) показан на рис. 9. Видно, что в спектре, помимо нулевой, первой и второй гармоник, содержатся также гармоники более высоких порядков номинальной частоты сигналов. Из рис. 7, *a, b* очевидно, что решающую роль в увеличении среднеквадратичных отклонений частоты играет относительная величина постоянной составляющей c/V_0 в ортогональных сигналах. Эти отклонения при определенных условиях могут превышать 100 %. Однако наиболее интересным является тот факт, что среднее за период (или за целое число периодов) значение мгновенной частоты, определяемое методом численного интегрирования, оказывается в точности равным номинальному значению частоты заданных ортогональных сигналов.

Влияние высших гармоник основной частоты. Рассмотрим изменение мгновенной частоты в присутствии в каждом из ортогональных сигналов второй и третьей гармоник основной частоты соответствующей интенсивности. Амплитуды A и фазы сигналов предполагаются идентичными.

Выражения для ортогональных сигналов и их производных в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
 U(t) &= A[\sin\omega t + n_2 \sin 2\omega t + n_3 \sin 3\omega t]; \\
 U'(t) &= A\omega[\cos\omega t + 2n_2 \cos 2\omega t + 3n_3 \cos 3\omega t]; \\
 V(t) &= A[\cos\omega t + n_2 \cos 2\omega t + n_3 \cos 3\omega t]; \\
 V'(t) &= -A\omega[\sin\omega t + 2n_2 \sin 2\omega t + 3n_3 \sin 3\omega t],
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

где n_2, n_3 – коэффициенты интенсивности второй и третьей гармоник соответственно.

Выражение для мгновенной частоты в соответствии с (5) имеет следующий вид:

$$\omega_i(t) = \frac{U'V - V'U}{U^2 + V^2} = \omega \frac{1 + 2n_2^2 + 3n_3^2 + 4n_3 \cos 2\omega t + 3n_2 \cos \omega t + 5n_2 n_3 \cos \omega t}{1 + n_2^2 + n_3^2 + 2n_2 \cos \omega t + 2n_3 \cos 2\omega t + 2n_2 n_3 \cos \omega t} \tag{18}$$

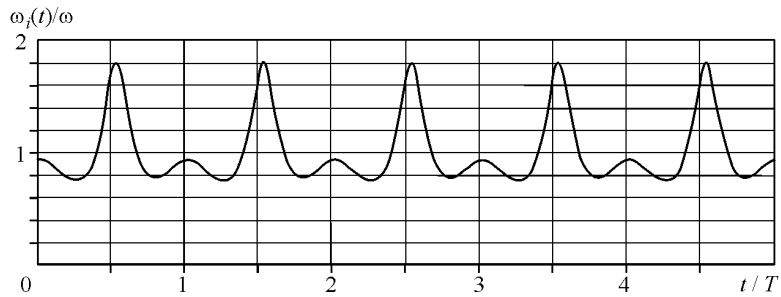


Рис. 8

Среднее за период значение мгновенной частоты практически при всех значениях параметров n_2, n_3 есть величина, постоянная и равная номинальной частоте основной (первой) гармоники сигнала, т. е.

$$\langle \omega_i(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \omega_i(t) dt = \omega.$$

Исключением из этого правила являются случаи, когда один из коэффициентов n_2, n_3 равен 1 при нулевом значении другого или оба коэффициента равны 1. В этих случаях мгновенная частота будет постоянной и равной среднему значению частот присутствующих гармоник, т. е. при $n_2 = 1$ и $n_3 = 0$ $\omega_i(t) = \text{const} = \frac{\omega + 2\omega}{2} = \frac{3}{2}\omega$, а при $n_2 = 0$ и $n_3 = 1$, а также при $n_2 = 1$ и $n_3 = 1$ получим $\omega_i(t) = \text{const} = \frac{\omega + 3\omega}{2} = 2\omega$. Среднеквадратичные отклонения частоты для этих случаев равны нулю.

Трехмерный график относительных среднеквадратичных отклонений частоты в функции значений коэффициентов n_2, n_3 интенсивности гармоник приведен на рис. 10. Как следует из графика, среднеквадратичные отклонения мгновенной частоты резко увеличиваются с ростом коэффициентов интенсивности гармоник и могут многократно превышать значения номинальной частоты.

Амплитудный спектр мгновенной частоты для случая $n_2 = 0,2, n_3 = 0,1$ показан на рис. 11. Он содержит, помимо нулевой гармоники (соответствующей средней частоте сигнала), также первую, вторую, третью гармоники основной частоты, присутствующие в сигнале, а также гармоники высших порядков.

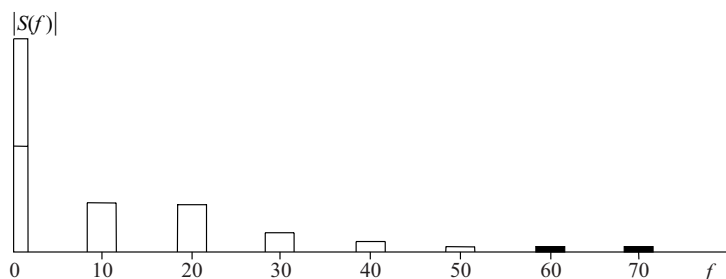


Рис. 9

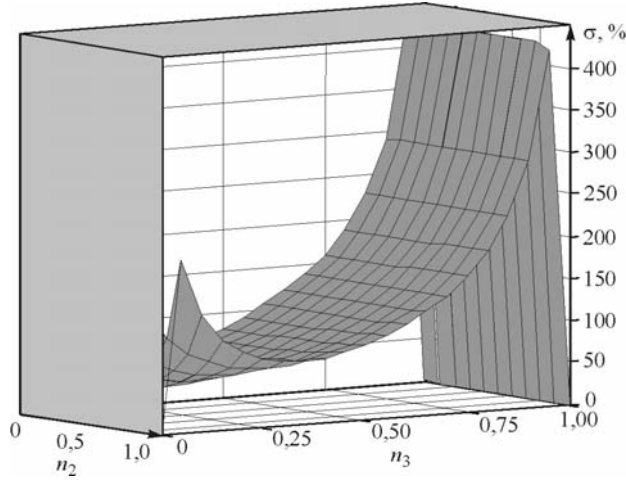


Рис. 10

Влияние неточного дифференцирования ортогональных сигналов по методу конечных разностей. Производные строго ортогональных сигналов с равными амплитудами и начальными фазами вида $U(t) = A \sin \omega t$ и $V(t) = A \cos \omega t$ будем находить по разностям значений сигналов в начале и конце интервала длительностью $2\Delta t$, отнесенным к длине интервала. При дискретизации отсчетов с интервалом $2\Delta t$ производные в точке $t = t_0$, представляющей собой середину интервала $[t_0 - \Delta t; t_0 + \Delta t]$, можно записать как

$$U'(t_0) = \frac{A \sin[\omega(t_0 + \Delta t)] - A \sin[\omega(t_0 - \Delta t)]}{2\Delta t},$$

$$V'(t_0) = \frac{A \cos[\omega(t_0 + \Delta t)] - A \cos[\omega(t_0 - \Delta t)]}{2\Delta t}$$

и мгновенная частота по заданному алгоритму определится как

$$\omega_i(t = t_0) = \frac{U'(t_0)V(t_0) - V'(t_0)U(t_0)}{U^2(t_0) + V^2(t_0)} = \frac{\sin \omega \Delta t}{\Delta t}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что мгновенная частота при определении производных ортогональных сигналов по методу конечных разностей не является функцией времени, т. е. ее среднее значение равно (19), оценка среднего значения частоты является смещенной относительно ее номинального значения ω , а дисперсия оценки равна нулю. Из (19) также следует, что при бесконечно малых значениях интервала между отсчетами ($\Delta t \rightarrow 0$) $\sin \omega \Delta t \rightarrow \omega \Delta t$, т. е. мгновенная частота будет определена практически без ошибки.

Абсолютное и относительное отклонения найденной оценки мгновенной частоты от ее номинального значения определяются как

$$\Delta \omega_i(t) = \omega_i - \omega = \frac{\sin \omega \Delta t}{\Delta t} - \omega, \quad (20)$$

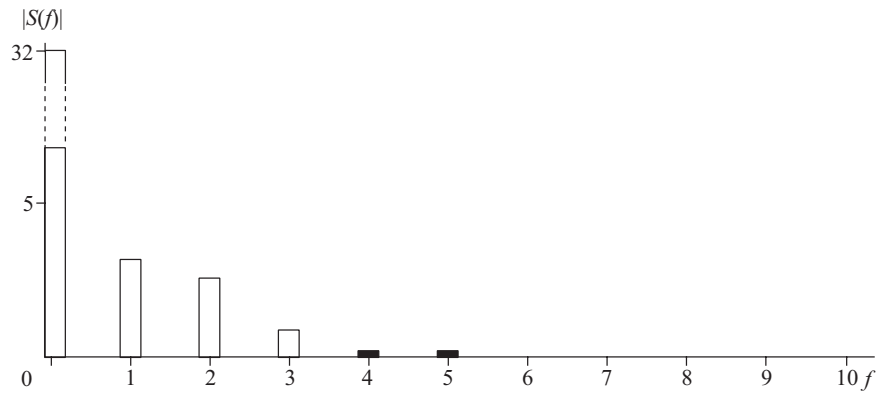


Рис. 11

$$\delta\omega(t) = \frac{\Delta\omega(t)}{\omega} = \frac{\sin \omega\Delta t - \omega\Delta t}{\omega\Delta t} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\Delta t\right) - \frac{2\pi}{T}\Delta t}{\frac{2\pi}{T}\Delta t} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}, \quad (21)$$

где $n = T/\Delta t$ – удвоенное число отсчетов сигнала на периоде T измеряемой частоты.

Зависимость (21) показана в логарифмическом масштабе на рис. 12. Из рисунка видно, что точность оценки среднего значения мгновенной частоты максимальна при $n \rightarrow \infty$ и минимальна при малом числе отсчетов. Кроме того, из рис. 12 и выражения (21) можно определить число отсчетов n , требуемое для получения заданной точности измерения. Одним из способов устранения ошибки, связанной с неточностью нахождения производных ортогональных сигналов по методу конечных разностей, является использование быстродействующих аналоговых дифференцирующих устройств [1], благодаря которым указанная ошибка может быть сведена к пренебрежимо малой величине.

Влияние дискретизации сигналов по уровню и времени. Непосредственная оценка значений мгновенной частоты в реальном времени возможна при использовании компьютера, в память которого через АЦП поступают квантованные по величине мгновенные значения двух ортогональных сигнала-

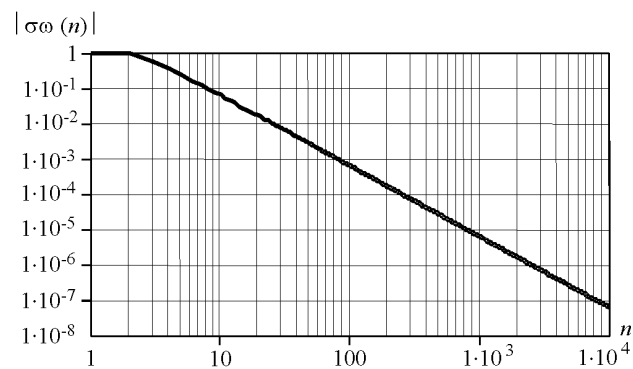


Рис. 12

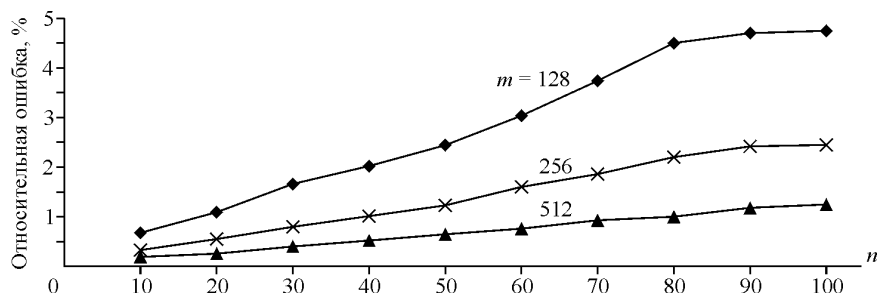


Рис. 13

лов и их производных. Поскольку дискретизация значений аналоговых сигналов приводит к определенным ошибкам, зависящим прежде всего от шага квантования, было проведено соответствующее компьютерное моделирование с целью определения зависимости среднеквадратичных отклонений частоты от числа уровней квантования сигналов по амплитуде, числа отсчетов на период и величины начальной фазы сигналов. Результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 13. По оси ординат отложено осредненное по всем возможным значениям начальной фазы относительное среднеквадратичное отклонение частоты. Как следует из графика, величина ошибки возрастает с уменьшением разрядности АЦП (m) и увеличением числа отсчетов (n) на период измеряемой частоты.

Такое, на первый взгляд противоречивое, изменение относительной ошибки объясняется тем, что в случае дискретизации сигнала как по времени, так и по амплитуде погрешность определения производной при увеличении шага квантования по уровню резко возрастает и превалирует над погрешностью, вызываемой только квантованием по времени. Если, например, интервал между отсчетами становится таким малым, что приращение сигнала на этом интервале станет меньше величины кванта, то вычисляемая производная в этом случае будет равна нулю, что не соответствует действительности. Таким образом, учет квантования сигнала по амплитуде приводит к обратной зависимости общей погрешности от частоты дискретизации по времени. Если число отсчетов на период не превышает 10, то даже для малоразрядного АЦП, обеспечивающего всего 128 уровней квантования, величина среднеквадратичной ошибки не превысит 0,5 %. При этом, однако, необходимо учитывать, что при большом интервале между отсчетами существенно возрастает погрешность неточного дифференцирования (см. рис. 12), вызывающая смещение среднего значения мгновенной частоты. Следовательно, для получения среднеквадратичной погрешности приемлемого уровня (порядка 0,1 %) вполне можно ограничиться малым (порядка 10) числом отсчетов на период и относительно малоразрядным АЦП (четыре десятичных разряда). Отметим, что при использовании быстродействующих схем аналогового дифференцирования ошибка, обусловленная дискретностью значений сигналов, будет сведена к пренебрежимо малой величине.

Влияние нормального узкополосного шума. Пусть частотной демодуляции подвергается аддитивная комбинация гармонического сигнала $A_m \cos \omega_c t$ и квазигармонического шума $A_{ш}(t) \cos[\omega_{ш} t - \varphi(t)]$:

$$\xi(t) = A_m \cos \omega_c t + A_{ш}(t) \cos[\omega_{ш} t - \varphi(t)] = A(t) \cos[\omega_c t - \theta], \quad (22)$$

где

$$A^2(t) = [A_C(t) + A_m \cos \Delta \omega t]^2 + [A_S(t) + A_m \sin \Delta \omega t]^2;$$

$$\operatorname{tg} \theta(t) = \frac{A_S(t) + A_m \sin \Delta \omega t}{A_C(t) + A_m \cos \Delta \omega t}; \quad \Delta \omega = \omega_c - \omega_{\text{ш}};$$

$$A_C(t) = A(t) \cos \varphi(t); \quad A_S(t) = A(t) \sin \varphi(t).$$

Соответствующий аналитический сигнал будет иметь вид

$$\xi_{A_C}(t) = V(t) + jU(t) = A(t) \exp \{-j[\omega t - \theta(t)]\}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (5), получим следующую оценку мгновенной частоты сигнала в присутствии шума:

$$\hat{\omega}(t) = \omega_c + \frac{[A_m + A_C(t)]A'_S(t) - A_S(t)A'_C(t)}{[A_m + A_C(t)]^2 + A_S^2(t)} = \omega_c + \dot{\theta}(t). \quad (24)$$

Рассмотрим простейший случай, когда $\Delta \omega = 0$. Как показано в [3, с. 301], математическое ожидание оценки $\langle \hat{\omega}(t) \rangle = \omega_c$, т. е. оценка не смещена. Дисперсия этой оценки стремится к бесконечности, но погрешность определения частоты в рассматриваемом случае можно характеризовать средним значением модуля отклонений частоты $\dot{\theta}(t)$ [2]:

$$\langle |\dot{\theta}(t)| \rangle = \sqrt{-\rho_0''} e^{-a^2/4} I_0(a^2/4), \quad (25)$$

где $a = A_m/\sigma_{\text{ш}}$, $\sigma_{\text{ш}}$ – дисперсия шума; ρ_0'' – вторая производная коэффициента корреляции шума в нуле; I_0 – функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Если, например, сигнал $\xi(t)$ будет получен на выходе резонансного контура с полосой $\Delta \omega_k$, а на вход контура подан исходный сигнал $A_m \cos \omega_c t$ в сочетании с белым шумом, то, как известно [2], функция корреляции шума на выходе контура будет иметь вид

$$k = \sigma_{\text{ш}}^2 e^{-\Delta \omega_k t} \cos \omega_c t. \quad (26)$$

Вторая производная коэффициента корреляции, как это следует из (26),

$$\rho_0'' = -\Delta \omega_k^2. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (25), можно получить окончательное выражение для модуля ошибки. Анализ (25) показывает, что величина ошибки никогда не превышает $\sqrt{-\rho_0''}$. Если отношение сигнал/шум $a \gg 1$, то можно показать, что плотность вероятности ошибки вблизи частоты сигнала приближается к нормальному закону с дисперсией

$$\sigma^2 = -\rho_0''/a^2. \quad (28)$$

Следовательно, относительная среднеквадратичная ошибка будет иметь вид

$$\frac{\sigma}{\omega_c} = \frac{\Delta\omega_k \sigma_{ш}}{\omega_c A_m}. \quad (29)$$

Если, например, $\Delta\omega_k/\omega_c = 0,01$, а $\sigma_{ш}/A_m = 0,10$, то $\sigma/\omega_c = 0,1\%$.

Таким образом, в рассматриваемом случае смещение частоты отсутствует, а относительная среднеквадратичная погрешность пропорциональна отношению шум/сигнал и относительному значению ширины спектра шума.

Заключение. Представленные результаты демонстрируют перспективность использования нового подхода к проблеме измерения частоты квазигармонических сигналов [4]. На одном периоде изменения такого сигнала удастся получить достаточно большое число отсчетов мгновенной частоты, что позволяет, с одной стороны, резко повысить быстродействие соответствующих измерительных систем, а с другой – существенно повысить точность измерений за счет статистического осреднения полученных результатов. Достижения современной техники аналого-цифрового преобразования и микропроцессорной техники, относительная дешевизна и доступность персональных компьютеров позволяют легко реализовать соответствующие измерительные системы в таких областях, как гидро- и радиолокация, лазерная интерферометрия, анализ речи и т. п.

Проведенный в работе анализ показывает, что наибольший вклад в увеличение среднеквадратичных отклонений мгновенной частоты вносит присутствие в сигналах гармоник основной частоты. Влияние других рассмотренных факторов можно считать равноценным. Несмотря на то что при совместном влиянии различных факторов величина относительных среднеквадратичных отклонений мгновенной частоты может достигать очень больших значений, ее среднее значение на достаточно длинной реализации сигнала определяется практически без ошибки, что позволяет с успехом использовать данный метод во многих практических приложениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sobolev V. S., Scherbachenko A. M., Kashcheeva G. A. et al.** LDV system based on optimal estimation of instantaneous Doppler frequency // Proc. SPIE. 2002. **4900**. P. 1171.
2. **Соболев В. С., Кашеева Г. А., Щербаченко А. М.** Анализ алгоритма оценки мгновенной частоты аналитического сигнала // Измер. техника. 2000. № 8. С. 57.
3. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
4. **Соболев В. С., Щербаченко А. М., Кашеева Г. А. и др.** Лазерная доплеровская система нового поколения как датчик скорости для автоматизации научного эксперимента и технологических процессов // Датчики и системы. 2000. № 2. С. 25.