РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 3

УДК 535.317.25

В. А. Удод

(Томск)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АПОДИЗАЦИИ ПРИЕМНИКОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Приведены примеры функций достаточно простого вида, которые обладают свойствами финитности, ограниченности и неотрицательности, а их преобразования Фурье нигде не имеют нулей. Предложено использовать данные функции для соответствующей аподизации приемников первичных изображений с целью выполнения необходимого условия функционирования изображающей системы с априорно заданной пространственной разрешающей способностью.

Введение. Во многих случаях необходимо, чтобы используемая для исследований изображающая система (ИС) могла функционировать с априорно заданной пространственной разрешающей способностью (РС). Это, в частности, следует из представленных в [1] результатов взаимосвязи между степенью восприятия объектов (обнаружение, опознавание, идентификация и т. п.) по их изображению, воспроизводимому изображающей системой, и ее разрешающей способностью.

Согласно [2] процесс функционирования многих ИС может быть удовлетворительно описан моделью вида

$$\hat{B}(x,y)=[B(x,y)*h(x,y)+n(x,y)]*\varphi(x,y), \tag{1}$$

где $B(x,y)$ – исходное (идеальное) изображение; $B(x,y)*h(x,y)+n(x,y)$ – сформированное (искаженное) изображение; $h(x,y)$ – импульсный отклик приемника изображений (ПИ); $n(x,y)$ – стационарный шум; $\varphi(x,y)$ – импульсный отклик корректирующего фильтра; символ «$*$» означает двумерную свертку; $\hat{B}(x,y)$ – восстановленное (выходное) изображение.

Из работ [3, 4] следует, что РС ИС, описываемой моделью (1), даже при стремлении спектральной плотности шума к нулю и одновременном оптимальном выборе корректирующего фильтра будет ограничиваться сверху величиной R_0, равной расстоянию от начала координат (в частотной плоскости) до ближайшего к нему нуля передаточной функции ПИ.

Таким образом, для функционирования ИС, описываемой моделью (1), с заданной РС R необходимо выполнение условия

$$R_0 \geq R. \tag{2}$$

Очевидно, что для произвольно взятого ПИ это условие может нарушаться.

Один из возможных подходов, гарантирующих выполнимость условия (2), может заключаться, на наш взгляд, в предварительной аподизации ПИ таким образом, чтобы преобразование Фурье импульсного отклика аподизированного ПИ, т. е. его передаточная функция, нигде не имело нулей в частотной плоскости. В этом случае согласно [4] величина R_0 будет равна бесконечности.

Из физических соображений (по крайней мере, применительно к приемникам радиационных изображений) импульсный отклик аподизированного ПИ должен удовлетворять свойствам финитности, ограниченности и неотрицательности [5].

В предлагаемой работе приведены примеры функций, обладающих этими свойствами, причем их преобразования Фурье нигде не имеют нулей, а также пример расчета аподизированного ПИ.

Примеры неотрицательных, ограниченных, финитных функций, преобразования Фурье которых не имеют нулей. Приведем (с доказательством) несколько простых примеров таких функций, начав из соображений удобства с одномерного варианта.

Пример 1.

$$h_1(x)=\begin{cases}1-\exp\left[-\mu\left(\dfrac{c-a}{b}x+a\right)\right], & 0\le x\le b;\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{3}$$

где μ, a, b, c – параметры, причем

$$\mu, a, b>0; \quad 0\le c<a. \tag{4}$$

Очевидно, что функция (3) при условиях (4) является финитной, ограниченной и неотрицательной. Докажем теперь, что ее преобразование Фурье

$$\tilde{h}_1(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)\exp(-2\pi i\nu x)\,dx=\frac{i}{2\pi\nu}[\exp(-2\pi i\nu b)-1]+$$

$$+\frac{b(\mu(c-a)-2\pi i\nu b)\exp(-\mu a)}{\mu^2(c-a)^2+(2\pi\nu b)^2}\{\exp[-(\mu(c-a)+2\pi i\nu b)]-1\}$$

нигде не имеет нулей.

Так как функция (3) при условиях (4) положительна на промежутке $[0, b)$, то согласно [6] и ее определенный интеграл по отрезку $[0, b]$ также будет положительным, а значит,

$$\tilde{h}_1(0)=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)\,dx=\int_0^b h_1(x)\,dx>0.$$

Следовательно, нам осталось доказать, что

$$\tilde{h}_1(\nu) \neq 0 \quad \text{при} \quad \nu \neq 0. \tag{5}$$

Поскольку операция линейного изменения масштаба не влияет на сам факт наличия нулей у функции, то, используя замену

$$\omega = 2\pi\nu b,$$

можно свести задачу доказательства неравенства (5) к равносильной ей задаче – доказательству неравенства

$$\tilde{h}_1\left(\frac{\omega}{2\pi b}\right) \neq 0 \quad \text{при} \quad \omega \neq 0. \tag{6}$$

Неравенство (6), в свою очередь, будет равносильно неравенству

$$g(\omega) \neq 0 \quad \text{при} \quad \omega \neq 0,$$

справедливость которого мы и докажем. Здесь

$$g(\omega) = \frac{\omega\sqrt{\beta^2+\omega^2}}{b}\,\tilde{h}_1\left(\frac{\omega}{2\pi b}\right) =$$

$$= \omega\sqrt{\beta^2+\omega^2}\left\{\frac{i[\exp(-i\omega)-1]}{\omega} + \frac{\beta - i\omega}{\beta^2+\omega^2}\exp(-p)[\exp(-\beta)\exp(-i\omega)-1]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}}\Big\{(\beta^2+\omega^2)\sin\omega + \omega\beta\exp(-p)[\exp(-\beta)\cos\omega - 1] -$$

$$-\omega^2\exp(-p)\exp(-\beta)\sin\omega + i[(\beta^2+\omega^2)(\cos\omega-1) - \omega\beta\exp(-p)\times$$

$$\times\exp(-\beta)\sin\omega - \omega^2\exp(-p)(\exp(-\beta)\cos\omega - 1)]\Big\}, \tag{7}$$

$$p = \mu a; \quad \beta = \mu(c-a). \tag{8}$$

Из свойств модуля комплексного числа [7, 8] следует

$$g(\omega) \neq 0 \Leftrightarrow |g(\omega)|^2 > 0.$$

Отсюда, а также из свойства четности модуля одномерного фурье-образа [9] видим, что достаточно доказать справедливость неравенства

$$|g(\omega)|^2 > 0 \quad \text{при} \quad \omega > 0. \tag{9}$$

При подстановке (7) в (9) и проведении простейших преобразований получим следующее неравенство:

$$2[\beta^2+\omega^2(1-\exp(-p))(1-\exp(-\beta-p))]+\omega^2\exp(-2p)(\exp(-\beta)-1)^2>$$

$$>2\cos\omega[\beta^2+\omega^2(1-\exp(-p))(1-\exp(-\beta-p))]-$$

$$-2\beta\omega\exp(-p)(\exp(-\beta)-1)\sin\omega, \tag{10}$$

справедливость которого нам и остается доказать при $\omega>0$.

Из равенства [10]

$$u\cos A+q\sin A=\sqrt{u^2+q^2}\,\sin(A+\theta),$$

где u, q, A – любые действительные числа;

$$\sin\theta=\frac{u}{\sqrt{u^2+q^2}};\qquad \cos\theta=\frac{q}{\sqrt{u^2+q^2}},$$

вытекает справедливость неравенства

$$u\cos A+q\sin A\le\sqrt{u^2+q^2}.$$

Поэтому для доказательства неравенства (10) нам достаточно доказать справедливость следующего неравенства при $\omega>0$:

$$2[\beta^2+\omega^2(1-\exp(-p))(1-\exp(-\beta-p))]+\omega^2\exp(-2p)(\exp(-\beta)-1)^2>$$

$$>\{4[\beta^2+\omega^2(1-\exp(-p))(1-\exp(-\beta-p))]^2+$$

$$+4\beta^2\omega^2\exp(-2p)(\exp(-\beta)-1)^2\}^{1/2}. \tag{11}$$

Из (4) и (8) вытекает положительность обеих частей неравенства (11). Следовательно, неравенство (11) при $\omega>0$ будет эквивалентно неравенству

$$\omega^4\exp(-4p)(\exp(-\beta)-1)^4+$$

$$+4\omega^4(1-\exp(-p))(1-\exp(-\beta-p))\exp(-2p)(\exp(-\beta)-1)^2>0, \tag{12}$$

которое получается из неравенства (11) после возведения обеих его частей в квадрат и приведения подобных членов.

Нетрудно убедиться, принимая во внимание (4) и (8), что при $\omega>0$ первое слагаемое в левой части (12) положительно, а второе – неотрицательно. Следовательно, (12) верно, что и требовалось доказать.

П р и м е р 2.

$$h_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\delta - \varepsilon}{b} x + \varepsilon, & 0 \le x \le b; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{13}$$

где δ, b, ε – параметры, причем

$$\varepsilon, b > 0; \qquad 0 \le \delta < \varepsilon. \tag{14}$$

Очевидно, что функция (13) при условиях (14) является неотрицательной, ограниченной и финитной. Доказательство же того, что ее преобразование Фурье

$$\widetilde{h}_2(\nu) = \frac{\delta - \varepsilon}{b(2\pi\nu)^2}[i2\pi\nu b \exp(-i2\pi\nu b) + \exp(-i2\pi\nu b) - 1] + \frac{i\varepsilon}{2\pi\nu}[\exp(-i2\pi\nu b) - 1]$$

нигде не имеет нулей, аналогично доказательству в примере 1.

Замечание. Пусть M_1 – множество всех одномерных неотрицательных, ограниченных, финитных функций, у которых преобразование Фурье не имеет нулей. По доказанному выше функции (3) и (13) принадлежат множеству M_1. Между тем, принимая во внимание свойства одномерного преобразования Фурье [7, 9], нетрудно убедиться в следующих свойствах множества M_1:

1) если $H(x) \in M_1$, то и $rH(sx + \gamma) \in M_1$;

2) если $H_1(x), H_2(x) \in M_1$, то и $H_1(x) \otimes H_2(x) \in M_1$.

Здесь r, s, γ – действительные числа, причем $r > 0$, $s \ne 0$, γ – любое; символ «$\otimes$» означает одномерную свертку.

Пусть теперь M_2 – множество всех двумерных неотрицательных, ограниченных, финитных функций, у которых преобразование Фурье не имеет нулей. Из свойств двумерного преобразования Фурье [11] следует, что множеству M_2 будут принадлежать, в частности, функции вида

$$D(x, y) = D_1(x) D_2(y), \tag{15}$$

где $D_1(x)$ и $D_2(x)$ – любые функции из множества M_1.

Пример расчета аподизированного приемника изображений. Предположим, что ИС – это многоканальная сканирующая система цифровой рентгенографии [12, 13], у которой приемниками (детекторами) первичного изображения (радиационного поля за просвечиваемым объектом) являются монокристаллические сцинтилляторы. Предположим также, что все используемые в системе сцинтилляторы идентичны между собой, и поэтому ограничимся рассмотрением аподизации отдельного из них.

Допустим, что до аподизации сцинтиллятор имеет форму параллелепипеда. Тогда для него согласно [14] будет верно соотношение

$$\varepsilon_0(x, y) = \begin{cases} 1 - \exp[-\mu_{\text{сц}} l_0], & \text{если } 0 \le x \le d_x,\ 0 \le y \le d_y; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $\varepsilon_0(x, y)$ – эффективность регистрации излучения сцинтиллятором до его аподизации; $\mu_{сц}$ – линейный коэффициент ослабления излучения для материала сцинтиллятора; l_0 – высота сцинтиллятора (его размер в направлении падающего излучения); d_x, d_y – длина и ширина сцинтиллятора соответственно.

После аподизации сцинтиллятора соотношение (16) преобразуется к виду

$$\varepsilon_1(x, y) = \begin{cases} 1 - \exp[-\mu_{сц} l_0 \Phi(x, y)], & \text{если } 0 \le x \le d_x,\ 0 \le y \le d_y; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{17}$$

Здесь $\varepsilon_1(x, y)$ – эффективность регистрации излучения сцинтиллятором после его аподизации; $\Phi(x, y)$ $(0 \le \Phi(x, y) \le 1)$ – аподизирующая функция для толщины сцинтиллятора (искомая).

Воспользуемся теперь следующим представлением:

$$\varepsilon_1(x, y) = \varepsilon_0(x, y) h_0(x, y), \tag{18}$$

где $h_0(x, y)$ $(0 \le h_0(x, y) \le 1)$ – искусственно введенная аподизирующая функция для эффективности регистрации излучения сцинтиллятором (подлежит выбору).

Легко убедиться с учетом (16) и (17), что представление (18) будет верно, если между функциями $h_0(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ выполняется соотношение

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{\mu_{сц} l_0} \ln\{1 - [1 - \exp(-\mu_{сц} l_0)] h_0(x, y)\} \tag{19}$$

при $0 \le x \le d_x,\ 0 \le y \le d_y$.

Выберем теперь функцию

$$h_0(x, y) = \frac{H_1(x)}{H_{1\max}} \frac{H_2(y)}{H_{2\max}}, \tag{20}$$

где $H_1(x)$, $H_2(x)$ – некоторые функции из множества M_1 такие, что

$$H_1(x) = 0, \quad \text{если } x \notin [0, d_x], \tag{21}$$

$$H_2(y) = 0, \quad \text{если } y \notin [0, d_y]; \tag{22}$$

$H_{1\max}$, $H_{2\max}$ – наибольшие значения функций $H_1(x)$ и $H_2(x)$ соответственно.

При подстановке (16) и (20) в правую часть (18) с учетом (21) и (22) получаем

$$\varepsilon_1(x, y) = [1 - \exp(-\mu_{сц} l_0)] \frac{H_1(x)}{H_{1\max}} \frac{H_2(y)}{H_{2\max}}. \tag{23}$$

Импульсный отклик аподизированного сцинтиллятора согласно [15] будет равен

$$h_{\text{сц}}(x, y) = \varepsilon_1(-x, -y)$$

или

$$h_{\text{сц}}(x, y) = [1 - \exp(-\mu_{\text{сц}} l_0)] \frac{H_1(-x)}{H_{1\max}} \frac{H_2(-y)}{H_{2\max}}, \tag{24}$$

что с учетом (23) есть то же самое.

Поскольку параметры $\mu_{\text{сц}}$ и l_0 положительны, то и множитель $1 - \exp(-\mu_{\text{сц}} l_0)$ также будет положительным. Очевидно также, что и величины $H_{1\max}$ и $H_{2\max}$ положительны. Отсюда в силу свойства 1 множества M_1 и того, что функции $H_1(x)$, $H_2(x)$ выбраны из множества M_1, следует принадлежность функций $[1 - \exp(-\mu_{\text{сц}} l_0)] H_1(-x)/H_{1\max}$, $H_2(-x)/H_{2\max}$ также множеству M_1, а значит, согласно (15) функция (24) будет принадлежать множеству M_2.

Таким образом, при подстановке (20) в (19) находим окончательно искомую аподизирующую функцию для толщины сцинтиллятора, а именно

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{\mu_{\text{сц}} l_0} \ln\left\{1 - [1 - \exp(-\mu_{\text{сц}} l_0)] \frac{H_1(x)}{H_{1\max}} \frac{H_2(y)}{H_{2\max}}\right\},$$

если $0 \le x \le d_x$, $0 \le y \le d_y$. В остальных точках с соблюдением условия $0 \le \Phi(x, y) \le 1$ функция $\Phi(x, y)$ может быть произвольной.

Аналогично могут быть аподизированы одномерно (в плоскости контролируемого слоя) и сцинтилляционные детекторы, применяемые в системах рентгеновской вычислительной томографии для регистрации интегральных проекций.

Заключение. Приведенные примеры функций могут быть взяты за основу для соответствующей аподизации приемников первичных изображений. Использование таких приемников в структуре изображающих систем позволит реализовать в этих системах необходимое условие их функционирования с априорно заданной пространственной разрешающей способностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ллойд Дж.** Системы тепловидения: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
2. **Обработка** изображений при помощи цифровых вычислительных машин: Пер. с англ. /Под ред. Г. Эндрюса, Л. Инло. М.: Мир, 1973.
3. **Удод В. А.** О разрешающей способности // Оптика атмосферы. 1989. **2**, № 2. С. 154.
4. **Завьялкин Ф. М., Удод В. А.** Максимальная разрешающая способность изображающих систем, достигаемая при апостериорной линейной фильтрации изображений // Автометрия. 1992. № 3. С. 75.
5. **Федоров Г. А.** Радиационная интроскопия: кодирование информации и оптимизация эксперимента. М.: Энергоатомиздат, 1982.

6. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 2.
7. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1977.
8. **Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.** Введение в теорию аналитических функций. М: Просвещение, 1977.
9. **Макс Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: Пер. с франц. М.: Мир, 1983. Т. 1.
10. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1978.
11. **Юу Ф. Т. С.** Введение в теорию дифракции, обработку информации и голографию: Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1979.
12. **Недавний О. И., Удод В. А.** Современное состояние систем цифровой рентгенографии (обзор) // Дефектоскопия. 2001. № 8. С. 62.
13. **Недавний О. И., Удод В. А.** Математическая модель многоканальных сканирующих систем цифровой рентгенографии // Контроль. Диагностика. 2002. № 2. С. 27.
14. **Горбунов В. И., Щетинин Ю. И.** О форме сигнала дефекта в сцинтилляционных гамма-дефектоскопах // Дефектоскопия. 1971. № 6. С. 44.
15. **Недавний О. И., Удод В. А.** Обобщение зависимости между теневым радиационным изображением и интенсивностью потока импульсов на выходе сканирующего детектора // Дефектоскопия. 2000. № 6. С. 88.

Томский государственный университет,
E-mail: udod@ef.tsu.ru

Поступила в редакцию
22 марта 2004 г.