РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2005, том 41, № 2

УДК 621.391.2

С. Н. Кириллов, С. Н. Бузыканов
(Рязань)

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА В МОДИФИЦИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Предложен алгоритм восстановления аналогового сигнала в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 при дополнительном использовании отсчетов производной. Получены коэффициенты передачи восстанавливающих фильтров. Показана возможность уменьшения ошибки усечения при практической реализации предложенного алгоритма в пространстве W_2^1 по сравнению с аналогичными алгоритмами в пространстве L_2.

Теорема Котельникова, доказанная в 1933 г., является основой фундаментальных положений теории цифровой обработки сигналов и систем передачи информации с временным разделением каналов. Эта теорема устанавливает возможность сколь угодно точного восстановления мгновенных значений сигнала с финитным спектром исходя из отсчетных значений (выборок), взятых через равные промежутки времени [1]. Сигналы, подлежащие дискретизации, должны иметь конечную энергию, т. е. принадлежать пространству L_2. Возможно смягчение ограничений, налагаемых на эти сигналы, например определение свойств сигналов в пространствах L_p [2]. При практической реализации теоремы Котельникова в радиотехнических системах появляются различные ошибки дискретного представления сигналов [2], связанные, в частности, с использованием конечного числа отсчетов вместо бесконечного ряда, а также с конечной длительностью импульсной характеристики при цифровой реализации интерполирующих фильтров – так называемые ошибки усечения. Для снижения ошибок усечения при практической реализации интерполирующих фильтров возможно использование отсчетов дискретного сигнала с финитным спектром и его производной в пространстве L_2. Алгоритм восстановления непрерывного сигнала в этом случае был получен Я. И. Хургиным и В. П. Яковлевым в работе [3]. Такие дискретные представления применяются, например, в авиации, когда по расчетным значениям координат самолета и его скорости определяется непрерывная траектория полета при половинной частоте отсчетов. Как показано в [4], совместное использование отсчетов сигнала и его производной в пространстве L_2 при интерполяции позволяет повысить помехоустойчивость системы восстановления и обеспечивает снижение требований к реализации интерполирующих фильтров. Однако использование в пространстве L_2 разложения Лагранжа при получении алгоритмов интерполяции подразумевает наличие остаточного члена, вносящего определенную ошибку в восстанавливаемый сигнал [3].

Более естественным для дискретной обработки реальных радиотехнических сигналов является пространство Соболева W_2^1, накладывающее ограничения как на энергию сигнала, так и на энергию его производной [5]. Как показано в работах [6, 7], использование модификации пространства Соболева W_2^1, осуществляющей весовое суммирование сигнала и его производной, позволяет уменьшить ошибки наложения при восстановлении сигналов и случайных процессов.

Целью работы является получение алгоритма восстановления при представлении сигнала, подлежащего дискретизации, в модифицированном пространстве Соболева W_2^1.

Аналогично [1] рассмотрим основные соотношения, связывающие функцию $f(t)$ и ее спектр в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 [6, 7]. Как известно [2], любая функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле (конечное число максимумов, минимумов и точек разрыва на любом конечном отрезке) и интегрируемая в пределах $[-\infty, +\infty]$, может быть представлена интегралом Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w)\exp(jwt)\,dw, \tag{1}$$

где спектр $S(w)$ [7] находится в модифицированном пространстве W_2^1 по формуле

$$S(w) = \frac{1}{2\pi[(1-\alpha)+\alpha w^2]} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1-\alpha)f(t) - jw\alpha\frac{df(t)}{dt}\right]\exp(-jwt)\,dt \tag{2}$$

(здесь α – коэффициент, позволяющий учесть вес производной при восстановлении сигнала). Кроме того, спектр $S(w)$, ограниченный частотой $F_{\max}$, может быть представлен в виде ряда Фурье в модифицированном пространстве W_2^1, который в комплексной форме имеет вид

$$S(w) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-jwn\Delta t) - \frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{f}_n \exp(-jwn\Delta t), \tag{3}$$

где коэффициенты f_n и $\dot{f}_n$ определяются по формулам [7]:

$$f_n = \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} S(w)\exp(jwn\Delta t)\,dw, \tag{4}$$

$$\dot{f}_n = \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} jwS(w)\exp(jwn\Delta t)\,dw. \tag{5}$$

Применив преобразование Фурье к правой и левой частям выражения (3) и поменяв местами операции интегрирования и суммирования, определим восстановленную функцию

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2} \exp(jw(t-n\Delta t))\,dw -$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{f}_n \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} \frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2} \exp(jw(t-n\Delta t))\,dw. \qquad (6)$$

Выражение (6) представляет алгоритм восстановления аналогового сигнала в модифицированном пространстве Соболева W_2^1, устанавливающий возможность точного восстановления функции $f(t)$, не содержащей частот выше $F_{\max}$, по ее отсчетам и отсчетам ее производной, взятым через равные промежутки времени. В частном случае при значении коэффициента $\alpha = 0$ выражение (6) преобразуется к известному выражению для теоремы Котельникова в пространстве L_2 [1]. Из анализа (6) следует, что при восстановлении функции $f(t)$ отсчеты функции f_n и производной $\dot{f}_n$ необходимо пропустить через фильтры с коэффициентами передачи $K_s(w) = (1-\alpha)/(1-\alpha+\alpha w^2)$ и $K_d(w) = jw\alpha/(1-\alpha+\alpha w^2)$ соответственно. В частотной области данные фильтры имеют непрерывный монотонно спадающий характер, что существенно упрощает их практическую реализацию. Импульсные характеристики этих фильтров в предельном случае при $F_{\max} \to \infty$ имеют вид

$$k_s(t) = \frac{\pi\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\,|t|\right), \qquad (7)$$

$$k_d(t) = -\operatorname{sign}(t)\pi \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\,|t|\right). \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (6), получим

$$f_r(t) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} f_n + \operatorname{sign}(t-n\Delta t_d)\dot{f}_n\right] \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\,|t-n\Delta t_d|\right), \qquad (9)$$

где Δt_d – интервал дискретизации, а значение коэффициента α выбирается исходя из требований к величине ошибок системы восстановления [7]. Из анализа выражения (9) следует, что предложенный алгоритм восстановления функции позволяет провести распараллеливание операций обработки в каналах функции и производной. При этом, как было показано в работе [3], использование отсчетов производной не приводит к увеличению объема информации о функции, так как позволяет снизить частоту дискретизации F_d в 2 раза в обоих каналах.

Рассмотрим ошибку усечения, т. е. ошибку восстановления функции $f(t)$ при использовании теоремы Котельникова в пространстве L_2 и предложенного алгоритма (6) при конечном числе отсчетов и ограничении длительности импульсной характеристики интерполирующих фильтров. В этом случае функция на выходе системы описывается выражением

$$f_{\text{вых}}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2} \exp(jw(t-n\Delta t))\,dw -$$

$$-\sum_{n=0}^{N-1} \dot{f}_n \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} \frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2} \exp(jw(t-n\Delta t))\,dw, \qquad (10)$$

где N – число отсчетов функции и производной. В качестве примера рассмотрим ошибку усечения при восстановлении функции

$$f(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1{,}58t \cdot \cos(78t) +$$

$$+\left|t\exp(-2t^2)\right| + \sin(100t) + \cos(54t) - 2, \qquad (11)$$

представленной своими отсчетами f_n и отсчетами производной $\dot{f}_n$ на интервале $t \in [0,2]$. Сравним результаты восстановления функции (11) с помощью алгоритма (10) с известным алгоритмом в пространстве L_2 на основе теоремы Котельникова, а также с алгоритмом Хургина – Яковлева [3]

$$f_{\text{вых}}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} [f_n k_{s1}(t-n\Delta t_d) + \dot{f}_n k_{d1}(t-n\Delta t_d)], \qquad (12)$$

где интерполирующие функции имеют вид

$$k_{s1}(t) = [\sin(R_1 t)/R_1 t]^2, \qquad (13)$$

$$k_{d1}(t) = t[\sin(R_1 t)/R_1 t]^2 \qquad (14)$$

(здесь $R_1 = \pi/\Delta t_d$). На рис. 1 приведены импульсные характеристики интерполирующих фильтров в канале отсчетов сигнала для исследуемых систем восстановления при применении алгоритма Котельникова в пространстве L_2 (кривая 1), алгоритма (10) при $\alpha = 0{,}03$ (кривая 2), алгоритма Хургина – Яковлева (кривая 3).

В качестве критерия оценки точности восстановления функции (11) используем нормированную среднеквадратическую ошибку восстановления функции

$$\varepsilon^2 = \int_0^2 \left|f(t) - f_{\text{вых}}(t)\right|^2 \Big/ \int_0^2 \left|f(t)\right|^2 dt.$$

Зависимости ε^2 от отношения $\eta = F_d/F_K$ (частоты дискретизации F_d к частоте Котельникова F_K, определенной по уровню 0,99 энергии сигнала) при ограничении длительности импульсной характеристики интерполирующих

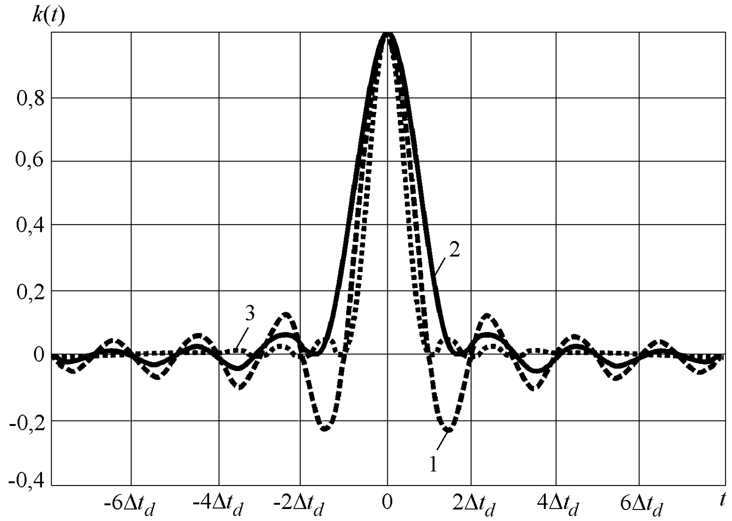

Рис. 1

фильтров пятью отсчетами [8] и использовании отсчетов приращения функции приведены на рис. 2, где алгоритм восстановления на основе теоремы Котельникова в пространстве L_2 – кривая 1, алгоритм восстановления в пространстве W_2^1 – кривая 2, алгоритм Хургина – Яковлева – кривая 3. Для корректного сравнения общее число отсчетов во всех алгоритмах восстановления сигнала при заданных значениях η брали одинаковым, а коэффициент α в соответствии с исследованиями [6, 7] – равным 0,1. Из анализа зависимостей следует, что применение алгоритма (10) при частоте дискретизации $F_d = 4F_K$ позволяет снизить ошибку восстановления функции по критерию нормированной среднеквадратической ошибки в 1,3 раза по сравнению с алгоритмом в пространстве L_2 и в 1,2 раза по сравнению с алгоритмом Хургина – Яковлева.

Таким образом, проведенные исследования позволяют сделать вывод о целесообразности применения алгоритма (10) в системах восстановления функции по ограниченному числу отсчетов сигнала и его производной.

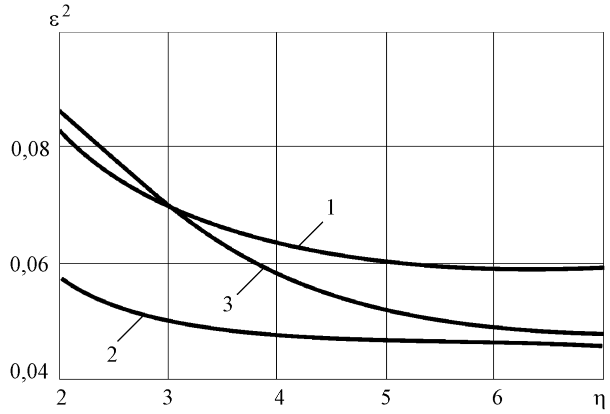

Рис. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Котельников В. А.** О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Радиотехника. 1995. № 4–5.
2. **Джерри А. Дж.** Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения. Обзор // ТИИЭР. 1977. **65**, № 11. С. 53.
3. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
4. **Кириллов С. Н., Дмитриев В. Т.** Реализационные возможности и помехоустойчивость процедуры восстановления сигналов на основе алгоритма Хургина – Яковлева // Радиотехника. 2003. № 1. С. 73.
5. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
6. **Кириллов С. Н., Бузыканов С. Н.** Алгоритм дискретного спектрального анализа сигналов в модифицированном пространстве Соболева // Автометрия. 2003. **39**, № 1. С. 88.
7. **Кириллов С. Н., Бузыканов С. Н.** Оценка спектральной плотности мощности сигналов в модифицированном пространстве Соболева // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2002. **45**, № 12. С. 46.
8. **Рабинер Л., Голд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.

Рязанская государственная радиотехническая академия,
E-mail: snk@rinfotels.ru

Поступила в редакцию
18 мая 2004 г.