РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 2

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов, И. А. Бабийчук

(Владивосток)

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИЗВЕСТНОМ И НЕИЗВЕСТНОМ ТРЕНДЕ

Получено решение задачи оптимального линейного прогнозирования стационарного случайного процесса при известном тренде. Показано, что из этого решения следует решение задачи линейного прогноза при неизвестном тренде, если линейный прогноз тренда заменяется его оптимальной линейной оценкой. Установлена связь между ошибками прогнозов при известном и неизвестном тренде. На примере показано сильное влияние эффекта декорреляции на ошибку прогноза. Получены рекомендации для построения практических алгоритмов прогноза.

Введение. Пусть x_r, $r = \ldots, t-2, t-1, t,$ – стационарный в широком смысле случайный процесс с дискретным временем r, наблюдаемый до настоящего момента времени t, с корреляционной функцией $B^x_{i-j} = \mathbf{M} x_i x_j$ ($\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания). Рассмотрим задачу линейного прогноза случайного процесса x_r в следующей постановке. Пусть

$$y_{t+l} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{t-i+1}, \qquad l \geq 1, \tag{1}$$

– оценка случайной величины x_{t+l}, причем коэффициенты прогноза $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ находятся из условия минимума среднеквадратической ошибки

$$\varepsilon_y^2 = \mathbf{M}(y_{t+l} - x_{t+l})^2 \to \min_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}. \tag{2}$$

Таким образом, соотношения (1), (2) определяют задачу линейного прогноза с минимальной среднеквадратической ошибкой случайного процесса x_r на l шагов вперед по отношению к настоящему моменту времени t. Для вычисления прогноза по формуле (1) используются k значений наблюдаемого процесса в моменты $t-k+1,\ t-k+2, \ldots, t$.

Подстановка выражения (1) в (2) и решение системы уравнений

$$\frac{\partial \varepsilon_y^2}{\partial \alpha_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

приводит к известному результату:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i B_{i-j}^{x} = B_{j+l-1}^{x}, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

– системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, обеспечивающих минимальное значение ε_1^2 среднеквадратической ошибки (2), которое определяется соотношением

$$\varepsilon_1^2 = B_0^x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i B_{i+l-1}^{x} = B_0^x - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \alpha_j B_{i-j}^{x}. \tag{5}$$

В отличие от задачи прогнозирования стационарного случайного процесса в постановке (1), (2), обсуждаемой в литературе, в данной работе рассматривается задача прогнозирования при известном тренде. Дан сравнительный анализ их решений. Показано, что алгоритм оптимального прогноза при известном тренде переходит в алгоритм оптимального прогноза при неизвестном тренде, если линейный прогноз тренда (с коэффициентами, равными разности коэффициентов оптимального линейного прогноза тренда и коэффициентов оптимального линейного прогноза помехи) заменяется его оптимальной линейной оценкой. Установлена связь между ошибками прогнозов при известном и неизвестном тренде исследуемого процесса. На примере показано сильное влияние эффекта декорреляции на ошибку прогноза. Получены рекомендации для построения практических алгоритмов прогноза.

Оптимальный линейный прогноз при известном тренде. Пусть наблюдаемый процесс

$$x_r = s_r + \xi_r, \qquad r = \ldots,\ t-2, t-1, t, \tag{6}$$

представляет сумму относительно низкочастотной компоненты s_r (тренда) и высокочастотной компоненты ξ_r (помехи). Будем полагать также, что s_r и ξ_r – независимые стационарные в широком смысле случайные процессы с корреляционными функциями $B_{i-j}^{s} = \mathbf{M} s_i s_j$ и $B_{i-j}^{\xi} = \mathbf{M} \xi_i \xi_j$ соответственно и $\mathbf{M}\xi_i = 0$. При этом взаимная корреляционная функция процессов s_r и ξ_r равна $\mathbf{M} s_i \xi_j = \mathbf{M} s_i \mathbf{M} \xi_j = 0$ и процесс x_r имеет корреляционную функцию $B_i^x = B_i^s + B_i^{\xi}$. Рассмотрим задачу линейного прогноза процесса x_r при условии, что в моменты времени $r = \ldots, t-2, t-1, t$ известны не только значения процесса x_r, но и его компонент s_r и ξ_r. Поэтому линейный прогноз случайного процесса x_r можно рассматривать как в форме (1), так и в виде суммы прогноза процесса s_r и прогноза процесса ξ_r. Пусть

$$z_{t+l} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1} \tag{7}$$

– оценка случайной величины x_{t+l}. Поскольку

$$z_{t+l} = \sum_{i=1}^{k} (\beta_i + \gamma_i) s_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \xi_{t-i+1}, \tag{8}$$

то величины $\beta_i + \gamma_i$ и β_i есть коэффициенты линейного прогноза процессов s_r и ξ_r соответственно. Определим величины β_i, γ_i из условия минимума среднеквадратической ошибки ε_z^2 прогноза z_{t+l}:

$$\varepsilon_z^2 = \mathbf{M}(z_{t+l} - x_{t+l})^2 \to \min_{\beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k}. \qquad (9)$$

Решение этой задачи сводится к поиску минимума функции ε_z^2 по $2k$ переменным: $\beta_1, \ldots, \beta_k$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Достаточные условия минимума функции нескольких переменных [1] в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial \varepsilon_z^2}{\partial \beta_j} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_z^2}{\partial \gamma_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \qquad (10)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{2k} \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial^2 \varepsilon_z^2}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \lambda_i \lambda_j > 0, \qquad (11)$$

где $\psi_i = \beta_i$, $\psi_{k+i} = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, k$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2k}$ – любые числа. Подставим выражение (7) в (9), тогда

$$\varepsilon_z^2 = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1} - x_{t+l} \right)^2. \qquad (12)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varepsilon_z^2}{\partial \beta_j} = 2\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1} - x_{t+l} \right) x_{t-j+1} =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i B_{i-j}^{x} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i B_{i-j}^{s} - B_{j+l-1}^{x} \right). \qquad (13)$$

Из уравнений (10) и (13) следует

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i B_{i-j}^{x} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i B_{i-j}^{s} = B_{j+l-1}^{x}, \quad j = 1, \ldots, k. \qquad (14)$$

Аналогично из (12)

$$\frac{\partial \varepsilon_z^2}{\partial \gamma_j} = 2\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1} - x_{t+l} \right) s_{t-j+1} =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i B_{i-j}^{s} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i B_{i-j}^{s} - B_{j+l-1}^{s} \right). \qquad (15)$$

Из равенства нулю производной (15) получим

$$\sum_{i=1}^{k}(\beta_i+\gamma_i)B^s_{i-j}=B^s_{j+l-1},\qquad j=1,\ldots,k. \tag{16}$$

Соотношения (14), (16) образуют систему $2k$ линейных уравнений относительно неизвестных $\beta_1,\ldots,\beta_k,\gamma_1,\ldots,\gamma_k$, решение которой минимизирует среднеквадратическую ошибку ε_z^2 прогноза z_{t+l}, если при этом выполняется условие $Q>0$ (11).

Системе уравнений (14), (16) можно дать вторую интерпретацию. Аналогично соотношениям (1)–(4), решение $\beta_i+\gamma_i$, $i=1,\ldots,k$, системы (16) минимизирует среднеквадратическую ошибку $\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k}(\beta_i+\gamma_i)s_{t-i+1}-s_{t+l}\right)^2$ линейного прогноза $\sum_{i=1}^{k}(\beta_i+\gamma_i)s_{t-i+1}$ тренда. Далее, из уравнения (14) вычтем уравнение (16) и получим

$$\sum_{i=1}^{k}\beta_i B^{\xi}_{i-j}=B^{\xi}_{j+l-1},\qquad j=1,\ldots,k. \tag{17}$$

Следовательно, решение β_i, $i=1,\ldots,k$, системы (17) минимизирует среднеквадратическую ошибку $\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k}\beta_i\xi_{t-i+1}-\xi_{t+l}\right)^2$ линейного прогноза $\sum_{i=1}^{k}\beta_i\xi_{t-i+1}$ помехи.

Таким образом, задача оптимального линейного прогноза (7), (9) сводится к двум задачам: прогнозу тренда (решение определяется системой (16)) и прогнозу помехи (ее решение находится из системы линейных уравнений (17)); затем прогноз z_{t+l} наблюдаемого процесса определяется суммой прогнозов тренда и помехи (формула (8)).

Квадратичная форма. Покажем, что квадратичная форма Q удовлетворяет условию (11) и, следовательно, решение системы уравнений (14), (16) минимизирует среднеквадратическую ошибку (9). Для этого представим Q через β_i, γ_i:

$$Q=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\psi_i\partial\psi_j}\lambda_i\lambda_j+\sum_{i=k+1}^{2k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\psi_i\partial\psi_j}\lambda_i\lambda_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{2k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\psi_i\partial\psi_j}\lambda_i\lambda_j+\sum_{i=k+1}^{2k}\sum_{j=k+1}^{2k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\psi_i\partial\psi_j}\lambda_i\lambda_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\psi_i\partial\psi_j}\lambda_i\lambda_j+\sum_{p=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\psi_{k+p}\partial\psi_j}\lambda_{k+p}\lambda_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\psi_i\partial\psi_{k+q}}\lambda_i\lambda_{k+q}+\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\psi_{k+p}\partial\psi_{k+q}}\lambda_{k+p}\lambda_{k+q}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\beta_i\partial\beta_j}\lambda_i\lambda_j+\sum_{p=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\gamma_p\partial\beta_j}\lambda_{k+p}\lambda_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\beta_i\partial\gamma_q}\lambda_i\lambda_{k+q}+\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\gamma_p\partial\gamma_q}\lambda_{k+p}\lambda_{k+q}. \qquad (18)$$

Из (13) следует

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\beta_i\partial\beta_j}=2B_{i-j}^{x};\qquad \frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\gamma_i\partial\beta_j}=2B_{i-j}^{s}. \qquad (19)$$

Аналогично из (15) получим

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\beta_i\partial\gamma_j}=2B_{i-j}^{s};\qquad \frac{\partial^2\varepsilon_z^2}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j}=2B_{i-j}^{s}. \qquad (20)$$

Подставим уравнения (19) и (20) в (18), тогда

$$Q=2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(B_{i-j}^{x}\lambda_i\lambda_j+B_{i-j}^{s}\lambda_{k+i}\lambda_j+B_{i-j}^{s}\lambda_i\lambda_{k+j}+B_{i-j}^{s}\lambda_{k+i}\lambda_{k+j})=$$

$$=2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}B_{i-j}^{\xi}\lambda_i\lambda_j+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}B_{i-j}^{s}(\lambda_i+\lambda_{k+i})(\lambda_j+\lambda_{k+j}). \qquad (21)$$

Отсюда следует $Q>0$, поскольку корреляционные функции B^s, B^ξ являются положительно-определенными [2].

Среднеквадратические ошибки прогнозов. Система уравнений (16) определяет коэффициенты $\beta_i+\gamma_i$, $i=1,\dots,k$, линейного прогноза тренда с минимальной среднеквадратической ошибкой

$$\varepsilon_2^2=\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k}(\beta_i+\gamma_i)s_{t-i+1}-s_{t+l}\right)^2, \qquad (22)$$

которую, аналогично соотношению (5), можно представить в виде

$$\varepsilon_2^2=B_0^s-\sum_{i=1}^{k}(\beta_i+\gamma_i)B_{i+l-1}^{s}=B_0^s-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\beta_i+\gamma_i)(\beta_j+\gamma_j)B_{i-j}^{s}. \qquad (23)$$

Так же решение системы (17) определяет коэффициенты β_i линейного прогноза помехи с минимальной среднеквадратической ошибкой

$$\varepsilon_3^2 = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \xi_{t-i+1} - \xi_{t+l}\right)^2 = B_0^{\xi} - \sum_{i=1}^{k} \beta_i B_{i+l-1}^{\xi} = B_0^{\xi} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \beta_i \beta_j B_{i-j}^{\xi}. \tag{24}$$

Используя соотношение (8), получим

$$\varepsilon_z^2 = \mathbf{M}(z_{t+l} - x_{t+l})^2 = \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{k} (\beta_i + \gamma_i) s_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \xi_{t-i+1} - s_{t+l} - \xi_{t+l}\right]^2. \tag{25}$$

Поскольку случайные величины s_i и ξ_j независимы и $\mathbf{M}\xi_i = 0,$ то

$$\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} (\beta_i + \gamma_i) s_{t-i+1} - s_{t+l}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \xi_{t-i+1} - \xi_{t+l}\right) = 0. \tag{26}$$

С учетом этого из (25) следует, что ошибка ε_z^2 полного прогноза z_{t+l} равна сумме ошибок прогноза тренда и прогноза помехи. Если коэффициенты β_i, γ_i являются решением системы $2k$ уравнений (14), (16), то ошибка ε_z^2 достигает своего минимального значения

$$\varepsilon_4^2 = \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2. \tag{27}$$

Соотношения между прогнозами при известном и неизвестном тренде. Представим формулу (1) прогноза при неизвестном тренде в виде

$$y_{t+l} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) x_{t-i+1}. \tag{28}$$

Здесь выражение $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) x_{t-i+1}$ выполняет функцию второго слагаемого $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1}$ в формуле (7) прогноза при известном тренде. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – решение системы уравнений (4) и $\beta_1, \ldots, \beta_k$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ – решение системы (14), (16), то $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1}$ можно рассматривать как линейный прогноз тренда с коэффициентами $\gamma_i = (\beta_i + \gamma_i) - \beta_i$, равными разности коэффициентов $\beta_i + \gamma_i$ (оптимального прогноза тренда) и коэффициентов β_i (оптимального прогноза помехи). Введем линейную оценку $\sum_{i=1}^{k} \delta_i x_{t-i+1}$

случайной величины $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1}$, и коэффициенты $\delta_1, \ldots, \delta_k$ определим из условия

$$\varepsilon_s^2 = \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{k} \delta_i x_{t-i+1} - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1}\right]^2 \to \min_{\delta_1, \ldots, \delta_k}. \tag{29}$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial \varepsilon_s^2}{\partial \delta_j} = 2\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} \delta_i x_{t-i+1} - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1}\right) x_{t-j+1}, \tag{30}$$

затем из условия $\partial \varepsilon_s^2 \big/ \partial \delta_j = 0$ получим

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i B_{i-j}^x = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i B_{i-j}^s, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{31}$$

– систему линейных уравнений относительно $\delta_1, \ldots, \delta_k$. Решение системы (31) минимизирует ошибку ε_s^2, поскольку, как следует из (30), квадратичная форма

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \varepsilon_s^2}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \lambda_i \lambda_j = 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} B_{i-j}^x \lambda_i \lambda_j > 0. \tag{32}$$

Разность выражений (4) и (14) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) B_{i-j}^x = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i B_{i-j}^s, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{33}$$

поэтому из (31) и (33) следует

$$\delta_i = \alpha_i - \beta_i, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{34}$$

Таким образом, оптимальный прогноз z_{t+l} при известном тренде (7) и прогноз y_{t+l} при неизвестном тренде (28) различаются своими вторыми слагаемыми. Причем если величина $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1}$ в (7) заменяется ее оптимальной линейной оценкой $\sum_{i=1}^{k} \delta_i x_{t-i+1} = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) x_{t-i+1}$, то прогноз z_{t+l} при известном тренде переходит в прогноз y_{t+l} при неизвестном тренде.

Дополнительная ошибка прогноза. Найдем минимальное значение ε_5^2 среднеквадратической ошибки ε_s^2 оценки $\sum_{i=1}^{k} \delta_i x_{t-i+1}$ случайной величины $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1}$. Далее будет показано, что $\varepsilon_5^2 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_4^2$ – приращение ошибки прогноза, обусловленное неизвестным трендом. Соотношение (29) можно представить в виде

$$\varepsilon_s^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta_i \delta_j B_{i-j}^x - 2\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta_i \gamma_j B_{i-j}^s + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \gamma_i \gamma_j B_{i-j}^s . \tag{35}$$

Если коэффициенты $\delta_1, \ldots, \delta_k$ являются решением системы уравнений (31), то ε_s^2 достигает минимального значения ε_5^2. Рассмотрим три возможных представления для ε_5^2. Подставим равенство (31) в первое слагаемое (35), тогда с учетом четности $B_{i-j}^s = B_{j-i}^s$ корреляционной функции будем иметь

$$\varepsilon_5^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \gamma_i \delta_j B_{i-j}^s - 2\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta_i \gamma_j B_{i-j}^s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \gamma_i \gamma_j B_{i-j}^s = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (\gamma_i - \delta_i) \gamma_j B_{i-j}^s . \tag{36}$$

Второе представление находим заменой выражения $\sum\limits_{j=1}^{k} \gamma_j B_{j-i}^s$ во втором слагаемом (35) левой частью $\sum\limits_{j=1}^{k} \delta_j B_{j-i}^s$ равенства (31):

$$\varepsilon_5^2 = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta_i \delta_j B_{i-j}^x + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \gamma_i \gamma_j B_{i-j}^s =$$

$$= \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{k} \gamma_i s_{t-i+1}\right]^2 - \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{k} \delta_i x_{t-i+1}\right]^2 . \tag{37}$$

Наконец, третье представление минимальной ошибки получим, заменив $\sum\limits_{j=1}^{k} \gamma_j B_{j-i}^s$ во втором и третьем слагаемых (35) выражением $\sum\limits_{j=1}^{k} \delta_j B_{j-i}^x$:

$$\varepsilon_5^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (\gamma_i - \delta_i) \delta_j B_{i-j}^x . \tag{38}$$

Соотношение между ошибками. Используя выражения (27), (23), (24), получим

$$\varepsilon_4^2 = \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = B_0^x - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (\beta_i + \gamma_i)(\beta_j + \gamma_j) B_{i-j}^s - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \beta_i \beta_j B_{i-j}^{\xi} . \tag{39}$$

Теперь из (5), (39) следует

$$\varepsilon_1^2 - \varepsilon_4^2 = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \alpha_j B_{i-j}^x +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\beta_i+\gamma_i)(\beta_j+\gamma_j)B^s_{i-j}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\beta_i\beta_j B^{\xi}_{i-j}. \tag{40}$$

Согласно (34) $\alpha_i=\beta_i+\delta_i$. Подставим это выражение в (40), тогда

$$\varepsilon_1^2-\varepsilon_4^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}[-(\beta_i+\delta_i)(\beta_j+\delta_j)B^x_{i-j}+$$

$$+(\beta_i+\gamma_i)(\beta_j+\gamma_j)B^s_{i-j}+\beta_i\beta_j B^{\xi}_{i-j}]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}[-(\beta_i\delta_j+\delta_i\beta_j+\delta_i\delta_j)B^x_{i-j}+(\beta_i\gamma_j+\gamma_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j)B^s_{i-j}]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}[-(2\beta_i\delta_j+\delta_i\delta_j)B^x_{i-j}+(2\beta_i\gamma_j+\gamma_i\gamma_j)B^s_{i-j}]. \tag{41}$$

В соответствии с формулой (37)

$$\varepsilon_1^2-\varepsilon_4^2=\varepsilon_5^2+2\sum_{i=1}^{k}\beta_i\left[-\sum_{j=1}^{k}\delta_j B^x_{i-j}+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j B^s_{i-j}\right]. \tag{42}$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю для любого $i=1,\ldots,k$, поскольку $\delta_1,\ldots,\delta_k$ удовлетворяют системе уравнений (31). Поэтому (42) принимает вид

$$\varepsilon_1^2=\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2. \tag{43}$$

Таким образом, ошибка ε_1^2 оптимального линейного прогноза при неизвестном тренде равна сумме ошибок ε_4^2 и ε_5^2, где ε_4^2 – ошибка оптимального прогноза при известном тренде и ε_5^2 – минимальная ошибка оценки $\sum_{i=1}^{k}\delta_i x_{t-i+1}$ случайной величины $\sum_{i=1}^{k}\gamma_i s_{t-i+1}$.

Минимальная среднеквадратическая ошибка – невозрастающая функция аргумента *k*. Рассмотрим прогноз y_{t+l} и его ошибку ε_y^2 (2). Пусть $\varepsilon^2(k)=\varepsilon_y^2$ – функция k аргументов $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ вида (2) и $\varepsilon^2(k+1)$ – функция $k+1$ аргументов $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1}$, аналогичная (2). Таким образом, $\varepsilon^2(k+1)$ – среднеквадратическая ошибка прогноза по $k+1$ значениям $x_{t-k},\ldots,x_t$ наблюдаемого процесса. Задача нахождения минимума $\varepsilon_1^2(k)$ функции $\varepsilon^2(k)$ по аргументам $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ совпадает с задачей нахождения условного минимума функции $\varepsilon^2(k+1)$ при условии $\alpha_{k+1}=0$. Безусловный минимум $\varepsilon_1^2(k+1)$ функции $\varepsilon^2(k+1)$ не больше, чем ее условный минимум при $\alpha_{k+1}=0$, который совпадает с безусловным минимумом $\varepsilon_1^2(k)$ функции $\varepsilon^2(k)$. Таким образом, $\varepsilon_1^2(k+1)\le\varepsilon_1^2(k)$ – минимальная ошибка прогноза –

является невозрастающей функцией аргумента k. Очевидно, аналогичными свойствами обладают и другие ошибки линейного прогноза.

П р и м е р 1. Рассмотрим полученные соотношения в частном случае $s_r = a = \text{const}$. При этом $\mathbf{M}x_r = a$, корреляционная функция тренда $B^s_{i-j} = \mathbf{M}s_i s_j = a^2$ и уравнение (16) приводится к виду

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i = 1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i. \tag{44}$$

Теперь из соотношения (7) следует

$$z_{t+l} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right) a. \tag{45}$$

Рассмотрим систему уравнений (31), которая определяет коэффициенты $\delta_1, \ldots, \delta_k$. В данном случае (31) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{k} h_i B^x_{i-j} = a^2, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{46}$$

где $h_i = \delta_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$. Несложно показать, что задача

$$\varepsilon_h^2 = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} h_i x_{t-i+1} - a\right)^2 \to \min_{h_1, \ldots, h_k} \tag{47}$$

сводится к системе уравнений (46) относительно h_i. Следовательно, решение системы (46) $h_1, \ldots, h_k$ определяет линейную оценку $a_\text{v} = \sum_{i=1}^{k} h_i x_{t-i+1}$ математического ожидания a с минимальной среднеквадратической ошибкой. Теперь прогноз (28) представим в виде

$$y_{t+l} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i x_{t-i+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + a_\text{v} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right) a_\text{v}. \tag{48}$$

Сравним выражения (45) и (48). Прогноз (45) с известным математическим ожиданием содержит слагаемое $\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right) a$, которое заменяется его оценкой $\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right) a_\text{v}$ в формуле (48) прогноза при неизвестном математическом ожидании. Среднеквадратическая ошибка этой оценки

$$\varepsilon_5^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right)^2 \mathbf{M}(a_{\text{v}} - a)^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right)^2 \varepsilon_a^2, \qquad (49)$$

где $\varepsilon_a^2 = \mathbf{M}(a_{\text{v}} - a)^2$. Соотношение (49) совпадает с результатом, полученным в [3] при исследовании линейного прогноза стационарного процесса с известным и неизвестным математическим ожиданием. В соответствии с (49) разность ошибок $\varepsilon_5^2 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_4^2$ может быть значительной, если велика ошибка ε_a^2 оптимальной оценки среднего или большим является весовой множитель $1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ среднего в формуле прогноза. Соотношение (45) можно представить в виде

$$z_{t+l} = a + \sum_{i=1}^{k} \beta_i (x_{t-i+1} - a). \qquad (50)$$

Следовательно, прогноз при известном среднем определяется только прогнозом помехи с коэффициентом β_i. При этом можно формально рассматривать прогноз тренда как прогноз постоянной величины a с нулевой ошибкой, что следует из (22) при $s_r = a$:

$$\varepsilon_2^2 = \left[\sum_{i=1}^{k} (\beta_i + \gamma_i) - 1\right]^2 a^2 = 0, \qquad (51)$$

поскольку справедливо равенство (44).

Пусть дополнительно ξ_r – белый случайный процесс с корреляционной функцией $B_0^\xi = \sigma^2$, где $\sigma^2 = \mathbf{M}\,\xi_r^2$ – дисперсия процесса ξ_r; $B_i^\xi = 0$, если $i \neq 0$. Тогда $\sum_{i=1}^{k} \beta_i B_{i+l-1}^\xi = 0$, и в соответствии с формулой (24) ошибка прогноза помехи $\varepsilon_3^2 = \sigma^2$ и не зависит от числа k. При этом система уравнений (17) имеет решение $\beta_i = 0$, $i = 1, \dots, k$. Поэтому в оптимальном прогнозе (50) не используется ни один отсчет процесса x_r – это прогноз по среднему $z_{t+l} = a$. Процесс, отличный от белого, имеет некоторые значения $B_i^\xi \neq 0$, $i > 0$, и это позволяет уменьшить ошибку (24), если $\beta_i B_{i+l-1} \neq 0$ для некоторых $i \in [1, k]$.

П р и м е р 2. Рассмотрим простейший вариант задачи линейного прогноза, позволяющий вычислить ошибки $\varepsilon_1^2, \varepsilon_4^2, \varepsilon_5^2$ в аналитической форме и подобрать такие параметры процессов s_r, ξ_r, при которых ошибка ε_1^2 прогноза при неизвестном тренде значительно превосходит ошибку ε_4^2 прогноза при известном тренде. Пусть $l = 1$, $k = 2$, тогда система линейных уравнений (17), определяющая коэффициенты оптимального прогноза помехи, имеет решение

$$\beta_1 = \frac{B_1^\xi (B_0^\xi - B_2^\xi)}{(B_0^\xi)^2 - (B_1^\xi)^2}; \qquad \beta_2 = \frac{B_0^\xi B_2^\xi - (B_1^\xi)^2}{(B_0^\xi)^2 - (B_1^\xi)^2}. \qquad (52)$$

Выражения (52) подставим в (24) и будем иметь

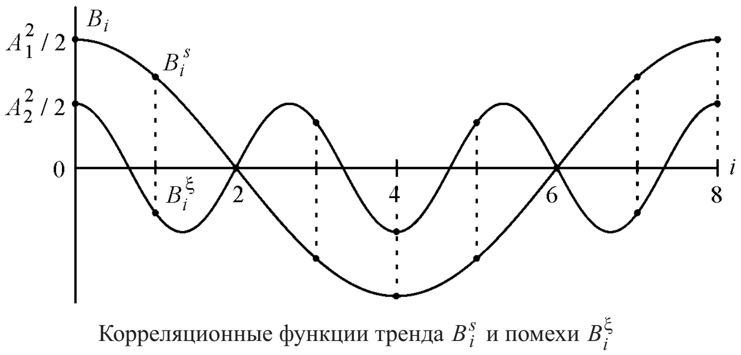
$$\varepsilon_3^2 = B_0^\xi - B_1^\xi \frac{B_1^\xi (B_0^\xi - B_2^\xi)}{(B_0^\xi)^2 - (B_1^\xi)^2} - B_2^\xi \frac{B_0^\xi B_2^\xi - (B_1^\xi)^2}{(B_0^\xi)^2 - (B_1^\xi)^2}. \tag{53}$$

Формула, аналогичная (53), может быть получена и для ошибки ε_2^2 прогноза тренда. Для этого при $l = 1$, $k = 2$ решается система уравнений (16).

Пусть $s_r = A_1 \cos(\omega_1 r\tau + \varphi_1)$, где амплитуда A_1, частота ω_1, шаг дискретизации по времени τ – детерминированные величины и начальная фаза φ_1 – непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f(x) = (2\pi)^{-1}$, если $x \in [0, 2\pi]$, и $f(x) = 0$, если $x \notin [0, 2\pi]$. Тогда s_r – стационарный в широком смысле случайный процесс с математическим ожиданием $\mathbf{M} s_r = 0$ и корреляционной функцией $B_i^s = (A_1^2/2)\cos\omega_1 i\tau$. Пусть помеха ξ_r задается аналогичной моделью $\xi_r = A_2 \cos(\omega_2 r\tau + \varphi_2)$ с математическим ожиданием $\mathbf{M}\xi_r = 0$ и корреляционной функцией $B_i^\xi = (A_2^2/2)\cos\omega_2 i\tau$ и случайные величины φ_1 и φ_2 независимы. На рисунке представлены графики корреляционных функций B_i^s, B_i^ξ.

Зададим следующие параметры процессов s_r, ξ_r. Пусть периоды $T_1 = 2\pi/\omega_1$ и $T_2 = 2\pi/\omega_2$ связаны соотношением $T_1 = 3T_2$, а шаг дискретизации по времени $\tau = T_1/8$. При этом $B_0^s = A_1^2/2$, $B_0^\xi = A_2^2/2$, $B_1^s = A_1^2/2\sqrt{2}$, $B_1^\xi = -A_2^2/2\sqrt{2}$, $B_2^s = 0$, $B_2^\xi = 0$. Подстановка этих результатов в (53) приводит к $\varepsilon_3^2 = 0$. Аналогично ошибка прогноза тренда $\varepsilon_2^2 = 0$. Полученные результаты вполне ожидаемы, поскольку любая реализация процесса s_r (как и процесса ξ_r) – гармоническая функция и ее оптимальный прогноз по двум отсчетам вычисляется точно, с нулевой ошибкой. Однако задача прогнозирования процесса x_r при неизвестном тренде в данном примере существенно сложнее. Например, выбирая $A_1 = A_2 = A$, получим $B_0^x = A^2$, $B_1^x = 0$, $B_2^x = 0$, $B_3^x = 0$ и только $B_4^x \neq 0$ (см. рисунок). Поэтому прогноз x_r по одному, двум, трем отсчетам эквивалентен прогнозу белого процесса, при этом ошибка $\varepsilon_1^2 = B_0^x = A^2$ и ошибка суммы прогнозов двух гармоник s_r и ξ_r для $k = 1, 2, 3$ равна $\varepsilon_4^2 = 0{,}5A^2$; 0; 0 соответственно.

Таким образом, в этом примере ($k = 2, 3$) подобраны параметры процессов s_r, ξ_r, обеспечивающие сильный выигрыш в точности прогноза с известным трендом по сравнению с прогнозом при неизвестном тренде. Причиной



Корреляционные функции тренда B_i^s и помехи B_i^ξ

снижения точности прогноза является эффект декорреляции процесса x_r при сложении его компонент s_r и ξ_r (см. рисунок).

Заключение. Среднеквадратическая ошибка оптимального линейного прогноза является невозрастающей функцией числа k, поэтому в алгоритмах прогноза k необходимо выбирать достаточно большим. Это позволит использовать все ненулевые значения корреляционной функции B_i^x и, следовательно, минимизировать ошибку. Подходящей оценкой числа k здесь может быть оценка интервала корреляции исследуемого процесса x_r. При этом число k может оказаться весьма большим (пример 2). Однако в задачах прогнозирования тренд и корреляционная функция B_i^x, как правило, неизвестны. Поэтому задача линейного прогноза формулируется в виде соотношений (1), (2), формально не требующих знания тренда, а решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений (4), в которой неизвестная корреляционная функция заменяется ее оценкой. Этот подход осложняется тем, что решение системы уравнений (4) является некорректно поставленной задачей [4] и с ростом k проявляется неустойчивость численного решения, приводящая к необходимости выбора малого k. Но при этом возможно появление эффекта декорреляции и, следовательно, значительной ошибки прогноза. Поэтому, если допускает постановка задачи, полезной может оказаться процедура декомпозиции исследуемого процесса x_r на квазигармоники, для каждой из которых задача прогнозирования удовлетворительно решается при малом k, затем прогноз исследуемого процесса находится как сумма прогнозов всех его компонент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике. М.: Наука, 1986.
2. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1974. Кн. 1.
3. **Кулешов Е. Л.** Линейное прогнозирование стационарных случайных процессов при известном и неизвестном математическом ожидании // Автометрия. 2001. № 6. С. 114.
4. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Дальневосточный государственный университет,
E-mail: kuleshov@lemoi.phys.dvgu.ru

Поступила в редакцию
9 марта 2004 г.