РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2004, том 40, № 6

УДК 621.391.26 + 519.218.82

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, С. Т. Васьков

(Новосибирск)

О ДИСПЕРСИИ ОШИБКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОТСЧЕТОВ ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ*

Получены соотношения для дисперсии ошибки восстановления сигнала с неограниченным по частоте спектром по значениям его отсчетов и отсчетов его производных при помощи интерполяционной формулы, предназначенной для сигнала с ограниченным по частоте спектром. Показано, что при одинаковом числе отсчетов в единицу времени более предпочтительна реконструкция сигнала с использованием обычной теоремы отсчетов, т. е. только отсчетов сигнала. Из данных расчетов следует, что при оптимизации восстановления сигнала уменьшение дисперсии ошибки реконструкции сигнала несущественно.

Введение. В работе [1] получена обобщенная теорема отсчетов для реконструкции сигнала по последовательности значений сигнала и его производных $\{f^{(0)}(n(m+1)\Delta)\}, \{f^{(1)}(n(m+1)\Delta)\}, \ldots, \{f^{(m)}(n(m+1)\Delta)\}$ в равноотстоящие моменты времени:

$$f^{(0)}(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\sin\dfrac{\pi}{(m+1)\Delta}(t-n(m+1)\Delta)}{\dfrac{\pi}{(m+1)\Delta}(t-n(m+1)\Delta)}\right\}^{m+1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(n(m+1)\Delta)}{k!}(t-n(m+1)\Delta)^k P_{mk}(t-n(m+1)\Delta), \tag{1}$$

где

$$P_{mk}(x)=\sum_{l=0}^{m-k}\frac{x^l}{l!}\frac{d^l}{dt^l}\left\{\frac{\pi}{(m+1)\Delta}t\operatorname{cosec}\frac{\pi}{(m+1)}t\right\}^{m+1}\Bigg|_{t=0}. \tag{2}$$

При этом показано, что сигнал $f^{(0)}(t)$ восстанавливается без ошибок, если граничная частота его спектра $|\omega|\le\pi/\Delta$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00913) и Президиума РАН (программа № 2.13/2004).

Далее исследуется дисперсия ошибки восстановления сигнала, реконструкция которого осуществляется в соответствии с соотношением (1), для трех случаев: по значениям сигнала ($m=0$); по значениям сигнала и его производной ($m=1$); по значениям сигнала, его первой и второй производных ($m=2$).

Вывод теоремы отсчетов в [1] базируется помимо всего прочего на операции дифференцирования соотношений из [2] и последующем предельном переходе. В предлагаемой работе используется несколько иной подход для получения конечных результатов. Он основывается на замене переменных с использованием соответствующих конечных разностей и последующем предельном переходе при сближении отсчетов сигнала. Этот способ в конечном итоге оказывается эквивалентным использованному в [1], но позволяет получить промежуточные результаты, которые могут быть полезными.

Дисперсия ошибки. При неограниченной по частоте спектральной плотности сигнала $S_f(\omega)$ очевидно соотношение для дисперсии ошибки восстановления по формуле (1):

$$\langle\varepsilon^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega)\Bigg|\exp - i\omega t - \sum_{k=0}^{m}(-i\omega)^m \times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp - i\omega n(m+1)\Delta w^*_{m(k)}(t-n(m+1)\Delta)\Bigg|^2. \tag{3}$$

В этом соотношении отсчетная функция

$$w^*_{m(k)}(t-n(m+1)\Delta) =$$

$$= \frac{\left[\sin\dfrac{\pi}{(m+1)\Delta}(t-n(m+1)\Delta)\right]^{m+1}}{\left[\dfrac{\pi}{(m+1)\Delta}(t-n(m+1)\Delta)\right]^{m+1-k}}\left[\frac{(m+1)\Delta}{\pi}\right]^k \frac{P_{mk}(t-n(m+1)\Delta)}{k!}.$$

После преобразований формула для дисперсии ошибки (3) (усреднение по времени на интервале $(m+1)\Delta$) имеет вид

$$\langle\varepsilon^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_\alpha(\omega)\Bigg(1-2\sum_{k=0}^{m}\omega^k\widetilde{w}_{m(k)}(\omega)+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}\omega^k\widetilde{w}_{m(k)}\left(\omega-\frac{2\pi}{(m+1)\Delta}n\right)\right)^2\Bigg), \tag{4}$$

где

$$\widetilde{w}_{m(k)}(\omega) = \frac{2\pi}{(m+1)\Delta}(-i)^k\,\widetilde{w}^*_{m(k)}(\omega). \tag{5}$$

Отсчеты сигнала. При $m=0$, т. е. при использовании для реконструкции сигнала с неограниченной спектральной плотностью $S_f(\omega)$ обычной теоремы отсчетов (см. (1)),

$$f^{(0)}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^{(0)}(n\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}.$$

Частотная дисперсия ошибки $\varepsilon^2(\omega)=2\times 1\left[|\omega|-\frac{\pi}{\Delta}\right]$. Здесь и далее $1[x]$ означает единичную функцию, равную единице при положительном значении аргумента и нулю в противном случае.

Средняя по частоте дисперсия ошибки имеет следующий вид:

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega)\varepsilon^2(\omega)=2\int_{|\omega|>\pi/\Delta} d\omega S_f(\omega)=4\int_{\pi/\Delta}^{\infty} d\omega S_f(\omega). \tag{6}$$

Формула (6) для дисперсии ошибки реконструкции сигнала является эталонной при использовании теоремы отсчетов (1), если число производных $m\geq 1$.

Отсчеты сигнала и его первой производной. Рассмотрим периодически неравномерную дискретизацию, когда отсчеты образуют равномерную (с периодом 2Δ) последовательность, содержащую два отсчета, разделенных интервалом τ. Используем далее соотношение Йена [2] для весовых функций двух отсчетов с абсциссами t_1 и t_2:

$$w_{11}(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t-t_1)}{\frac{\pi}{2\Delta}(t-t_1)}\frac{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t-t_2)}{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t_1-t_2)},\qquad w_{12}(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t-t_2)}{\frac{\pi}{2\Delta}(t-t_2)}\frac{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t-t_1)}{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t_2-t_1)}.$$

Введем новые переменные

$$\frac{1}{2}(f^{(0)}(t_1)+f^{(0)}(t_2))=f^{(0)}\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right),\qquad -f^{(0)}(t_1)+f^{(0)}(t_2)=\tau f^{(1)}\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right). \tag{7}$$

Решая систему уравнений относительно $f^{(0)}(t_1)$ и $f^{(0)}(t_2)$ и используя представление сигнала $f^{(0)}(t)=f^{(0)}(t_1)w_{11}(t)+f^{(0)}(t_2)w_{12}(t)$, получим соотношения для весовых функций при новых переменных (7), полагая $t_1=-0{,}5\tau$, а $t_2=0{,}5\tau$:

$$w_{1(0)}(t,\tau)=w_{11}(t,\tau)+w_{12}(t,\tau)=\frac{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t+0{,}5\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t-0{,}5\tau)}{\frac{\pi}{2\Delta}(t+0{,}5\tau)(t-0{,}5\tau)}\frac{\tau}{\sin\frac{\pi}{2\Delta}\tau}, \tag{8}$$

$$w_{1(1)}(t,\tau)=\frac{\tau(w_{12}(t)-w_{11}(t))}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t+0,5\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t-0,5\tau)}{\frac{\pi}{2\Delta}(t+0,5\tau)(t-0,5\tau)}\frac{\tau}{\sin\frac{\pi}{2\Delta}\tau}t. \qquad (9)$$

При $m=1$ и $\tau\to 0$ из (1) и (2), (8) и (9) (с учетом $P_{10}(x)=P_{11}(x)=1$) получаем известную теорему отсчетов [1]:

$$f^{(0)}(t)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(f^{(0)}(n2\Delta)\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t-n2\Delta)}{\frac{\pi}{2\Delta}(t-n2\Delta)}\right]^2+\frac{f^{(1)}(n2\Delta)}{1!}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2\Delta}(t-n2\Delta)}{\frac{\pi}{2\Delta}(t-n2\Delta)}\right]^2(t-n2\Delta)\right).$$

Отметим, что отсчетная функция $w_{1(0)}(t)$ – четная, а функция $w_{1(1)}(t)$ – нечетная.

В соответствии с последними замечаниями относительно свойств отсчетных функций при реконструкции сигнала по его значениям и значениям его производной в случае равномерной дискретизации формула для дисперсии ошибки реконструкции сигнала (как функции частоты) согласно (4) и (5) имеет вид

$$\varepsilon^2(\omega)=1-2\tilde{w}_{1(0)}(\omega)-2\omega\tilde{w}_{1(1)}(\omega)+\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{w}_{1(0)}^2\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}k\right)+$$
$$+\omega^2\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{w}_{1(1)}^2\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}k\right)+2\omega\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{w}_{1(0)}\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}k\right)\tilde{w}_{1(1)}\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}k\right).$$

Так как преобразование Фурье

$$\tilde{w}_{1(0)}(\omega)=1\left[\frac{\pi}{\Delta}-|\omega|\right]\left(1-\frac{\Delta}{\pi}|\omega|\right),\qquad \tilde{w}_{1(1)}(\omega)=\frac{\Delta}{\pi}1\left[\frac{\pi}{\Delta}-|\omega|\right]\mathrm{sign}\omega,$$

то

$$\varepsilon^2(\omega)=2\cdot 1\left[|\omega|-\frac{\pi}{\Delta}\right]+2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)1\left[\left(\frac{\Delta}{\pi}|\omega|-(k-1)\right)\left(k-\frac{\Delta}{\pi}|\omega|\right)\right]. \qquad (10)$$

Среднее по частоте значение дисперсии ошибки

$$\langle\varepsilon^2\rangle=4\int_{\pi/\Delta}^{\infty}d\omega S_f(\omega)+4\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\int_{(k-1)(\pi/\Delta)}^{k(\pi/\Delta)}d\omega S_f(\omega). \qquad (11)$$

Из сравнения (11) с (6) следует, что эти дисперсии реконструкции совпадают в случае, когда спектральная плотность сигнала вне полосы частот $|\omega|\le\pi/\Delta$ равна нулю. В противном случае дисперсия реконструкции (11) не менее чем в 3 раза увеличивается. Поэтому более целесообразно восстановление сигнала только по его значениям при удвоенной частоте дискретизации (шаг дискретизации – Δ).

Например, при убывании спектральной плотности $S_f(\omega)$ со скоростью $1/\omega^4$, что соответствует однократно дифференцируемому в среднеквадратичном сигналу, второй член (11) примерно в 3 раза превышает первый, а вся дисперсия ошибки возрастает примерно в 4 раза.

Отсчеты сигнала, его первой и второй производных. Рассмотрим равномерную последовательность с периодом 3Δ совокупностей из трех отсчетов сигнала, разделенных интервалом τ. Весовые функции в соответствии с [2] выглядят следующим образом:

$$w_{21}(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0)\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0-\tau)}{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(-\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(-2\tau)};$$

$$w_{22}(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0-\tau)}{\sin\frac{\pi}{3\Delta}\tau\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(-\tau)}; \qquad (12)$$

$$w_{23}(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0-\tau)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0-\tau)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0)}{\sin\frac{\pi}{3\Delta}2\tau\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}\tau}.$$

В соотношениях для весовых функций (12) величина $t_0=n3\Delta$ $(n=\overline{-\infty,\infty})$.

Введем новые переменные:

$f^{(0)}(t_0)=(f(t_0-\tau)+f(t_0)+f(t_0+\tau))/3$ – среднее арифметическое;

$f^{(1)}(t_0)=(f(t_0+\tau)-f(t_0-\tau))/2\tau$ – первую конечную разность;

$f^{(2)}(t_0)=(f(t_0-\tau)-2f(t_0)+f(t_0+\tau))/\tau^2$ – вторую конечную разность.

Поступая аналогично рассуждениям, использованным при выводе весовых функций (8) и (9), получим соотношения для весовых функций новых переменных:

$$w_{2(0)}(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0)\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0-\tau)}{t(t-t_0-\tau)}\,\frac{\tau^2}{\sin^2\frac{\pi}{3\Delta}\tau}+$$

$$+\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0)\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0-\tau)}{(t-t_0-\tau)}\,\frac{2\left(1-\cos\frac{\pi}{3\Delta}\tau\right)(t-t_0)}{\sin\frac{\pi}{3\Delta}\tau\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}2\tau}; \qquad (13)$$

$$w_{2(1)}(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0)\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0-\tau)}{(t-t_0-\tau)}\,\frac{2\tau^2}{\sin\frac{\pi}{3\Delta}\tau\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}2\tau};$$

$$w_{2(2)}(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0+\tau)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0)\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-t_0-\tau)}{t(t-t_0-\tau)}\,\frac{(t-t_0)\tau^2\left(1+2\cos\frac{\pi}{3\Delta}\tau\right)}{3\sin\frac{\pi}{3\Delta}\tau\cdot\sin\frac{\pi}{3\Delta}2\tau}.$$

Поскольку

$$P_{20}(t-n3\Delta)=1+\left(\frac{\pi}{3\Delta}\right)^2\frac{(t-n3\Delta)^2}{2!},\ P_{21}=1,\ P_{22}=1,$$

то из выражений для весовых функций (13) следует, что при сближении отсчетов, т. е. при $\tau\to 0$, справедлива формула

$$f^{(0)}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(f^{(0)}(n3\Delta)\left[\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-n3\Delta)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-n3\Delta)}\right]^3\left(1+\left(\frac{\pi}{3\Delta}\right)^2\frac{(t-n3\Delta)^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(1)}(n3\Delta)}{1!}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-n3\Delta)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-n3\Delta)}\right]^3(t-n3\Delta)+\frac{f^{(2)}(n3\Delta)}{2!}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{3\Delta}(t-n3\Delta)}{\frac{\pi}{3\Delta}(t-n3\Delta)}\right]^3(t-n3\Delta)^2\right).$$

Отметим, что соотношения для весовых функций (13) представляют определенный самостоятельный интерес, так как справедливы при отличном от нуля расстоянии τ между отсчетами.

Дисперсия реконструкции сигнала в соответствии с (4) и (5) для рассматриваемого случая ($\tau=0$)

$$\langle\varepsilon^2(\omega)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega S_f(\omega)\left(1-2\widetilde{w}_{2(0)}(\omega)-2\widetilde{w}_{2(1)}(\omega)\omega-2\widetilde{w}_{2(2)}(\omega)\omega^2+\right.$$

$$+\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{w}_{2(0)}^2\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)+\omega^2\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{w}_{2(1)}^2\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)+\omega^4\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{w}_{2(2)}^2\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)+$$

$$+2\omega\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{w}_{2(0)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)\widetilde{w}_{2(1)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)+2\omega^2\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{w}_{2(0)}^2\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)\widetilde{w}_{2(2)}^2\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)+$$

$$+2\omega^3\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{w}_{2(1)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)\widetilde{w}_{2(2)}\left(\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}k\right)\Bigg). \qquad (14)$$

В (14) весовые функции при отсчетах сигнала и его второй производной – четные функции, при отсчетах первой производной – нечетная.

Преобразование Фурье от отсчетных функций имеет следующий вид:

$$\widetilde{w}_{2(0)}(\omega)=\frac{1}{4}\left\{1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-|\omega|\right]\left(4-\left(\frac{\omega 3\Delta}{\pi}\right)^2\right)-\frac{1}{2}\cdot 1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-\left|\omega+\frac{2\pi}{3\Delta}\right|\right]\left(1-\left(\frac{\omega 3\Delta}{\pi}+3\right)^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot 1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-\left|\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}\right|\right]\left(1-\left(\frac{\omega 3\Delta}{\pi}-3\right)^2\right)\right\};$$

$$\widetilde{w}_{2(1)}(\omega)=\frac{3\Delta}{\pi}\left\{1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-|\omega|\right]\frac{\omega 3\Delta}{\pi}-\frac{1}{2}\cdot 1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-\left|\omega+\frac{2\pi}{3\Delta}\right|\right]\left(\frac{\omega 3\Delta}{\pi}+3\right)-\right. \qquad (15)$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot 1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-\left|\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}\right|\right]\left(\frac{\omega 3\Delta}{\pi}-3\right)\right\};$$

$$\widetilde{w}_{2(2)}(\omega)=\left(\frac{3\Delta}{\pi}\right)^2\frac{1}{2}\left\{-1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-|\omega|\right]+\frac{1}{2}\cdot 1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-\left|\omega+\frac{2\pi}{3\Delta}\right|\right]+\frac{1}{2}\cdot 1\left[\frac{\pi}{3\Delta}-\left|\omega-\frac{2\pi}{3\Delta}\right|\right]\right\}.$$

Вычисления с учетом (14) и (15) дают следующий результат для дисперсии как функции частоты и средней по частоте дисперсии ошибки реконструкции сигнала по его равномерным отсчетам и равномерным отсчетам в те же моменты времени первой и второй производных:

$$\varepsilon^2(\omega)=2\cdot 1\left[|\omega|-\frac{\pi}{\Delta}\right]+\frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k^2(k^2-1)1\left[\left(\frac{3\Delta}{2\pi}|\omega|-\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{3\Delta}{2\pi}|\omega|\right)\right];$$

(16)

$$\langle\varepsilon^2\rangle=4\int_{\pi/\Delta}^{\infty}d\omega S_f(\omega)+\sum_{k=2}^{\infty}3k^2(k^2-1)\int_{k(2\pi/3\Delta)-(\pi/3\Delta)}^{k(2\pi/3\Delta)+(\pi/3\Delta)}d\omega S_f(\omega).$$

Из этой формулы следует, что дисперсия ошибки реконструкции при восстановлении сигнала по значениям сигнала, первой и второй производных в 10 раз больше, чем в (6).

Оптимальная фильтрация. Соотношение (5) для дисперсии ошибки можно преобразовать к виду

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\left[S_f(\omega)\left(1-2\sum_{k=0}^{m}\omega^k\widetilde{w}_{m(k)}(\omega)\right)+\right.$$

Если предположить далее, что спектральная плотность сигнала $S_f(\omega)$ априори известна, то величину (17) можно минимизировать, надлежащим образом строя функции $\tilde{w}_{m(k)}(\omega)$. При этом

$$\tilde{w}^0_{m(k)}(\omega) = A_k(\omega)/A(\omega),$$

где $A(\omega)$ – определитель матрицы $(m+1)\times(m+1)$, элемент которого

$$a_{ij}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\omega - \frac{2\pi}{(m+1)\Delta}n\right)^{i+j} S_f\left(\omega - \frac{2\pi}{(m+1)\Delta}n\right)$$

(i– строка, j– столбец). Определитель $A_k(\omega)$ отличается от определителя $A(\omega)$ заменой k-го столбца столбцом φ, элементы которого $\varphi_i = \omega^i S_f(\omega)$ $(i=\overline{0,m})$.

При этом минимальная дисперсия ошибки

$$\langle\varepsilon^2\rangle_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega)\left[1 - \frac{\sum_{k=0}^{m}\omega^k A_k(\omega)}{A(\omega)}\right].$$

Соотношение для дисперсии ошибки можно преобразовать с учетом выражения

$$1 - \frac{\sum_{k=0}^{m}\omega^k A_k(\omega)}{A(\omega)} = \frac{B^*(\omega)}{B(\omega)},$$

где $B(\omega)$ – определитель, в котором элемент

$$b_{ij}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{2\pi}{(m+1)\Delta}n\right)^{i+j} S_f\left(\omega - \frac{2\pi}{(m+1)\Delta}n\right),$$

а определитель $B^*(\omega)$ отличается от определителя $B(\omega)$ только тем, что его элемент

$$b_{00}(\omega) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{n=\infty} S_f\left(\omega - \frac{2\pi}{(m+1)\Delta}n\right)$$

не содержит слагаемое при индексе суммирования n, равном нулю.

Для случая $m=0$ дисперсия ошибки имеет вид

$$\langle\varepsilon^2\rangle_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega)\left[1-\frac{S_f(\omega)}{\sum_{-\infty}^{\infty} S_f\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta}n\right)}\right]. \qquad (18)$$

Учитывая периодичность суммы в знаменателе и четность спектральной плотности $S_f(\omega)$, эта формула преобразуется к следующему виду:

$$\langle\varepsilon^2\rangle_0 = 4\int_{\pi/\Delta}^{\infty} d\omega S_f(\omega) - 4\int_{\pi/\Delta}^{\infty} d\omega \frac{S_f^2(\omega)}{\sum_{-\infty}^{\infty} S_f\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta}n\right)}. \qquad (19)$$

Таким образом при оптимальной фильтрации для рассматриваемого случая ($m=0$) дисперсия ошибки уменьшается по сравнению с (6) на величину второго слагаемого (19). При оптимальной фильтрации дисперсия ошибки (6) не может быть уменьшена более чем в 2 раза, что соответствует применению к сигналу аналогового предфильтра нижних частот с частотой среза π/Δ. Примером функции $S_f(\omega)$, при которой дисперсия ошибки реконструкции сигнала уменьшается ровно в 2 раза по сравнению с (6), является плотность

$$S_f(\omega)=\frac{\Delta}{2\pi}1\left[\frac{\pi}{\Delta}-\varepsilon-|\omega|\right]+\frac{\Delta}{4\pi}1\left[\left(|\omega|-\left(\frac{\pi}{\Delta}-\varepsilon\right)\right)\left(\frac{\pi}{\Delta}+\varepsilon-|\omega|\right)\right].$$

Для спектральной плотности

$$S_f(\omega)=\sigma_f^2\,\frac{\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)} \qquad (20)$$

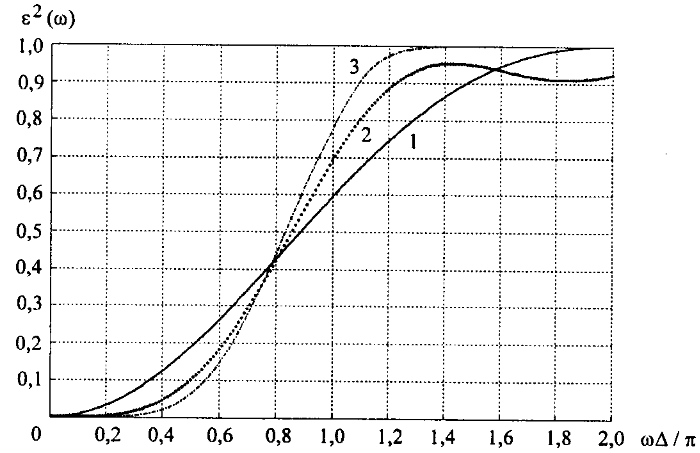
выигрыш в дисперсии приведен в [3], а также на рисунке (кривая 1).

Для случая $m=1$ (отсчеты сигнала и производной) частотная дисперсия ошибки преобразуется к следующему виду:

$$\varepsilon^2(\omega)=\frac{\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} S_f\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}n\right)\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n^2 S_f\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}n\right)-\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n S_f\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}n\right)\right)^2}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} S_f\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}n\right)\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n^2 S_f\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}n\right)-\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n S_f\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}n\right)\right)^2}.$$

График этой функции представлен на рисунке (кривая 2) для однократно дифференцируемого сигнала со спектральной плотностью

$$S_f(\omega)=\sigma_f^2\,\frac{2\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}. \qquad (21)$$



Для случая $m=2$ (отсчеты сигнала, первой и второй производных) график функции $\varepsilon^2(\omega)$ представлен на рисунке (кривая 3) при спектральной плотности сигнала

$$S_f(\omega)=\sigma_f^2\,\frac{8\alpha^5}{3\pi(\omega^2+\alpha^2)^3}. \tag{22}$$

Из характера поведения и численных значений этих зависимостей следует, что при $|\omega|>\pi/\Delta$ величина дисперсии ошибки примерно равна половине дисперсии, определяемой соотношением (6). Общая дисперсия ошибки в соответствии с расчетами незначительно отличается от значений, определяемых соотношениями (11) и (16), несмотря на отличие функции $\varepsilon^2(\omega)$ (см. рисунок) и соотношений (10) и (16).

Заключение. Исследования показали, что при одном и том же числе данных в единицу времени для сигналов с неограниченной спектральной плотностью реконструкция сигнала только по его отсчетам оказывается существенно предпочтительнее реконструкции с дополнительным использованием отсчетов его производных. Предпочтение резко возрастает с увеличением числа привлекаемых для реконструкции сигнала производных. При оптимальной интерполяции выигрыш оказывается несущественным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
2. **Yen J. L.** On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals // Trans. IRE. 1956. **CT-3**, N 4. P. 251.
3. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В.** Сравнительная оценка характеристик полиномиальных интерполяторов при равномерной дискретизации сигнала // Автометрия. 2001. № 6. С. 24.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
20 апреля 2004 г.