

Л. Л. Досколович, Н. Л. Казанский  
(Самара)

**РАСЧЕТ ЗЕРКАЛА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ  
ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИАГРАММЫ  
НАПРАВЛЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ\***

Рассмотрена задача расчета зеркала для формирования диаграммы направленности, представленной векторной функцией одного аргумента. Получено общее представление поверхности зеркала в виде огибающей семейства параболоидов вращения. Каждый параболоид в семействе преобразует сферический пучок от точечного источника в пучок с плоским волновым фронтом заданного направления. Установлен тип соответствия между лучами от источника и лучами диаграммы направленности. Рассчитано зеркало для преобразования сферического пучка в цилиндрический. Рассмотрена модификация метода для случая фокусировки излучения в линию.

**Введение.** Задача формирования заданных диаграмм направленности (ДН) является актуальной для лазерной оптики, радиофизики и светотехники. Для формирования заданной ДН рассчитывается поверхность зеркала из условия, что отраженные лучи имеют заданные направления. Описание ДН в терминах лучей предполагает расчет зеркала в приближении геометрической оптики.

Методы решения задач данного класса в приближении геометрической оптики разработаны для дифракционных оптических элементов [1–8]. В этом случае задача ставится как задача расчета эйконала светового поля на некоторой поверхности (обычно на плоскости) из условия заданных направлений распространения лучей. Восстановление формы поверхности рельефа дифракционного элемента по функции эйконала предполагает использование приближенных соотношений типа приближения тонкого оптического элемента [9], что позволяет рассчитывать оптические элементы только для формирования осевых ДН с малым угловым размером  $5-10^\circ$ .

Ряд методов расчета зеркал разработан для светотехнических устройств [10–13]. Методы светотехники позволяют учесть конечные размеры источника света, однако аналитические решения известны только для задач с цилиндрической или радиальной симметрией.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-96517), гранта президента Российской Федерации МД-210.2003.01 и программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE).

Наиболее близкой к решаемым в предлагаемой работе задачам является задача расчета зеркала для фокусировки излучения точечного источника в заданную линию из [14]. Тем не менее в ней не рассмотрена задача формирования ДН.

В данной работе рассматривается задача расчета зеркал для формирования диаграмм направленности, которые определяются единичной векторной функцией одного аргумента

$$\mathbf{p}(\sigma) = (p_x(\sigma), p_y(\sigma), p_z(\sigma)), \quad |\mathbf{p}(\sigma)| = 1, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – некоторый параметр. ДН вида (1) будем называть однопараметрической или ДН в виде линии.

**Расчет поверхности зеркала.** Рассмотрим задачу расчета поверхности зеркала для сферического освещающего пучка. Сферический пучок соответствует случаю формирования заданной ДН при точечном источнике. Без ограничения общности точечный источник будем считать расположенным в начале координат. Рассмотрим предварительно расчет поверхности зеркала, преобразующего сферический пучок в пучок с плоским волновым фронтом и направлением  $\mathbf{p}(\sigma)$ . Параллельный пучок с направлением  $\mathbf{p}(\sigma)$  формируется параболоидом вращения с фокусом в начале координат (в точке расположения точечного источника) и направлением оси  $\mathbf{p}(\sigma)$ . Уравнение параболоида имеет вид

$$\mathbf{S}(u, v; \sigma) = \mathbf{e}(u, v) l(u, v; \sigma) = \mathbf{e}(u, v) \frac{2f(\sigma)}{1 - (\mathbf{e}(u, v), \mathbf{p}(\sigma))}, \quad (2)$$

где  $(u, v)$  – некоторые криволинейные координаты;  $\mathbf{e}(u, v)$  – единичный вектор направления луча;  $l(u, v; \sigma)$  – расстояние от точечного источника до точки параболоида;  $f(\sigma)$  – фокусное расстояние параболоида.

Поверхность зеркала для формирования заданной ДН (1) предлагается определить в виде огибающей  $\mathbf{E}(u; \sigma)$  семейства поверхностей (2) по параметру  $\sigma$ . По определению огибающая поверхность касается каждой из поверхностей семейства (2) вдоль некоторой кривой. Поскольку направления нормалей огибающей поверхности и поверхностей  $\mathbf{S}(u, v; \sigma)$  вдоль кривых касания совпадают, то отраженные лучи будут иметь заданные направления (1). Таким образом, расчет поверхности зеркала для формирования ДН (1) сводится к построению огибающей для семейства поверхностей, определенных в параметрическом виде (2). Уравнение огибающей поверхности определяется уравнением (2) и условием равенства нулю смешанного произведения векторов:

$$(\mathbf{S}_u \mathbf{S}_v \mathbf{S}_\sigma) = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{S}_u = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}$ ,  $\mathbf{S}_v = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}$ ,  $\mathbf{S}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma}$  в [15]. Подставляя (2) в (3), получим

$$(\mathbf{e}_u(u, v), \mathbf{e}_v(u, v), \mathbf{e}(u, v)) l(u, v; \sigma) \frac{\partial l(u, v; \sigma)}{\partial \sigma} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{e}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{e}(u, v)}{\partial u}$ ,  $\mathbf{e}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{e}(u, v)}{\partial v}$ . Так как первые два множителя в

(4) не обращаются в нуль, то уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial l(u, v; \sigma)}{\partial \sigma} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) позволяет записать уравнение огибающей поверхности в виде

$$\begin{cases} \mathbf{S}(u, v; \sigma) = \mathbf{e}(u, v) \frac{2f(\sigma)}{1 - (\mathbf{e}(u, v), \mathbf{p}(\sigma))}; \\ \left( \mathbf{e}(u, v), \frac{\mathbf{v}(\sigma)}{|\mathbf{v}(\sigma)|} \right) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma} / |\mathbf{v}(\sigma)|, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\mathbf{v}(\sigma) = \left( \mathbf{p}(\sigma) \frac{df(\sigma)}{d\sigma} - \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma} f(\sigma) \right). \quad (7)$$

Поскольку  $\frac{df(\sigma)}{d\sigma} / |\mathbf{v}(\sigma)| \leq 1$ , то второе уравнение в (6) является уравнением кругового конуса с вершиной в начале координат. При фиксированном  $\sigma$  уравнения (6) определяют кривую  $\mathbf{L}(u; \sigma)$ , которая соответствует пересечению параболоида (2) с конусом

$$(\mathbf{e}(u, v), \mathbf{a}(\sigma)) = \alpha(\sigma), \quad (8)$$

где

$$\mathbf{a}(\sigma) = \frac{\mathbf{v}(\sigma)}{|\mathbf{v}(\sigma)|}, \quad \alpha(\sigma) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma} / |\mathbf{v}(\sigma)| \quad (9)$$

– единичный вектор оси и косинус угла при вершине конуса соответственно. Это позволяет рассматривать поверхность зеркала (6) как семейство кривых  $\mathbf{L}(u; \sigma)$  по параметру  $\sigma$ , на каждой из которых отраженные лучи имеют направление  $\mathbf{p}(\sigma)$ . При этом лучи от точечного источника, отраженные по направлению  $\mathbf{p}(\sigma)$ , лежат на поверхности конуса (8), (9).

Отраженные от кривой  $\mathbf{L}(u; \sigma)$  лучи находятся в одной и той же плоскости. Для установления этого факта запишем уравнение огибающей поверхности в декартовых координатах. Неявное уравнение параболоида имеет вид

$$|\mathbf{M}| - (\mathbf{p}(\sigma), \mathbf{M}) = 2f(\sigma), \quad (10)$$

где  $\mathbf{M} = (x, y, z)$  – радиус-вектор точки поверхности параболоида. В декартовых координатах уравнение огибающей поверхности имеет вид [15]:

$$\begin{cases} |\mathbf{M}| - (\mathbf{p}(\sigma), \mathbf{M}) = 2f(\sigma); \\ \left( \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}, \mathbf{M} \right) = -2 \frac{df(\sigma)}{d\sigma}. \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения (11) показывают, что поверхность зеркала состоит из кривых, которые соответствуют пересечениям параболоидов с плоскостями

$$\left( \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}, \mathbf{M} \right) = -2 \frac{df(\sigma)}{d\sigma}. \quad (12)$$

Отметим, что ДН (1) можно рассматривать как линию

$$\mathbf{X}(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma), z(\sigma)) = (p_x(\sigma), p_y(\sigma), p_z(\sigma)),$$

расположенную на сфере единичного радиуса. При этом плоскости (12) перпендикулярны касательным к линии (1). Согласно (11) отраженные лучи с направлением  $\mathbf{p}(\sigma)$  находятся в плоскости (12).

Уравнения (6), (11) позволяют представить поверхность зеркала для формирования ДН (1) в виде семейства кривых, являющихся пересечением конусов (8), (9) и плоскостей (12) в виде

$$\begin{cases} (\mathbf{M}/|\mathbf{M}|, \mathbf{a}(\sigma)) = t(\sigma); \\ \left( \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}, \mathbf{M} \right) = -2 \frac{df(\sigma)}{d\sigma}. \end{cases} \quad (13)$$

Уравнения (6), (11), (13) позволяют получить различные параметрические представления для огибающей поверхности. В частности, уравнения (6), (11) представляют огибающую поверхность в виде

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}; \sigma) = \mathbf{e}(\mathbf{u}; \sigma) d(\mathbf{u}; \sigma), \quad (14)$$

где  $\mathbf{e}(\mathbf{u}; \sigma)$  – единичный вектор луча на поверхности конуса (8), (9), а функция  $d(\mathbf{u}; \sigma)$  определяет расстояние по направлению  $\mathbf{e}(\mathbf{u}; \sigma)$  от точечного источника до параболоида (2) или до плоскости (12). Вектор  $\mathbf{e}(\mathbf{u}; \sigma)$  определен в координатах  $(\mathbf{u}; \sigma)$ , где параметр  $\sigma$  определяет конус (8), а параметр  $\mathbf{u}$  выделяет луч на поверхности конуса. Функция  $d(\mathbf{u}; \sigma)$  в (14) имеет вид

$$d(\mathbf{u}; \sigma) = \frac{2f(\sigma)}{1 - (\mathbf{e}(\mathbf{u}; \sigma), \mathbf{p}(\sigma))}, \quad (15)$$

$$d(\mathbf{u}; \sigma) = -2 \frac{df(\sigma)}{d\sigma} / \left( \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}, \mathbf{e}(\mathbf{u}; \sigma) \right) \quad (16)$$

для уравнений (6) и (11) соответственно.

Функция  $f(\sigma)$  в (6), (11), (13) определяет распределение энергии вдоль ДН и может быть рассчитана из условия формирования заданной интенсивности  $I(\sigma)$  на ДН. Пусть поверхность зеркала задана уравнениями (6)–(9), (14), (15). Поясним понятие интенсивности для ДН. Согласно построению зеркала световой поток, направляемый в элемент ДН  $\Delta\mathbf{p}(\sigma)$ , равен световому потоку от точечного источника  $\Delta\Phi(\sigma) = F(\sigma, f(\sigma))\Delta\sigma$ , заключенному

между конусами (8) при значениях  $\sigma$  и  $\sigma + \Delta\sigma$ . Функция распределения интенсивности  $I(\sigma)$  понимается как следующий предел:

$$I(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(\sigma)}{\Delta\sigma}. \quad (17)$$

Согласно (14), (15)

$$I(\sigma) = F(\sigma, f(\sigma)) = \int I_0(u; \sigma) \left| \frac{\partial \mathbf{e}(u; \sigma)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{e}(u; \sigma)}{\partial \sigma} \right| du, \quad (18)$$

где  $I_0(u; \sigma)$  – интенсивность точечного источника. При заданной функции  $I(\sigma)$  функция  $f(\sigma)$  находится из уравнения (18). Более конкретный вид функции  $F(\sigma, f(\sigma))$  зависит от выбора параметра  $u$  и параметризации единичного вектора  $\mathbf{e}(u; \sigma)$  в (14).

**Расчет зеркала для формирования цилиндрического пучка.** Проведем расчет зеркала для преобразования сферического пучка от точечного источника в цилиндрический пучок. Поясним задачу формирования цилиндрического пучка. Если точечный источник поместить в фокус зеркала, являющегося эллипсоидом вращения, то зеркало сформирует сходящийся сферический пучок. Рассмотрим эллипс в сечении эллипсоида вращения с фокусами в точках  $\mathbf{F}_1 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{F}_2 = (0, 0, z_0)$ ,  $z_0 > 0$ , плоскостью  $y = 0$ . Полярное уравнение эллипса имеет вид

$$r(\sigma) = \frac{de}{1 - e \cos(\sigma)}, \quad (19)$$

где  $d$  – расстояние от фокуса  $\mathbf{F}_1$  до директрисы;  $e$  – эксцентриситет;  $\sigma$  – угол с осью  $OZ$ . Лучи из фокуса  $\mathbf{F}_1$ , расположенные в плоскости эллипса ( $y = 0$ ), после отражения приходят в фокус  $\mathbf{F}_2$  и имеют направления

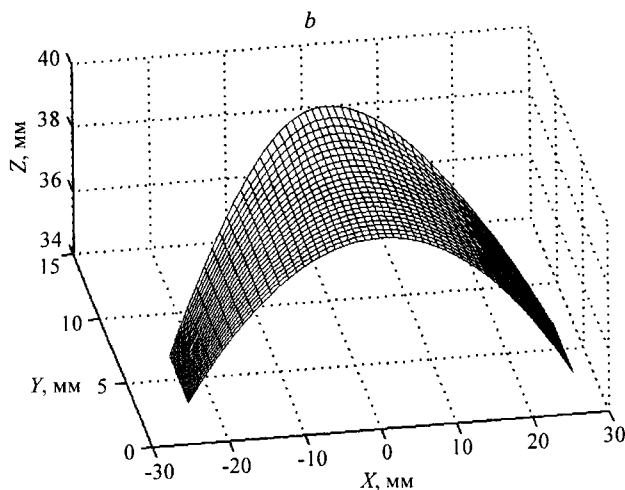
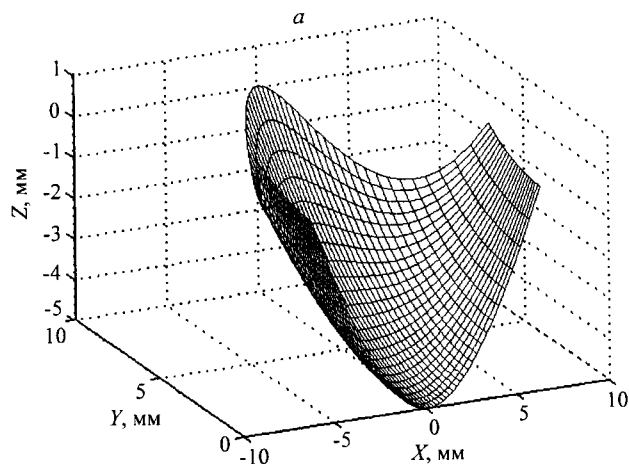
$$\mathbf{p}(\sigma) = (\mathbf{F}_2 - \mathbf{x}(\sigma)) / |\mathbf{F}_2 - \mathbf{x}(\sigma)|, \quad (20)$$

где  $\mathbf{x}(\sigma) = (r(\sigma) \sin(\sigma), 0, r(\sigma) \cos(\sigma))$  – декартовы координаты эллипса (19). Задачу преобразования сферической волны с фокусом  $\mathbf{F}_1$  в цилиндрический пучок будем понимать как задачу расчета трехмерного зеркала  $\mathbf{S}(u; \sigma)$  для формирования ДН (20). При этом ось цилиндрического пучка параллельна оси  $OY$  и проходит через точку  $\mathbf{F}_2$ . Вид ДН (20) предполагает, что сечение зеркала  $\mathbf{S}(u; \sigma)$  плоскостью  $y = 0$  совпадает с эллипсом (19). Уравнения поверхности зеркала  $\mathbf{S}(u; \sigma)$  (6)–(9), (14), (15) определены с точностью до функции  $f(\sigma)$ . Для решения задачи функцию  $f(\sigma)$  достаточно определить из условия, что сечение поверхности  $\mathbf{S}(u; \sigma)$  плоскостью  $y = 0$  имеет вид эллипса (19). Пусть сечение поверхности  $\mathbf{S}(u; \sigma)$  плоскостью  $y = 0$  получается при  $u = 0$ , тогда

$$f(\sigma) = r(\sigma)(1 - p_x(\sigma) \sin(\sigma) - p_z(\sigma) \cos(\sigma))/2. \quad (21)$$

Интересно отметить, что задача формирования цилиндрического пучка эквивалентна задаче фокусировки излучения в отрезок. Отрезок проходит через фокус  $F_2$  и параллелен оси  $OY$ . Размер отрезка совпадает с размером зеркала вдоль оси  $OY$ . Уравнение (19) при  $e > 1$  определяет гиперболу. При  $e > 1$  зеркало (6)–(9), (19), (21) формирует цилиндрическую волну с мнимым источником.

На рисунке, *a* показана поверхность зеркала с эллиптическим сечением (19) при  $y = 0$ , рассчитанная по формулам (6)–(9), (21). В силу симметрии показана половина поверхности при  $y > 0$ . Второй фокус эллипса (19) расположен при  $z = 30$  мм. Таким образом, зеркало преобразует сферическую волну от точечного источника, расположенного в начале координат, в сходящийся цилиндрический пучок с осью при  $z = 30$  мм. На рисунке, *b* показан рассчитанный волновой фронт при значении эйконала  $\Psi = 50$  мм, полностью соответствующий цилиндрической поверхности, что подтверждает правильность приведенных формул.



**Модификации метода.** Метод, основанный на представлении поверхности зеркала в виде огибающей, допускает ряд обобщений, в частности позволяет решать задачу расчета зеркала для фокусировки в заданную линию

$$\mathbf{X}(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma), z(\sigma)), \quad \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]. \quad (22)$$

В этом случае поверхность зеркала является огибающей семейства эллипсоидов вращения

$$\mathbf{S}(u, v; \sigma) = \mathbf{e}(u, v) l(u, v; \sigma) = \mathbf{e}(u, v) \frac{g(\sigma)}{1 - \varepsilon(\sigma)(\mathbf{e}(u, v), \mathbf{q}(\sigma))}, \quad (23)$$

где  $g(\sigma) = (\Psi^2(\sigma) - \mathbf{X}^2(\sigma))/2\Psi(\sigma)$  – фокальный параметр эллипсоида;  $\Psi(\sigma)$  – длина большой полуоси (эйконал);  $\varepsilon(\sigma)$  – эксцентриситет;  $\mathbf{q}(\sigma) = \mathbf{X}(\sigma)/|\mathbf{X}(\sigma)|$  – единичный вектор направления на точку кривой (22). Первый фокус эллипсоида (23) совпадает с точечным источником, а второй – с точкой кривой  $\mathbf{X}(\sigma)$ . Огибающая поверхность определяется уравнением (23) и уравнением

$$\frac{\partial l(u, v; \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{g(\sigma)}{1 - \varepsilon(\sigma)(\mathbf{e}(u, v), \mathbf{q}(\sigma))} \right) = 0. \quad (24)$$

Несложно показать, что в задаче формирования ДН уравнение (24) является уравнением кругового конуса с вершиной в начале координат.

Метод также применим к расчету преломляющих поверхностей. Например, преломляющая поверхность для формирования ДН (1) определяется в виде огибающей семейства линз для преобразования падающего пучка в пучок заданного направления.

**Заключение.** Получено общее представление поверхности зеркала для формирования однопараметрической ДН в виде огибающей семейства параболоидов вращения. Установлен тип соответствия между лучами от источников и лучами ДН. Показано, что лучи, имеющие после отражения фиксированное направление, лежат на поверхности кругового конуса. Отраженные лучи с фиксированным направлением находятся в плоскости, перпендикулярной диаграмме направленности. Продемонстрирована возможность расчета гладких компактных зеркал. Приведена модификация метода расчета зеркала на случай фокусировки излучения в линию.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bryngdahl O. Geometrical transformations in optics // JOSA. 1974. 64, N 8. P. 1092.
2. Брингдал О. Оптические преобразования // Автометрия. 1983. № 2. С. 30.
3. Гончарский А. В., Данилов В. А., Попов В. В. и др. Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую // ДАН СССР. 1983. 273, № 3. С. 605.
4. Гончарский А. В., Данилов В. А., Попов В. В. и др. Плоские фокусирующие элементы видимого диапазона // Квантовая электроника. 1986. 13, № 3. С. 660.

5. **Гончарский А. В., Степанов В. В.** Обратные задачи когерентной оптики. Фокусировка в линию // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. **26**, № 1. С. 80.
6. **Гончарский А. В., Попов В. В., Степанов В. В.** Введение в компьютерную оптику. М.: Изд-во МГУ, 1991.
7. **Soifer V., Kotlyar V., Doskolovich L.** Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation. London: Taylor&Francis Ltd., 1997.
8. **Сойфер В. А., Волков А. В., Досколович Л. Л. и др.** Методы компьютерной оптики. М.: Физматлит, 2003.
9. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. Oxford: Pergamon Press, 1968.
10. **Elmer W. B.** The Optical Design of Reflectors. N. Y.: Willey, 1985.
11. **Feuermann D., Gordon J. M., Ries H.** Nonimaging optical designs for maximum power density remote irradiation // Appl. Opt. 1998. **37**. P. 1835.
12. **Feuermann D., Gordon J. M.** Optical performance of axisymmetric edge-ray concentrators and illuminators // Ibid. P. 1905.
13. **Gordon J. M., Rabl A.** Reflectors for uniform far-field irradiance: fundamental limits and example of an axisymmetric solution // Ibid. P. 44.
14. **Данилов В. А., Кинбер Б. Е., Шилов А. В.** Теория когерентных фокусаторов // Компьютерная оптика. 1989. **1**. С. 29.
15. **Математическая энциклопедия.** М.: Изд-во «Сов. энцикл.», 1982. Т. 3.

*Институт систем обработки изображений РАН,  
E-mail: kazansky@smr.ru*

*Поступила в редакцию  
1 июля 2004 г.*