

А. П. Трифонов, К. А. Зимовец

(Воронеж)

**СОВМЕСТНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ
НЕОДНОРОДНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ
И ОЦЕНКА ЕГО ПЛОЩАДИ НА ФОНЕ ШУМА***

Рассмотрен максимально правдоподобный алгоритм совместного обнаружения неоднородного изображения и оценивания его площади при наличии пространственного шума. Найдены точные характеристики эффективности алгоритма. Полученные результаты конкретизированы для изображения в форме эллипса с линейно изменяющейся интенсивностью.

В последние годы активно развиваются методы дистанционного наблюдения, учитывающие пространственную протяженность реальных объектов, что объясняется существенно возросшей разрешающей способностью систем дистанционного наблюдения. Вопросы обработки изображений пространственно протяженных объектов рассматривались в [1–4] и других работах. При этом, как правило, предполагалось, что изображения пространственно протяженных объектов однородны, т. е. их интенсивность постоянна [3, 4], хотя может быть и неизвестна [4]. В реальных условиях, вследствие свойств пространственно протяженного объекта или в силу неоднородностей среды распространения, интенсивность изображения обычно является функцией координат, так что изображение оказывается неоднородным. В связи с этим представляет интерес задача обработки неоднородного изображения с неизвестной площадью. В работе [5] рассмотрено обнаружение неоднородного изображения с неизвестной площадью на фоне шума. Однако часто при обработке изображения необходимо не только установить факт наличия изображения (обнаружение), но и дать оценку значения его неизвестной площади. Для этого требуется совместно вынести два решения: о наличии или отсутствии изображения и оценке его площади [6]. В предлагаемой работе выполнены синтез и анализ максимально правдоподобного алгоритма совместного обнаружения неоднородного изображения и оценивания его площади.

Положим, что в области G обработке доступна реализация случайного поля

$$\xi(x, y) = \gamma_0 s(x, y; \chi_0) + n(x, y). \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке CRDF и Министерства образования РФ (проект VZ-010-0).

Здесь

$$s(x, y; \chi_0) = F(x, y)I(x, y; \chi_0) \quad (2)$$

– полезное изображение с интенсивностью $F(x, y)$, которое занимает область площадью χ_0 . Форма области $\Omega(\chi)$ площадью χ , занимаемой изображением, описывается индикатором $I(x, y; \chi) = 1$ при $x, y \in \Omega$ и $I(x, y; \chi) = 0$ при $x, y \notin \Omega$. В (1) $n(x, y)$ – гауссовский пространственный белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 , а неизвестная площадь изображения χ_0 принимает значения из априорного интервала $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Неизвестный параметр γ_0 отражает возможность пропадания полезного изображения, причем $\gamma_0 = 0$ с вероятностью p_0 и $\gamma_0 = 1$ с вероятностью $p_1 = 1 - p_0$. Площадь изображения будем считать случайной величиной, заданной на интервале $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ и обладающей априорной плотностью вероятности $W_{1pr}(\chi)$ при $\gamma_0 = 1$ и $W_{0pr}(\chi)$ при $\gamma_0 = 0$. Располагая реализацией $\xi(x, y)$, необходимо вынести решение о наличии или отсутствии изображения (2) в принятой реализации (1) и сформировать оценку площади изображения.

Задачу совместного обнаружения изображения (2) и оценивания его площади согласно [6] можно рассматривать как задачу оценивания вектора неизвестных параметров

$$\theta = \{\chi, \gamma\}. \quad (3)$$

В соответствии с методом максимального правдоподобия (МП) оценка векторного параметра (3)

$$\{\hat{\chi}, \hat{\gamma}\} = \operatorname{argsup} L(\chi, \gamma) \quad (4)$$

представляет собой положение абсолютного (наибольшего) максимума логарифма функционала отношения правдоподобия [7]:

$$L(\chi, \gamma) = \frac{2\gamma}{N_0} \iint_G \xi(x, y) s(x, y; \chi) dx dy - \frac{\gamma^2}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy. \quad (5)$$

Отсутствующее изображение при этом интерпретируется как изображение с нулевой площадью, так что $W_{0pr}(\chi) = \delta(\chi)$. Согласно (4), (5) МП-алгоритм обработки изображения (2) заключается в совместном применении двух решающих правил:

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & L(\tilde{\chi}) \geq h; \\ 0, & L(\tilde{\chi}) < h, \end{cases} \quad (6)$$

$$\hat{\chi} = \begin{cases} \tilde{\chi}, & L(\tilde{\chi}) \geq h; \\ 0, & L(\tilde{\chi}) < h, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\tilde{\chi} = \operatorname{argsup} L(\chi), \quad L(\chi) \equiv L(\chi, \gamma = 1). \quad (8)$$

Поскольку $L(\chi, \gamma = 0) = 0$, то для МП-алгоритма следует выбрать порог $h = 0$. Вместо нулевого порога в (6), (7) можно также использовать порог h , выбранный из какого-либо критерия оптимальности. Алгоритм (7) с таким порогом назовем оптимизированным алгоритмом МП. При $h = -\infty$ алгоритм (7) совпадает с МП-алгоритмом оценки площади изображения, присутствующего в принятой реализации с вероятностью 1.

Эффективность МП-алгоритма обнаружения (6) характеризуем вероятностями ошибок первого и второго рода, а эффективность МП-алгоритма оценки (7) – безусловными смещением и рассеянием оценки. Для нахождения характеристик совместного алгоритма обнаружения (6) изображения (2) и оценивания (7) его площади, аналогично [5], исследуем статистические характеристики случайной функции (5).

Подставляя (1) в (5), перепишем функцию $L(\chi)$ (8) в виде

$$L(\chi) = \gamma_0 S(\chi_0, \chi) - Q(\chi)/2 + N(\chi). \quad (9)$$

Здесь

$$N(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G n(x, y) s(x, y; \chi) dx dy \quad (10)$$

– шумовая функция,

$$S(\chi_0, \chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s(x, y; \chi_0) s(x, y; \chi) dx dy \quad (11)$$

– сигнальная функция, а

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy \quad (12)$$

– отношение сигнал/шум для изображения площадью χ . Шумовая функция $N(\chi)$ (10) является центрированным гауссовским случайным процессом, обладающим корреляционной функцией

$$\langle N(\chi_1) N(\chi_2) \rangle = \frac{2}{N_0} \iint_G s(x, y; \chi_1) s(x, y; \chi_2) dx dy = S(\chi_1, \chi_2). \quad (13)$$

Обозначим $\Omega_{\min}(\chi_1, \chi_2)$ одну из областей $\Omega(\chi_1)$ и $\Omega(\chi_2)$, обладающую меньшей площадью. Подставляя далее (2) в (11), (12), имеем

$$S(\chi_0, \chi) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega_{\min}(\chi_0, \chi)} F^2(x, y) dx dy, \quad (14)$$

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega(\chi)} F^2(x, y) dx dy. \quad (15)$$

Согласно (15) отношение сигнал/шум всегда является монотонной неубывающей функцией площади χ . Положим, что функция $F(x, y)$, описывающая распределение интенсивности полезного изображения, может обращаться в нуль только на части области $\Omega(\chi)$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\chi)$ (15) является монотонно возрастающей функцией площади изображения χ и (13) можно переписать как

$$S(\chi_1, \chi_2) = \min[Q(\chi_1), Q(\chi_2)]. \quad (16)$$

Перейдем в (9) к новой переменной

$$\lambda = Q(\chi), \quad (17)$$

причем $\lambda \in [\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]$, где $\Lambda_{\min} = Q(\chi_{\min})$, $\Lambda_{\max} = Q(\chi_{\max})$. Учитывая (13)–(16), можем представить (9) в виде

$$L(\chi) = L[\chi(\lambda)] = \mu(\lambda) = \gamma_0 \min(\lambda, \lambda_0) - \lambda/2 + v(\lambda), \quad (18)$$

где $\lambda_0 = Q(\chi_0)$, $v(\lambda) = N[\chi(\lambda)]$, а $\chi(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\chi) = \lambda$. Из (13), (16) следует, что центрированный гауссовский случайный процесс $v(\lambda)$ обладает корреляционной функцией

$$\langle v(\lambda_1)v(\lambda_2) \rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2). \quad (19)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную оценку

$$\tilde{\lambda} = \arg \sup \mu(\lambda), \quad \lambda \in [\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]. \quad (20)$$

Поскольку исследуемая оценка $\tilde{\chi}$ (8) однозначно выражается через вспомогательную оценку $\tilde{\lambda}$ (20):

$$\tilde{\lambda} = Q(\tilde{\chi}), \quad (21)$$

то, определив распределение вероятностей оценки (20), можно затем найти распределение вероятностей оценок (8) и (7).

Чтобы найти характеристики алгоритмов (6) и (7), введем в рассмотрение вспомогательную функцию [6]:

$$F(u, v, \Lambda | \gamma_0) = P \left(\sup_{\Lambda_{\min} \leq \lambda < \Lambda} \mu(\lambda) < u, \sup_{\Lambda \leq \lambda \leq \Lambda_{\max}} \mu(\lambda) < v \mid \gamma_0 \right). \quad (22)$$

Согласно (18), (19) гауссовский случайный процесс $\mu(\lambda)$ является марковским [8] и обладает коэффициентами сноса и диффузии соответственно:

$$K_1 = \begin{cases} \gamma_0 - 1/2, & \lambda < \lambda_0; \\ -1/2, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad K_2 = 1. \quad (23)$$

Воспользовавшись марковскими свойствами функции $\mu(\lambda)$ (18), вспомогательную функцию (22) можно записать как [8]:

$$F(u, v, \Lambda | \gamma_0) = \int_{-\infty}^v W(x, \Lambda_{\max}) dx. \quad (24)$$

Здесь $W(x, \Lambda_{\max}) = W(x, \lambda = \Lambda_{\max})$, а $W(x, \lambda)$ – решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова [8]:

$$\frac{\partial W(x, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial x} [K_1 W(x, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2 W(x, \lambda)] = 0 \quad (25)$$

с коэффициентами (23) при начальном условии

$$W(x, \Lambda_{\min}) = \exp\{-[x - (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min}]^2 / 2\Lambda_{\min}\} / \sqrt{2\pi\Lambda_{\min}}$$

и граничных условиях $W(x, \lambda)|_{x=u} = 0$ при $\lambda \in [\Lambda_{\min}, \Lambda)$, $W(x, \lambda)|_{x=v} = 0$ при $\lambda \in [\Lambda, \Lambda_{\max}]$, $W(x, \lambda)|_{x=-\infty} = 0$.

Применяя метод отражения с переменной знака [8], находим решение уравнения (25). Подставляя это решение в (24), для вспомогательной функции (22) можем записать

$$\begin{aligned} F(u, v, \Lambda | \gamma_0) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi(\lambda_0 - \Lambda)(\Lambda - \Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}} \times \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\exp\left\{-\frac{[x_3 - x_2 + (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda)]^2}{2(\lambda_0 - \Lambda)}\right\} \left[1 - \exp\left[-\frac{2x_2x_3}{(\lambda_0 - \Lambda)}\right]\right] \right) \times \\ &\times \left\{ \Phi\left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 + x_3}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}}\right] - \exp(-x_3) \Phi\left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 - x_3}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}}\right] \right\} \times \\ &\times \left(\exp\left\{-\frac{[x_1 - u + v - x_2 - (\gamma_0 - 1/2)(\Lambda - \Lambda_{\min})]^2}{2(\Lambda - \Lambda_{\min})}\right\} - \exp[2(\gamma_0 - 1/2)x_1] \right) \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{[x_1 + u - v + x_2 + (\gamma_0 - 1/2)(\Lambda - \Lambda_{\min})]^2}{2(\Lambda - \Lambda_{\min})}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{[u - x_1 - (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min}]^2}{2\Lambda_{\min}}\right\} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (26)$$

при $\Lambda \leq \lambda_0$ и

$$F(u, v, \Lambda | \gamma_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi(\Lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - \Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \Phi \left[\frac{(\Lambda_{\max} - \Lambda)/2 + x_3}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \Lambda}} \right] - \exp(-x_3) \Phi \left[\frac{(\Lambda_{\max} - \Lambda)/2 - x_3}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \Lambda}} \right] \right\} \times \\
& \quad \times \left(\exp \left\{ -\frac{[x_2 - u + v - x_3 + (\Lambda - \lambda_0)/2]^2}{2(\Lambda - \lambda_0)} \right\} - \exp(-x_2) \times \right. \\
& \quad \times \left. \exp \left\{ -\frac{[x_2 + u - v + x_3 - (\Lambda - \lambda_0)/2]^2}{2(\Lambda - \lambda_0)} \right\} \right) \exp \left\{ -\frac{[x_1 - x_2 - (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min})]^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{2x_1 x_2}{(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{[u - x_1 - (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min}]^2}{2\Lambda_{\min}} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (27)
\end{aligned}$$

при $\lambda_0 < \Lambda$. Тогда вероятности ошибок первого и второго рода МП-алгоритма обнаружения (6) получаем в виде

$$\begin{aligned}
\alpha &= P[\hat{\gamma} = 1 | \gamma_0 = 0] = P[\sup L(\chi | \gamma_0 = 0) \geq h] = \\
&= P[\sup \mu(\lambda | \gamma_0 = 0) \geq h] = 1 - F(h, h, \Lambda_{\max} | 0), \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(\chi_0) &= P[\hat{\gamma} = 0 | \gamma_0 = 1] = P[\sup L(\chi | \gamma_0 = 1) < h] = \\
&= P[\sup \mu(\lambda | \gamma_0 = 1) < h] = F(h, h, \Lambda_{\max} | 1). \quad (29)
\end{aligned}$$

Подставляя (26) и (27) в (28) и (29) соответственно, находим [5]:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi Q(\chi_{\min})}} \int_0^\infty \left(\Phi \left\{ \frac{[Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min})]/2 + x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min})}} \right\} - \exp(-x) \times \right. \\
& \quad \times \left. \Phi \left\{ \frac{[Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min})]/2 - x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min})}} \right\} \right) \exp \left\{ -\frac{[x - h - Q(\chi_{\min})/2]^2}{2Q(\chi_{\min})} \right\} dx; \quad (30) \\
\beta(\chi_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Q(\chi_0)}} \int_0^\infty \left(\Phi \left\{ \frac{[Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0)]/2 + x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0)}} \right\} - \exp(-x) \times \right. \\
& \quad \times \left. \Phi \left\{ \frac{[Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0)]/2 - x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0)}} \right\} \right) \exp \left\{ -\frac{[x + Q(\chi_0)/2]^2 + h^2 - hQ(\chi_0)}{2Q(\chi_0)} \right\} \times \\
& \quad \times \left(\exp \left[\frac{xh}{Q(\chi_0)} \right] \Phi \left\{ \sqrt{\frac{Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min})}{Q(\chi_{\min})Q(\chi_0)}} h + \sqrt{\frac{Q(\chi_{\min})}{[Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min})]Q(\chi_0)}} x \right\} - \right.
\end{aligned}$$

$$-\exp\left[-\frac{xh}{Q(x_0)}\right] \Phi\left\{\sqrt{\frac{Q(x_0)-Q(x_{\min})}{Q(x_{\min})Q(x_0)}}h - \sqrt{\frac{Q(x_{\min})}{[Q(x_0)-Q(x_{\min})]Q(x_0)}}x\right\} dx. \quad (31)$$

Необходимо отметить, что эффективность МП-алгоритма обнаружения (6) также можно характеризовать полной вероятностью ошибки

$$P_e = p_0\alpha + p_1\beta, \quad (32)$$

где α описывается выражением (30), а $\beta = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \beta(x_0) W_{1pr}(x_0) dx_0$ – безусловная

вероятность ошибки второго рода.

Плотность вероятности $W_q(\Lambda | \gamma_0)$ оценки (20) выражается через вспомогательную функцию (22) формулой [6]:

$$W_q(\Lambda | \gamma_0) = \int_h^{\infty} \left[\frac{\partial^2 F(u, v, \Lambda | \gamma_0)}{\partial u \partial \Lambda} \right] \Big|_{v=u} du. \quad (33)$$

Подставляя (26) и (27) в (33), после несложных, но громоздких, преобразований находим плотность вероятности вспомогательной оценки (20)

$$\begin{aligned} W_q(\Lambda | \gamma_0) &= \frac{1}{\pi(\Lambda - \Lambda_{\min})^{3/2} (\lambda_0 - \Lambda)^{3/2}} \int_0^{\infty} x_1 \exp\left\{-\frac{[x_1 - (\gamma_0 - 1/2)(\Lambda - \Lambda_{\min})]^2}{2(\Lambda - \Lambda_{\min})}\right\} \times \\ &\times \Phi\left[\frac{x_1 + (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min} - h}{\sqrt{\Lambda_{\min}}}\right] dx_1 \int_0^{\infty} x_2 \exp\left\{-\frac{[x_2 + (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda)]^2}{2(\lambda_0 - \Lambda)}\right\} \times \\ &\times \left\{ \Phi\left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 + x_2}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}}\right] - \exp(-x_2) \Phi\left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 - x_2}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}}\right] \right\} dx_2 \quad (34) \end{aligned}$$

при $\Lambda < \lambda_0$ и

$$\begin{aligned} W_q(\Lambda | \gamma_0) &= \frac{1}{2\pi(\Lambda - \lambda_0)^{3/2} \sqrt{(\lambda_0 - \Lambda_{\min})}} \times \\ &\times \left[\sqrt{\frac{2}{\pi(\Lambda_{\max} - \Lambda)}} \exp\left(-\frac{\Lambda_{\max} - \Lambda}{8}\right) + \Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_{\max} - \Lambda}}{2}\right) \right] \times \\ &\times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi\left[\frac{x_1 + (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min} - h}{\sqrt{\Lambda_{\min}}}\right] \exp\left\{-\frac{[x_2 + (\Lambda - \lambda_0)/2]^2}{2(\Lambda - \lambda_0)}\right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{[x_1 - x_2 - (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min})]^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})}\right\} \left[1 - \exp\left(-\frac{2x_1 x_2}{\lambda_0 - \Lambda_{\min}}\right)\right] x_2 dx_1 dx_2 \quad (35)$$

при $\Lambda > \lambda_0$. Выражения (34), (35) позволяют найти плотность вероятности $W_s(\chi | \gamma_0)$ оценки (8) площади изображения. Действительно, учитывая (17), имеем

$$W_s(\chi | \gamma_0) = W_q[Q(\chi) | \gamma_0] Q'(\chi), \quad (36)$$

где $Q'(\chi) = dQ(\chi)/d\chi$, а отношение сигнал/шум $Q(\chi)$ определяется из (15). Найденные плотности вероятности (36) позволяют определить смещение (систематическую ошибку) и рассеяние (средний квадрат ошибки) оценки (7) площади изображения (2) при совместном обнаружении изображения и оценивании его площади.

Полагая площадь отсутствующего изображения равной нулю, для плотности вероятности оценки (7) можем записать [6]:

$$W(\chi | \chi_0) = p_0[W_s(\chi | 0) + (1 - \alpha)\delta(\chi)] + p_1[W_s(\chi | 1) + \beta(\chi_0)\delta(\chi)].$$

Точность МП-оценки (7) можно также характеризовать условными смещением и рассеянием, которые при истинном значении площади χ_0 определяются соответственно как [6]:

$$b(\hat{\chi} | \chi_0) = p_0 b(\tilde{\chi} | 0) + p_1 [b(\tilde{\chi} | \chi_0) - \chi_0 \beta(\chi_0)], \quad (37)$$

$$V(\hat{\chi} | \chi_0) = p_0 V(\tilde{\chi} | 0) + p_1 [V(\tilde{\chi} | \chi_0) + \chi_0^2 \beta(\chi_0)], \quad (38)$$

где

$$b(\tilde{\chi} | j\chi_0) = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\chi - j\chi_0) W_s(\chi | j) d\chi,$$

$$V(\tilde{\chi} | j\chi_0) = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\chi - j\chi_0)^2 W_s(\chi | j) d\chi, \quad j = 0, 1.$$

Безусловные характеристики МП-оценки (7) могут быть получены путем усреднения выражений (37), (38) с весом $W_{1pr}(\chi)$:

$$b(\hat{\chi}) = p_0 b(\tilde{\chi} | 0) + p_1 \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} [b(\tilde{\chi} | \chi) - \chi \beta(\chi)] W_{1pr}(\chi) d\chi, \quad (39)$$

$$V(\hat{\chi}) = p_0 V(\tilde{\chi} | 0) + p_1 \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} [V(\tilde{\chi} | \chi) + \chi^2 \beta(\chi)] W_{1pr}(\chi) d\chi. \quad (40)$$

Отметим, что в зависимости от конкретных целей обработки и неоднородного изображения порог h в алгоритмах (6), (7) можно выбирать из условия минимума полной вероятности ошибки: $h_p = \arg \inf P_e$, где P_e определяется из (32) или из условия минимума рассеяния оценки: $h_v = \arg \inf V(\hat{\chi})$, где $V(\hat{\chi})$ определяется из (40).

Конкретизируем полученные результаты для изображения в форме эллипса, интенсивность которого изменяется линейно вдоль оси x . Уравнение контура, ограничивающего область $\Omega(\chi)$, которую занимает изображение площадью χ , имеет вид

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = \chi, \quad (41)$$

где $ab = 1/\pi$. Обозначая эксцентриситет эллипса (41) $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, интенсивность изображения запишем как

$$F(x, y) = \frac{F_H}{\sqrt{\frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4}}} \left[\frac{(1-q)\sqrt{\pi}(1-\varepsilon^2)^{1/4}}{2\sqrt{\chi_{\max}}} x + \frac{(1+q)}{2} \right]. \quad (42)$$

Здесь параметр F_H характеризует амплитуду интенсивности, параметр $q = F(-a_{\max}, 0)/F(a_{\max}, 0)$ – наклон интенсивности изображения, а параметр a_{\max} определяет большую полуось эллипса при максимальной площади эллипса χ_{\max} . Функция (42), описывающая интенсивность изображения, нормирована так, чтобы энергия изображения с максимальной площадью $E_{\max} = \iint_{\Omega(\chi_{\max})} F^2(x, y) dx dy = F_H^2 \chi_{\max}$ не зависела от наклона интенсивности изобра-

жения и тем самым была возможность сравнивать эффективность обнаружения изображений и оценки его площади с различными наклонами интенсивности. Подставляя интенсивность (42) в (15), находим отношение сигнал/шум

$$Q(\chi) \equiv \lambda = z_H^2 \left[\frac{(1-q)^2}{16} \eta^2 + \frac{(1+q)^2}{4} \eta \right] / \left[\frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4} \right], \quad (43)$$

где $\eta = \chi/\chi_{\max}$ – нормированная площадь; $\eta \in [1/\varkappa; 1]$, $\varkappa = \chi_{\max}/\chi_{\min}$ – динамический диапазон изменения неизвестной площади; $z_H^2 = 2F_H^2 \chi_{\max}/N_0 = 2E_{\max}/N_0$ – отношение сигнал/шум для однородного изображения с интенсивностью F_H и площадью χ_{\max} . Отметим, что отношение сигнал/шум (43) не зависит от эксцентриситета эллипса ε .

На рис. 1, 2 при $p_0 = p_1 = 1/2$ приведены зависимости полной вероятности ошибки (32) МП-алгоритма обнаружения (6) изображения, имеющего форму эллипса (41) с линейно изменяющейся интенсивностью (42), от отношения сигнал/шум z_H . Кривые рассчитаны по формулам (30)–(32) для равномерной априорной плотности вероятности неизвестной площади

$$W_{1pr}(\chi) = \begin{cases} 1/(\chi_{\max} - \chi_{\min}), & \chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}; \\ 0, & \chi < \chi_{\min}, \quad \chi > \chi_{\max} \end{cases} \quad (44)$$

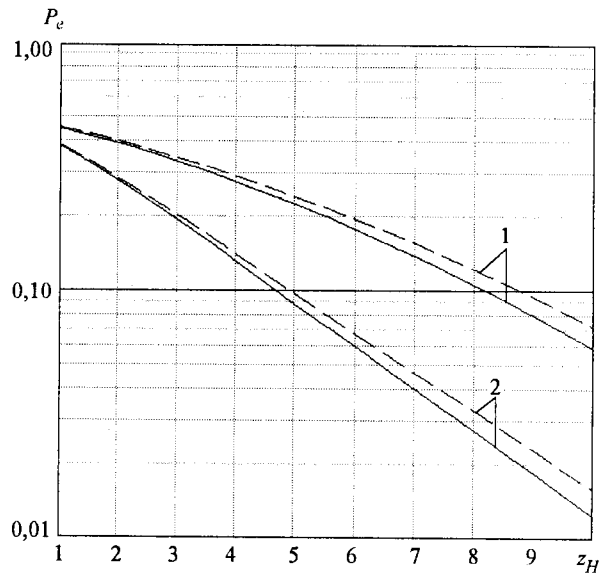


Рис. 1

и различных значений q и α . Кривые 1 соответствуют порогу обнаружения в (б) $h = 0$, а кривые 2 – оптимизированному порогу h_p .

На рис. 1 показаны зависимости $P_e(z_H)$ при $\alpha = 10$. Сплошные кривые соответствуют однородному изображению ($q = 1$), а штриховые кривые – неоднородному изображению с наклоном интенсивности изображения $q = 10$. Как следует из рис. 1, эффективность обнаружения изображения с неизвестной площадью несколько снижается по мере увеличения степени неоднородности изображения.

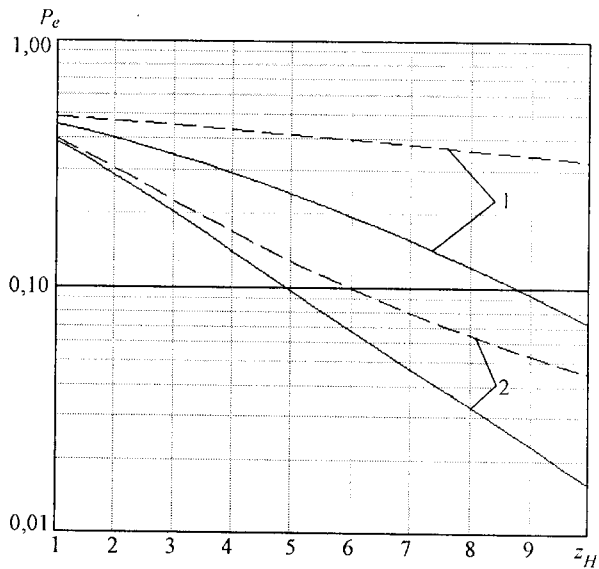


Рис. 2

На рис. 2 показаны зависимости $P_e(z_H)$ при $q=10$. Сплошные кривые рассчитаны для динамического диапазона изменения неизвестной площади $\varepsilon=10$, а штриховые – для $\varepsilon=10^2$. Как следует из рис. 2, увеличение динамического диапазона изменения неизвестной площади приводит к заметному снижению эффективности обнаружения изображения.

Сопоставление кривых 1 и 2 на рис. 1, 2 показывает, что использование МП-алгоритма с оптимизированным порогом приводит к заметному повышению эффективности обнаружения. Следует однако отметить, что для расчета оптимизированного порога необходим существенный объем априорной информации, а именно: надо знать априорную вероятность наличия изображения p_1 и априорную плотность вероятности неизвестной площади $W_{1pr}(\chi)$. Если $W_{1pr}(\chi)$ и (или) p_1 неизвестны, рассчитать оптимизированный порог h_p невозможно.

На рис. 3, 4 при $p_0 = p_1 = 1/2$ приведены зависимости нормированного безусловного рассеяния оценки площади $\rho = V(\hat{\chi})/\chi_{\max}^2$ изображения, имеющего форму эллипса (41) с линейно изменяющейся интенсивностью (42), от отношения сигнал/шум z_H . Кривые рассчитаны по формуле (40) для равномерной априорной плотности вероятности неизвестной площади (44) и различных значений q и ε . Кривые 1 соответствуют порогу обнаружения в (7) $h=0$, а кривые 2 – оптимизированному порогу h_p . На рис. 3 показаны зависимости $\rho(z_H)$ при $\varepsilon=10$. Сплошные кривые соответствуют однородному изображению ($q=1$), а штриховые кривые – неоднородному изображению с наклоном интенсивности $q=10$. Как следует из рис. 3, эффективность совместной оценки незначительно снижается по мере увеличения степени неоднородности изображения. На рис. 4 показаны зависимости $\rho(z_H)$ при $q=10$. Сплошные кривые рассчитаны для динамического диапазона изменения неизвестной площади $\varepsilon=10$, а штриховые – для $\varepsilon=10^2$. Как следует из рис. 4, увеличение динамического диапазона изменения неизвестной площади оказывает несущественное влияние на точность совместной оценки площади.

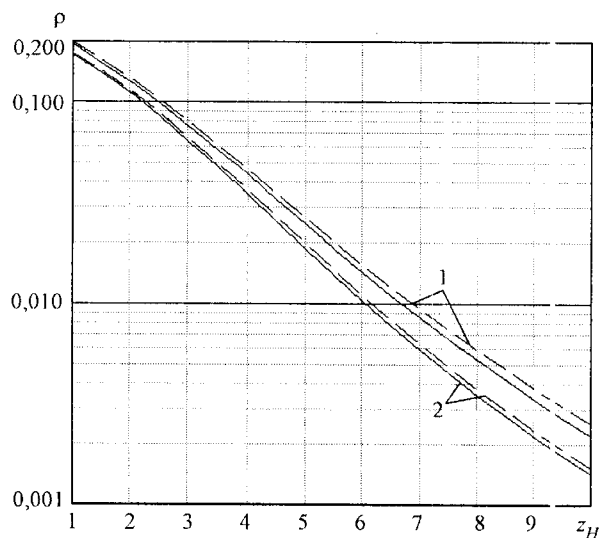


Рис. 3

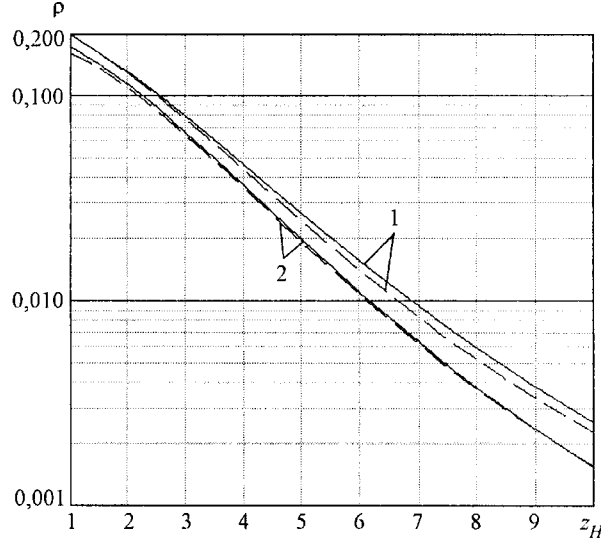


Рис. 4

Полученные результаты позволяют также исследовать свойства классической оценки максимального правдоподобия площади неоднородного изображения, когда сигнал присутствует в наблюдаемой реализации с вероятностью 1, т. е.

$$p_1 = 1, \quad \gamma_0 = 1. \quad (45)$$

Действительно, подставляя (45) в (37)–(40) и полагая в этих формулах $h = -\infty$, имеем условные и безусловные смещение и рассеяние классической оценки максимального правдоподобия площади. В частности, подставляя (45) в (34), (35), можем переписать плотность вероятности вспомогательной оценки (20) в виде

$$W_q(\Lambda | 1) = \frac{1}{2} \begin{cases} \Psi((\lambda_0 - \Lambda)/2, (\lambda_0 - \Lambda_{\min})/2, (\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2), & \Lambda_{\min} \leq \Lambda < \lambda_0; \\ \Psi((\Lambda - \lambda_0)/2, (\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2, (\lambda_0 - \Lambda_{\min})/2), & \lambda_0 \leq \Lambda \leq \Lambda_{\max}, \end{cases} \quad (46)$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2) = (2\sqrt{\pi} y^{3/2})^{-1} \left\{ \Phi \left[\frac{\sqrt{(y_1 - y)/2}}{\sqrt{\pi(y_1 - y)}} \right] + \exp \left[-\frac{(y_1 - y)}{4} \right] / \sqrt{\pi(y_1 - y)} \right\} \times \\ \times \int_0^\infty x \exp \left[-\frac{(x + y)^2}{4y} \right] \left\{ \Phi \left[\frac{(y_2 + x)/\sqrt{2y_2}}{\sqrt{\pi(y_2 + x)}} \right] - \exp(-x) \Phi \left[\frac{(y_2 - x)/\sqrt{2y_2}}{\sqrt{\pi(y_2 - x)}} \right] \right\} dx.$$

Выражение (46) позволяет найти плотность вероятности $W(\hat{\chi} | \chi_0)$ оценки (8) площади неоднородного изображения. Таким образом, учитывая (17), имеем

$$W(\hat{\chi} | \chi_0) = W_q[Q(\chi) | 1] Q'(\chi). \quad (47)$$

$$V(\hat{\chi} | \chi_0) = \int_{\chi_{\min}} (\chi - \chi_0)^2 W_q[Q(\chi) | 1] Q'(\chi) d\chi. \quad (48)$$

Точные выражения для характеристик оценки максимального правдоподобия (8) площади неоднородного изображения довольно громоздки, и расчет по ним возможен только численными методами. Поэтому рассмотрим асимптотическое поведение этих характеристик при увеличении отношения сигнал/шум $z^2 = Q(\chi_0)$ для наблюдаемого изображения. Обозначим $q_{\min} = Q(\chi_{\min})/Q(\chi_0) < 1$, $q_{\max} = Q(\chi_{\max})/Q(\chi_0) > 1$ при $\chi_0 \in (\chi_{\min}, \chi_{\max})$. Перейдем в (46) к новой переменной

$$\kappa = [Q(\chi) - Q(\chi_0)]/2, \quad (49)$$

причем $-(1 - q_{\min})z^2/2 < \kappa < (q_{\max} - 1)z^2/2$. Плотность вероятности для переменной (49) запишется в виде

$$W_q(\kappa) = \begin{cases} \Psi[-\kappa, (1 - q_{\min})z^2/2, (q_{\max} - 1)z^2/2], & -(1 - q_{\min})z^2/2 \leq \kappa < 0; \\ \Psi[\kappa, (q_{\max} - 1)z^2/2, (1 - q_{\min})z^2/2], & 0 \leq \kappa \leq (q_{\max} - 1)z^2/2. \end{cases} \quad (50)$$

Полагая в (50) $z \rightarrow \infty$, находим предельную плотность вероятности для переменной (49):

$$W_0(\kappa) = 3 \exp(2|\kappa|) [1 - \Phi(3\sqrt{|\kappa|/2})] + \Phi(\sqrt{|\kappa|/2}) - 1, \quad (51)$$

где $\kappa \in (-\infty, +\infty)$. По мере роста отношения сигнал/шум z^2 для наблюдаемого изображения оценка максимального правдоподобия площади неоднородного изображения $\hat{\chi}$ (8) сходится к истинному значению площади χ_0 в среднеквадратическом [6, 7]. Поэтому при достаточно больших z допустима аппроксимация переменной (49) выражением $\kappa \approx (\chi - \chi_0)Q'(\chi_0)/2$. Следовательно, при $z \rightarrow \infty$ плотность вероятности нормированной ошибки максимально правдоподобной оценки площади изображения

$$\hat{\kappa} = (\hat{\chi} - \chi_0)Q'(\chi_0)/2 \quad (52)$$

сходится к $W_0(\kappa)$ (51). Впервые плотность вероятности (51) была получена, по-видимому, в [9], а ее свойства изучены и описаны в [10]. Плотность вероятности (51) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии, обладает дисперсией 13/2 и коэффициентом эксцесса $1779/169 \approx 10,53$. Используя (51) и (52), для асимптотического значения условного рассеяния максимально правдоподобной оценки площади можно записать

$$V_0(\hat{\chi} | \chi_0) = 26[Q'(\chi_0)]^{-2}. \quad (53)$$

Если интеграл (12) удастся вычислить явно, то производную $Q'(\chi)$ можно найти прямым дифференцированием. Если же интегрирование в (12) выполнить не удастся из-за сложности функции $F(x, y)$ или сложности формы области $\Omega(\chi)$, то производную $Q'(\chi)$ можно выразить через контурный интеграл.

Пусть заданы уравнения $x = f(\varphi)$, $y = \psi(\varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) контура C_E , ограничивающего область Ω_E . Площадь области Ω_E равна 1, а ее форма повторяет форму области Ω , занимаемой изображением (2). Тогда уравнения контура $C(\chi)$, ограничивающего область $\Omega(\chi)$, имеют вид $x = f(\varphi)\sqrt{\chi}$, $y = \psi(\varphi)\sqrt{\chi}$. Перепишем (12) в полярной системе координат:

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\chi(f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi))}} F^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (54)$$

Найдем производную функции $Q(\chi)$ по χ :

$$Q'(\chi) = \frac{1}{N_0} \int_0^{2\pi} F^2(\sqrt{\chi(f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi))} \cos \varphi, \sqrt{\chi(f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi))} \sin \varphi) \times \\ \times (f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi)) d\varphi. \quad (55)$$

Приведем выражение (55) к интегралу по контуру. Учитывая, что $\operatorname{tg} \varphi = y/x = \psi(\varphi)/f(\varphi)$ и

$$\frac{\psi'(\varphi)f(\varphi) - f'(\varphi)\psi(\varphi)}{f^2(\varphi)} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\psi^2(\varphi) + f^2(\varphi)}{f^2(\varphi)},$$

получим

$$\psi'(\varphi)f(\varphi) - f'(\varphi)\psi(\varphi) = f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi),$$

$$x dy = \chi \psi'(\varphi) f(\varphi) d\varphi, \quad y dx = \chi f'(\varphi) \psi(\varphi) d\varphi,$$

$$\chi [f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi)] d\varphi = \chi [\psi'(\varphi) f(\varphi) - f'(\varphi) \psi(\varphi)] d\varphi = x dy - y dx.$$

Используя эти соотношения, находим выражение для (55) в виде интеграла по контуру:

$$Q'(\chi) = \frac{1}{N_0 \chi} \int_{C(\chi)} F^2(x, y) (x dy - y dx), \quad (56)$$

где $C(\chi)$ – контур, ограничивающий область $\Omega(\chi)$, занятую изображением площадью χ . Формулы (53), (56) свидетельствуют, что асимптотическое значение рассеяния оценки максимального правдоподобия площади зависит только от интеграла по контуру $C(\chi_0)$, который ограничивает область $\Omega(\chi_0)$, занимаемую наблюдаемым изображением (2). Этот интеграл «суммирует» значения квадрата скачка интенсивности изображения на контуре $C(\chi_0)$ по

всем точкам этого контура. Соответственно асимптотическое значение рассеяния (53) оценки максимального правдоподобия площади не зависит от того, какие значения внутри контура $C(\chi_0)$, т. е. во внутренних точках области $\Omega(\chi_0)$, принимает интенсивность изображения $F(x, y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Островитянов Р. В., Басалов В. Ф.** Статистическая теория радиолокации протяженных объектов. М.: Радио и связь, 1982.
2. **Красильников Н. Н.** Теория передачи и восприятия изображений. М.: Радио и связь, 1986.
3. **Галун С. А., Зюльков А. В., Трифонов А. П.** Оценка площади оптического изображения на фоне шумов // Автометрия. 1983. № 1. С. 81.
4. **Нечаев Е. П., Трифонов А. П.** Оценка площади оптических изображений при неизвестных интенсивностях сигнала и шума // Автометрия. 1990. № 2. С. 31.
5. **Трифонов А. П., Зимовец К. А.** Эффективность обнаружения неоднородного изображения на фоне шума // Автометрия. 2003. 39, № 1. С. 19.
6. **Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.** Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
7. **Куликов Е. И., Трифонов А. П.** Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
8. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
9. **Терентьев А. С.** Распределение вероятности временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра // Радиотехника и электроника. 1968. 13, № 4. С. 652.
10. **Трифонов А. П.** Разрывные модели сигналов и оценка их параметров // Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995. С. 164.

*Воронежский государственный университет,
E-mail: trif@rf.phys.vsu.ru*

*Поступила в редакцию
28 июля 2003 г.*