

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
А В Т О М Е Т Р И Я

2004, том 40, № 4

УДК 681.324 + 519.17

О. Г. Монахов, Э. А. Монахова

(Новосибирск)

**СИНТЕЗ НОВЫХ СЕМЕЙСТВ  
ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СЕТЕЙ  
НА ОСНОВЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ  
И ШАБЛОНОВ ФУНКЦИЙ**

Описан алгоритм, основанный на эволюционных вычислениях и шаблонах функций, который предназначен для открытия аналитических описаний новых плотных семейств оптимальных регулярных сетей. Представлены полученные с помощью данного алгоритма новые семейства регулярных параметрически описываемых сетей со степенями 3 и 6, которые улучшают известные результаты.

**Введение.** Проектирование распределенных вычислительных сетей и сетей связи вычислительных систем (ВС) с массовым параллелизмом [1, 2], содержащих сотни тысяч процессорных элементов и имеющих регулярную структуру связей, требует изучения ненаправленных оптимальных регулярных графов с малыми диаметрами и большим числом вершин при заданной степени. Выбор оптимальных графов в качестве структур сетей связи ВС обеспечивает при заданных стоимостных ограничениях оптимум показателей надежности, связности и производительности ВС. Графы с такими свойствами встречаются в классе параметрически описываемых регулярных неориентированных графов  $R_s(N, v, g)$  [3, 4], где  $N$  – порядок графа,  $v$  – степень,  $g$  – обхват,  $s$  – число классов эквивалентности вершин. Класс графов  $R_s(N, v, g)$  обобщает и включает в себя большинство известных подклассов однородных графов, используемых в качестве структур ВС (гиперкубы, циркулянты, кубически связанные циклы, хордовые кольцевые сети), а также кубы по Гауссу [5] и др. Следует отметить, что графы  $R_s(N, v, g)$  находят приложение не только в реализованных сетях связи компьютерных систем, но и в естественных процессах, например, как графы химических реакций, в которых вершины символизируют химические вещества (молекулы или промежуточные продукты реакции), а ребра – шаги реакции [6].

В предлагаемой работе рассматривается новый, основанный на шаблонах (templates) функций, эволюционный алгоритм для автоматизированного открытия (синтеза) аналитических описаний новых плотных семейств оптимальных графов  $R_s(N, v, g)$  с большими областями изменения порядков. Этот подход отличается от стандартных способов поиска плотных семейств

оптимальных сетей математическими методами, основанными на теории графов, теории групп и регулярных укладках на плоскости [7–13]. Далее будем использовать понятия «графы» и «сети» как синонимы.

1. **Основные определения и свойства сетей  $R_s(N, v, g)$ .** В этом разделе приводятся основные термины теории графов, определение и некоторые свойства сетей  $R_s(N, v, g)$ . Полное изложение свойств этого класса сетей можно найти в [3, 4].

Простой граф  $G$  есть некоторый объект  $(V, E)$ , где  $V$  – множество вершин, а  $E$  – множество ребер, и только одно ребро может связывать одну вершину с другой. Порядок графа равен числу его вершин. Степень вершины – число ребер, инцидентных ей. Граф называется регулярным, если все его вершины имеют одинаковую степень. Путь в графе определяется как последовательность смежных ребер таких, что никакое ребро не встречается дважды, и первая и последняя вершины различны; длина пути есть число его ребер. Простой цикл в графе  $G$  есть путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают, а все остальные вершины различны. Длина кратчайшего простого цикла графа  $G$  называется обхватом графа. Расстояние между двумя вершинами  $a$  и  $b$  есть длина кратчайшего пути между  $a$  и  $b$ . Диаметром графа называется наибольшее расстояние между вершинами графа. Диаметр определяет максимальную задержку в сети при передаче информации.

Определим теперь параметрически описываемые регулярные и основанные на полугруппах сети  $K_s(N, v, g)$ .

Пусть  $K_s(N, v, g)$  – простой граф с порядком  $N$ , степенью  $v$ , обхватом  $g$ , множеством вершин  $V = \{1, 2, \dots, N\}$ , множеством ребер  $E \subseteq V^2$ , группой автоморфизмов  $Aut(R)$  и отношением эквивалентности  $\mu$ , формирующим разделение множества вершин  $V$  на  $m < N$  классов  $V_i$ , такое, что для каждой пары вершин  $k, j \in V_i, i = \overline{1, m}$ , существует автоморфизм  $\varphi \in Aut(R)$ , который переводит  $k$  в  $j$ :

$$\forall(k, j \in V_i) \exists(\varphi \in Aut(R))(\varphi(k) = j). \quad (1)$$

Эквивалентность  $\mu$  на множестве вершин  $V$  графа  $K_s(N, v, g)$ , которая будет рассматриваться далее, есть сравнимость по модулю  $s$  (делителя  $N$ ), т. е.

$$\mu = \{(a, b) \in V^2 \mid a \equiv b \pmod{s}\}, \quad (2)$$

где  $s < N, N \equiv 0 \pmod{s}$ . Когда эквивалентность  $\mu$  определяется выражением (2), мы обозначаем графы  $K_s(N, v, g)$  как графы  $R_s(N, v, g)$ .

Выделим класс графов  $K_s(N, v, g)$ , который включает все графы  $R_s(N, v, g)$  с фиксированными значениями  $s, N$  и  $v$ . Таким образом, множество вершин  $V$  графа  $K_s(N, v, g)$  делится на  $s$  классов эквивалентности

$$V_i = \{a \mid a \in V, a \equiv i \pmod{s}\},$$

где  $i = \overline{1, s}$ .

Пусть  $r = N/s$ . Из определения графов  $R_\mu(N, v, g)$  следует, что для каждой пары  $a, b \in V_i, i = \overline{1, s}$ , графа  $R_s(N, v)$  существует автоморфизм  $\varphi \in \text{Aut}(R)$  такой, что  $\varphi(a) = b$ , т. е.

$$b \equiv a + js \pmod{N}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (3)$$

Если в графе  $R_s(N, v)$  две вершины  $a$  и  $c$  связаны ребром  $(a, c) \in E$  и  $c - a \equiv l \pmod{N}$ , где  $l$  – натуральное число и  $l < N$ , тогда назовем  $l$  отметкой ребра  $(a, c)$ . Заметим, что данное ребро имеет также отметку  $l' \equiv a - c \pmod{N}$ .

Неформально можно описать граф  $R_s(N, v)$  как регулярный граф степени  $v$  с вершинами, помеченными целыми по модулю  $N$ , и для любых двух вершин  $a$  и  $c$  вершина  $a$  связана с вершиной  $c$ , если и только если вершина  $a + s \pmod{N}$  связана с вершиной  $c + s \pmod{N}$ , где  $s$  – делитель  $N$ .

**Лемма [3].** Если две вершины  $a \in V_i, i \in \overline{1, s}$ , и  $c \in V$  графа  $R_s(N, v)$  связаны ребром  $(a, c) \in E$  с отметкой  $l$ , тогда ребро  $(b, d) \in E$  с отметкой  $l$  инцидентно каждой вершине  $b \in V_i$ .

**Следствие.** Пусть в графе  $R_s(N, v)$  вершина  $a \in V_i, i \in \overline{1, s}$ . Обозначим  $L_i = \{l_{ik}\}, i \in \overline{1, s}, k = \overline{1, v}$ , как множество отметок ребер, инцидентных вершине  $a$ . Тогда множество отметок ребер, инцидентных любой вершине  $b \in V_i$ , есть  $L_i$ .

Назовем множество  $L = \{l_{ik}\}, i = \overline{1, s}, k = \overline{1, v}$ , множеством отметок ребер (или образующих) графа  $R_s(N, v)$ . Две вершины  $a$  и  $b$  графа  $R_s(N, v)$  связаны ребром  $(a, b) \in E$ , если и только если существует такое натуральное число  $l_{ik} < N$ , где  $l_{ik} \in L, i \in \overline{1, s}, k \in \overline{1, v}$ , что если  $a \equiv i \pmod{s}$ , то  $b - a \equiv l_{ik} \pmod{N}$ , т. е.

$$(a, b) \in E \Leftrightarrow (\exists l_{ik} \in L)(a \equiv i \pmod{s}) \& (b - a \equiv l_{ik} \pmod{N}).$$

Пусть  $E_{ik}$  обозначает множество ребер с отметкой  $l_{ik}$ :

$$E_{ik} = \{(a, b) \in E \mid a \equiv i \pmod{s}, b \equiv a + l_{ik} \pmod{N}\},$$

где  $i \in \overline{1, s}, k \in \overline{1, v}$ . Ребра из множества  $E_{ik}$  имеют также отметку

$$l_{jm} = N - l_{ik}, \quad (4)$$

где  $j \equiv i + l_{ik} \pmod{s}, i, j \in \overline{1, s}, k, m \in \overline{1, v}$ , и, следовательно, множества  $E_{jm}$  и  $E_{ik}$  совпадают.

Пусть  $L^*$  означает минимально необходимое множество отметок. Для того чтобы от множества  $L$  перейти к множеству  $L^*$ , нужно из множества  $L$  удалить по одной отметке из каждой пары отметок, связанных соотношением (4). Для обратного перехода от  $L^*$  к  $L$  требуется найти дополнительную отметку по соотношению (4) для каждой отметки из  $L^*$ .

Таким образом, если число вершин  $N$ , число классов эквивалентности  $s$  и множество отметок  $L$  (или  $L^*$ ) заданы, то граф  $R_s(N, v, g)$  полностью

определен, и можно для него также использовать параметрическое описание  $G(N; L)$ .

**Пример.** Рассмотрим граф Петерсена (рисунок, *a*) с 10 вершинами, со степенью 3,  $g = 5$ ,  $s = 2$ . Можно увидеть, что вершина  $i$  связана с вершинами  $i+1, i+2, i+8$ , если  $i$  нечетное, и с вершинами  $i+4, i+6, i+9$ , если  $i$  четное (все числа берутся по модулю 10). Граф Петерсена есть граф  $R_2(10, 3, 5)$  с множеством отметок (образующих)  $L = \{1, 2, 8; 4, 6, 9\}$ . Минимальное множество отметок  $L^* = \{1, 2; 4\}$ .

На рисунке, *b* изображен граф  $R_2(24, 4, 4)$  со степенью 4 и с 24 вершинами. Он имеет два класса эквивалентности вершин и множество отметок  $L = \{5, 9, 15, 23; 1, 9, 15, 19\}$ . Минимальное множество отметок  $L^* = \{5, 9, 23; 9\}$ .

Представим некоторые свойства графов  $R_s(N, v)$ :

1.  $V = \bigcup_{i=1}^s V_i, V_i \cap V_j = \emptyset$  для  $i \neq j, |V_i| = r$ , где  $i = \overline{1, s}$ .
2.  $E = \bigcup_{i=1}^s \bigcup_{k=1}^v E_{ik}, |E_{ik}| = r$ , где  $i = \overline{1, s}, k = \overline{1, v}, |E| = sr v / 2$ .
3. Если вершины  $a, b \in V$  графа  $R_s(N, v)$  связаны, тогда

$$b - a \equiv \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^v l_{ik} t_{ik} \pmod{N},$$

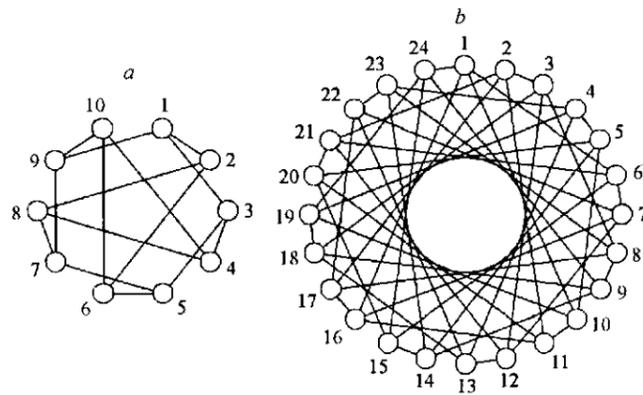
где  $t_{ik}$  – число ребер с отметкой  $l_{ik}$ , которые принадлежат пути из  $a$  в  $b$ .

4. Граф  $R_s(N, v)$  описывается полугруппой [3] и изоморфен графу полугруппы преобразований классов эквивалентности.

Теперь представим некоторые известные сетевые топологии в виде подклассов графов  $R_s(N, v, g)$ .

Гиперкубы могут быть представлены как графы  $R_s(2^v, v, 4)$  с  $s = 2^{v-2}$ . Например, для  $N = 2^3$  образующие параметрического описания гиперкуба  $R_2(2^3, 3, 4)$  имеют вид  $L = \{1, 2, 6; 2, 6, 7\}$ .

Циркулянтные графы [2, 7, 10] могут быть представлены как графы  $R_1(N, v, 4)$  с  $s = 1$  и  $g = 4$ . Циркулянтные графы широко исследуются при проектировании и анализе вычислительных систем, в теории графов и диск-



ретной математике, кроме того, реализованы как сети связи в некоторых многопроцессорных ВС (MPP, Intel Paragon, Cray T3D и др.). Дадим для них обычно используемое описание. Циркулянт есть ненаправленный граф  $G(N; l_1, l_2, \dots, l_{v/2})$  с  $N$  вершинами, помеченными числами  $1, 2, \dots, N$ , имеющих  $i \pm l_1, i \pm l_2, \dots, i \pm l_{v/2} \pmod{N}$  вершины, смежные с каждой вершиной  $i$ . Отметки  $L^* = \{l_i\}$ , где  $0 < l_1 < \dots < l_{v/2} \leq N/2$ , есть образующие конечной абелевой группы автоморфизмов, связанной с графом. Циркулянтные графы вида  $G(N; 1, l_2, \dots, l_{v/2})$  с единичной образующей известны еще как кольцевые сети (loop networks).

Для  $s=2$  и  $v=3$  класс графов  $R_s(N, v, g)$  включает известные классы хордальных кольцевых сетей (chordal ring networks) [9], обобщенных хордальных кольцевых сетей [12] и обобщенных графов Петерсена [7, 13]. Например, образующие параметрического описания хордальных кольцевых сетей  $R_2(N, 3, g)$  имеют вид  $L^* = \{1, a, 1\}$ , обобщенных хордальных кольцевых сетей  $R_2(N, 3, g)$  – вид  $L^* = \{a, b, c\}$ , где  $a, b, c$  – образующие (различные нечетные числа), и обобщенных графов Петерсена  $R_2(N, 3, g)$  – вид  $L^* = \{a, b, c\}$ , где  $a$  – нечетное число;  $b, c$  – четные числа.

**2. Проблема оптимизации для сетей  $R_s(N, v, g)$ .** Известны следующие наиболее изучаемые проблемы оптимизации сетей: 1) найти оптимальные сети с минимальным диаметром при заданных степени и порядке графа; 2) найти плотные оптимальные семейства сетей с максимальным (или близким к нему) числом вершин при заданных степени и диаметре. Проблема оптимизации, рассматриваемая в данной работе, объединяет обе проблемы и состоит в том, чтобы найти оптимальный граф  $R_s(N, v)$ , имеющий минимальный диаметр  $d$  при заданных степени  $v$  и числе классов эквивалентности  $s$  и изменении числа вершин  $N$  в некотором диапазоне. Оптимальные графы достигают наилучших значений надежности, связности, скорости коммуникаций, задержек в процессе передачи информации [2, 7, 10] при использовании в качестве сетей связи в мультипроцессорных ВС. Данная проблема есть проблема целочисленного программирования с нелинейной целевой функцией. Для решения первой из приведенных проблем использовались следующие алгоритмы: исчерпывающий поиск, алгоритм ветвей и границ, генетический алгоритм, моделирование отжига и случайный поиск. Тем не менее эти алгоритмы обычно используются для решения оптимизационных проблем с фиксированными значениями  $N$  при заданных значениях  $v, s$  и дают фиксированные значения образующих. Поэтому необходимо развивать новые методы для поиска плотных семейств графов  $R_s(N, v, g)$  с аналитическими описаниями параметров, что позволит задавать параметры описаний оптимальных графов формулами и порождать бесконечные семейства таких графов, а при проектировании ВС отказаться от разработки каталогов оптимальных структур, заменив их компактным аналитическим описанием графов.

Известны следующие плотные семейства сетей  $R_s(N, v, g)$ . Они являются оптимальными или имеют диаметр, не превышающий некоторую заданную величину. Рассмотрим сети  $R_s(N, v, g)$  со степенями 3, 4 и 6 как наиболее интересные случаи для практического применения в качестве сетей связи ВС.

1. Для  $v=3$  в работе [12] найдены некоторые плотные семейства обобщенных хордальных кольцевых сетей  $R_2(N, 3, g)$  с минимальным диаметром

*d.* Пример аналитического описания для порядков  $N$  и образующих  $a, b, c$  одного семейства:  $N = 6p^2 + 4p$ ,  $a = -1$ ,  $b = -6p - 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = 2p + 1$ .

2. Для обобщенных графов Петерсена ( $v = 3$ ) [13] найдено аналитическое описание семейства графов с самым большим порядком для заданного диаметра  $d$ :  $N = (2d - 3)^2 + 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2d - 4$ ,  $c = 2d - 2$ .

3. Для  $v = 4$  в работах [10, 11, 14] найдено следующее аналитическое решение. Для любого  $N > 4$  оптимальный циркулянтный граф имеет

$$l_1 = \lceil (\sqrt{2N-1} - 1)/2 \rceil, \quad l_2 = l_1 + 1. \quad (5)$$

4. Для  $v = 6$  в [7, 8] найдено плотное бесконечное семейство циркулянтных графов (кольцевых сетей) с диаметром, не превышающим  $d \geq 3$ , где

$$N = 32 \lfloor d/3 \rfloor^3 + 8 \lfloor d/3 \rfloor^2 + 2 \lfloor d/3 \rfloor, \quad (6)$$

$$L^* = \{1, 4 \lfloor d/3 \rfloor, (4 \lfloor d/3 \rfloor)^2\}.$$

Заметим, что в большинстве случаев открытие бесконечных семейств графов с экстремальными свойствами происходит на основе опыта и интуиции исследователей.

В данной работе предлагается новый подход, использующий эволюционные вычисления [15–18], чтобы автоматически порождать аналитические описания конечных и бесконечных семейств сетей  $R_s(N, v, g)$  с экстремальными свойствами и получать семейства с лучшими диаметрами.

Рассматриваемая проблема формулируется следующим образом: найти функции  $f_1, \dots, f_n$ ,  $n \geq 2$ , для аналитических описаний образующих  $l_i = f_i(d, N)$ ,  $i = 1, n$ , оптимальных сетей  $G(N; l_1, \dots, l_n)$  при условии, если задана область изменения  $N = N_{\min} - N_{\max}$  или функция  $N = f_N(n, d)$ .

3. **Алгоритм эволюционного синтеза** основан на эволюционных вычислениях и моделировании процесса естественного отбора в популяции особей, каждая из которых есть точка в пространстве решений задачи оптимизации сети. Особи представлены строками функций (аналитическими описаниями множеств образующих или хромосомой). Каждая популяция является множеством множеств образующих  $f_1, \dots, f_n$ ,  $n \geq 2$ , для семейства графов  $R_s(N, v, g)$  с порядками в диапазоне  $N_{\min} \leq N \leq N_{\max}$  либо величина  $N$  может быть задана как функция от  $n$  и  $d$ .

Основная идея этого алгоритма состоит в эволюционном преобразовании множества аналитических описаний графов (формул) в процессе естественного отбора – выживании «сильнейшего». В нашем случае этими особями являются графы, имеющие наименьший возможный диаметр. Алгоритм начинается с генерации начальной популяции. Все особи в этой популяции создаются случайно, затем отбираются наилучшие особи и запоминаются. Для создания популяции следующего поколения (следующей итерации) новые особи формируются с помощью генетических операций селекции (отбора), мутации, кроссовера и добавления новых элементов (для сохранения разнообразия популяции). Примем, что целевая функция (fitness function, функция качества, функция пригодности)  $F$  вычисляет сумму диаметров графов  $G(N; f_1, \dots, f_n)$  с множеством образующих  $f_1, \dots, f_n$ ,  $n \geq 2$ , и порядками  $N$ ,  $N_{\min} \leq N \leq N_{\max}$ . Целью алгоритма является поиск минимума  $F$ .

Пример хромосомы для  $n = 2$ 

$h = 2$	$f_1$							$f_2$						
$j = 1$	$sg_{11}$	$a_{11}$	$b_{11}$	$x_{11}$	$\Delta d_{11}$	$z_{11}$	$tr_{11}$	$sg_{21}$	$a_{21}$	$b_{21}$	$x_{21}$	$\Delta d_{21}$	$z_{21}$	$tr_{21}$
$j = 2$	$sg_{12}$	$a_{12}$	$b_{12}$	$x_{12}$	$\Delta d_{12}$	$z_{12}$	$tr_{12}$	$sg_{22}$	$a_{22}$	$b_{22}$	$x_{22}$	$\Delta d_{22}$	$z_{22}$	$tr_{22}$

3.1. *Представление данных.* Основной структурой данных в программной реализации алгоритма являются множества функций  $f_1, \dots, f_n$ ,  $n \geq 2$ . На основе анализа структуры известных описаний оптимальных семейств графов предлагается два обобщенных шаблона (темплейта) для функций  $f_i$ .

Первый шаблон для каждой функции  $f_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^h [sg_j(a/b)N^x(d + \Delta d)^z]^{tr},$$

где  $a, b \in \{C\}$ ,  $|x| \leq n$ ,  $|z| \leq n$ ,  $h \leq n + 1$ ,  $\Delta d \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ ,  $sg_j \in \{+, -\}$ ,  $tr \in \{\lceil p \rceil, \lfloor p \rfloor\}$  – тип округления,  $C$  – множество натуральных констант. Пример представления функций  $f_i$  (множество образующих или хромосома) для  $n = 2$  приведен в табл. 1.

В этой работе также использован второй шаблон для функций  $f_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$a[((yN + sg_1 \Delta N)^x + sg_2 z)/b]^{tr},$$

где  $a, b \in \{C\}$ ,  $|x| \leq n$ ,  $z, y, \Delta N \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ ,  $sg_j \in \{+, -\}$ ,  $tr \in \{\lceil p \rceil, \lfloor p \rfloor\}$  – тип округления.

Используя данные шаблоны, порождаем аналитические выражения для функций  $f_i$  и можем производить их оценивание и модификации. Таким образом, для фиксированных значений  $d, N$  и параметров  $\Pi = \{a, b, x, y, z, \Delta d, \Delta N, sg, tr\}$  можно вычислять функции  $f_i(d, N)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

3.2. *Целевая функция.* В алгоритме эволюционного синтеза целевая функция  $F$  вычисляется следующим образом. В цикле изменения  $N$  от  $N_{\min}$  до  $N_{\max}$  на основе данного аналитического описания семейства тестируемых графов диаметр  $d(G)$  графа  $G(N; f_1, \dots, f_n)$  вычисляется для каждого  $N$ . Затем это значение сравнивается с диаметром  $d(N)$  оптимального графа. Если они равны, то граф  $G(N; f_1, \dots, f_n)$  является оптимальным.

Целевая функция  $F$  оценивает сумму квадратов отклонений от диаметра  $d(N)$  для семейства тестируемых графов:

$$F = \sum_{N_{\min} \leq N \leq N_{\max}} (d(G(N; f_1, \dots, f_n)) - d(N))^2.$$

Такая целевая функция показывает качество аналитического описания графа  $G(N; f_1, \dots, f_n)$  и используется для получения семейств оптимальных сетей  $R_s(N, v, g)$ .

**3.3. Операторы алгоритма.** Оператор *мутации* применяется к особям, случайно выбранным из текущей популяции с вероятностью  $p_m \in [0, 1]$ . Мутация состоит в случайном изменении значения случайно выбранного параметра из  $\Pi$  описания особи на другую, случайно выбранную, величину из множества допустимых значений.

Оператор *кроссовера* (скрещивания) применяется к двум особям (родителям), случайно выбранным из текущей популяции с вероятностью  $p_c \in [0, 1]$ . Кроссовер состоит в порождении двух новых особей путем обмена частями хромосом (функциями из множества образующих  $f_1, \dots, f_n$ ,  $n \geq 2$ ) родителей.

Оператор *создания нового элемента* (особи) состоит в генерации случайных значений параметров шаблонов функций, описывающих семейство графов. Это позволяет добавить элемент случайности при создании популяции.

Оператор *селекции* (отбора) реализует принцип выживания наиболее приспособленных особей. Он выбирает наилучшие особи с минимальными диаметрами (описания наилучших семейств графов  $R_s(N, v, g)$ ) в текущей популяции.

**3.4. Итерационный процесс.** Для поиска оптимума заданной целевой функции  $F$  итерационный процесс вычислений в алгоритме эволюционного синтеза организован следующим образом.

**Первая итерация:** порождение начальной популяции. Все особи популяции создаются с помощью оператора *новый элемент*, с проверкой и отсеиванием всех непригодных особей. После заполнения массива популяции лучшие особи отбираются и запоминаются в массиве *best*.

**Промежуточная итерация:** шаг от текущей к следующей популяции. Основной шаг алгоритма состоит в создании нового поколения особей на основе массива *best* с использованием операций селекции, мутации, кроссовера и добавлением новых элементов.

После оценки целевой функции для каждой особи в поколении проводится сравнение величин этих функций с величинами целевых функций тех особей, которые сохранены в массиве *best*. В случае, если элемент из нового поколения лучше, чем элемент *best*[ $i$ ] для некоторого  $i$ , помещаем новый элемент на место  $i$  в массив *best* и сдвигаем в нем все остальные элементы на единицу вниз. Таким образом, лучшие элементы локализуются в верхней части массива *best*.

**Последняя итерация** (критерий остановки): итерации заканчиваются либо после выполнения заданного числа шагов  $T = t$ , либо после нахождения заданного числа оптимальных графов в данном диапазоне порядков  $N$ .

После выполнения данного количества шагов алгоритма получаем множество функций  $f_1, \dots, f_n$ , которые описывают семейство оптимальных (или близких к оптимальным) графов  $R_s(N, v, g)$ .

**4. Экспериментальные результаты.** Алгоритм эволюционного синтеза семейств был применен для поиска семейств графов со степенями 3, 4 и 6. Число итераций и размер популяции выбирались экспериментальным путем, основываясь на параметрах из [15, 16]. Результат выполнения программы показал, что алгоритм нашел параметрическое описание вида (5) для оптимальных циркулянтов со степенью 4 в большой области значений  $N = 100-5000$ . Такое решение было найдено в среднем за 183 итерации с ис-

Таблица 2

Семейства циркулянтных сетей

$v = 6$	$N(d)$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
Семейство из [8]	42(3), 292(6), 942(9), 2184(12), 4210(15), 7212(18)	1	$4\lfloor d/3 \rfloor$	$(4\lfloor d/3 \rfloor)^2$
Новое семейство	55(3), 333(6), 1027(9), 2329(12), 4431(15), 7525(18)	1	$\frac{8}{9}d^2 + \frac{2}{3}d$	$\frac{8}{9}d^2 + 2d + 2$

пользованием операции кроссовера и за 162 итерации без использования операции кроссовера при размере популяции в 40 особей (средние значения получены по результатам 50 экспериментов). Этот результат соответствует известному точному описанию оптимальных циркулянтных графов с  $v = 4$  и любым  $N$ .

Для циркулянтов со степенью 6 данный алгоритм нашел описание (6) семейства графов из [8]. С его помощью было также найдено (табл. 2) новое семейство циркулянтных графов со степенью 6 с числом вершин для заданного диаметра значительно большим, чем в (6).

Новые результаты были также получены для хорошо известного класса обобщенных графов Петерсена [7, 13], описываемых сетью  $R_2(N, 3, g)$  в данной работе. С помощью алгоритма были автоматически получены до этого неизвестные описания семейства графов  $R_2(N, 3, g)$  в виде  $L = \{1, 2d - 4; 2d - 2\}$  с  $s = 2$  и минимальным диаметром  $d \geq 4$  для каждого испытываемого четного  $N \geq 16$ . Новое описание и некоторые примеры представлены в табл. 3. Значение  $d$  изменялось от  $d = 4$  до  $d = 200$ . Данное решение было найдено в среднем за 65 итераций с использованием операции кроссовера и за 55 итераций без использования операции кроссовера при размере популяции в 100 особей (средние значения получены по результатам 100 экспериментов).

Таблица 3

Новое семейство сетей  $R_2(N, 3, g)$ 

$N \geq 16$	Диаметр	$a$	$b$	$c$
$(2d - 5)^2 + 3 \leq N \leq (2d - 3)^2 + 1$	$d$	1	$2d - 4$	$2d - 2$
$(2d - 3)^2 + 3 \leq N \leq (2d - 2)^2 + 2$	$d + 1$	1	$2d - 4$	$2d - 2$
16-26	4	1	4	6
28-38	5	1	4	6
28-50	5	1	6	8
52-66	6	1	6	8
52-82	6	1	8	10
84-102	7	1	8	10
38028-38810	100	1	196	198
38812-39208	101	1	196	198

Алгоритм эволюционного синтеза нашел также новое унифицированное оптимальное описание для каждого четного числа вершин  $N \geq 16$  для этого класса сетей  $R_2(N, 3, g)$  в следующем виде:

$$L^* = \{1, 2\lfloor \sqrt{N-2}/2 \rfloor, 2\lceil \sqrt{N-1}/2 \rceil\}.$$

Решение было найдено в среднем за 404 итерации с использованием операции кроссовера и за 413 итераций без использования операции кроссовера при размере популяции в 100 особей (средние значения получены по результатам 50 экспериментов).

**Заключение.** Представленный подход был успешно применен к автоматическому порождению описаний семейств сетей  $R_s(N, v, g)$  с экстремальными свойствами. Реализованный алгоритм эволюционного синтеза достаточно быстро нашел ранее известные описания семейств графов со степенями 4 и 6. Он также породил новые оптимальные семейства сетей  $R_s(N, v, g)$  со степенью 3 и нашел новое семейство графов со степенью 6, которое значительно улучшает известные результаты. Найденные с помощью предложенного подхода описания оптимальных семейств становятся основой для дальнейших теоретических исследований. Теоретически была доказана справедливость некоторых найденных описаний при любом значении параметра  $d$ , и таким образом получены бесконечные оптимальные семейства, что позволяет при проектировании ВС отказаться от разработки каталогов оптимальных структур, заменив их компактным аналитическим описанием графов. Следует отметить, что получение аналитически задаваемых семейств дает также возможность аналитического решения задачи поиска кратчайших путей для них и соответственно организации алгоритмов маршрутизации со сложностью  $O(1)$  и без путевых таблиц.

Предложенный метод может быть применен для проверки гипотез о качестве заданных описаний графов и существовании семейств графов с желаемыми свойствами. Алгоритм эволюционного синтеза будет также полезен при нахождении семейств графов с экстремальными свойствами для других классов сетей. Расширение представленного эволюционного алгоритма, основанного на шаблонах функций, может быть применено для создания математических формул, закономерностей и аналитических описаний других математических объектов и моделей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнеев В. В. Параллельные вычислительные системы. М.: Нолидж, 1999.
2. Монахов О. Г., Монахова Э. А. Параллельные системы с распределенной памятью: структуры и организация взаимодействий. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. Монахов О. Г. Параметрическое описание структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. 1979. № 80. С. 3.
4. Монахов О. Г., Монахова Э. А. Исследование топологических свойств регулярных параметрически описываемых структур вычислительных систем // Автометрия. 2000. № 2. С. 70.
5. Kwai D.-M., Parhami B. Tight bounds on the diameter of Gaussian cubes // Comput. Journ. 1998. 41, N 1. P. 52.

6. **Balaban A. T.** Reaction graphs // Graph Theoretical Approaches to Chemical Reactivity /Eds. D. Bonchev, O. Mekenyan. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994. P. 137.
7. **Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer networks: a survey // Journ. Parallel Distributed Comput. 1995. **24**. P. 2.
8. **Chen S., Jia X.-D.** Undirected loop networks // Networks. 1993. **23**. P. 257.
9. **Arden B. W., Lee H.** Analysis of chordal ring networks // IEEE Trans. Comput. 1981. **C-30**. P. 291.
10. **Boesch F. T., Wang J.-F.** Reliable circulant networks with minimum transmission delay // IEEE Trans. Circuits Syst. 1985. **CAS-32**. P. 1286.
11. **Монахова Э. А.** Об аналитическом описании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. 1981. № 90. С. 81.
12. **Morillo P., Comellas F., Fiol M. A.** The optimization of chordal ring networks // Commun. Technol. World Sci. 1987. P. 295.
13. **Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., Alegre I.** The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations // Ars Combinatoria. 1985. **20B**. P. 159.
14. **Bermond J.-C., Iliades G., Peyrat C.** An optimization problem in distributed loop computer networks // Proc. of 3rd Intern. conf. on Combinatorial Math. N. Y.: Acad. Sci., 1989. **555**. P. 45.
15. **Fogel D. B.** Evolutionary Computation: Toward a New Philosophy of Machine Intelligence. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1995.
16. **Koza J.** Genetic Programming. Cambridge: M.I.T. Press, 1992.
17. **Schwefel H.-P., Baeck T.** Artificial evolution: How and why? Genetic Algorithms and Evolution Strategy in Engineering and Computer Science // Recent Advances and Industrial Applications. Chichester: Willey, 1997. P. 1.
18. **Yao X.** Global optimization by evolutionary algorithms // Proc. of the 2nd Aizu Intern. Symp. on Parallel Algorithms / Architecture Synthesis. Japan: IEEE Press, 1997. P. 282.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,  
E-mail: monakhov@rav.ssc.ru*

*Поступила в редакцию  
18 сентября 2003 г.*