

В. В. Котляр, А. А. Ковалев

(Самара)

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ
ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С АКСИКОНОМ*

Рассмотрен фурье-коррелятор с пространственным фильтром в виде аксикона. Получено интегральное выражение типа свертки, связывающее комплексные амплитуды на входе и выходе данной оптической системы.

Введение. Оптический элемент, который называют аксиконом, известен достаточно давно [1]. Он используется, как правило, в оптике для создания узкого «бездифракционного» лазерного пучка [2, 3] или совместно с линзой для формирования узкого кольцевого распределения интенсивности света [4–6].

Использовать аксикон для формирования изображений прямолинейных объектов при подсчете треков частиц в ядерных фотоэмульсиях впервые было предложено в [7]. Раздел оптики, в котором используются изображающие оптические системы с кольцевым импульсным откликом, предложено называть мезооптикой [8, 9].

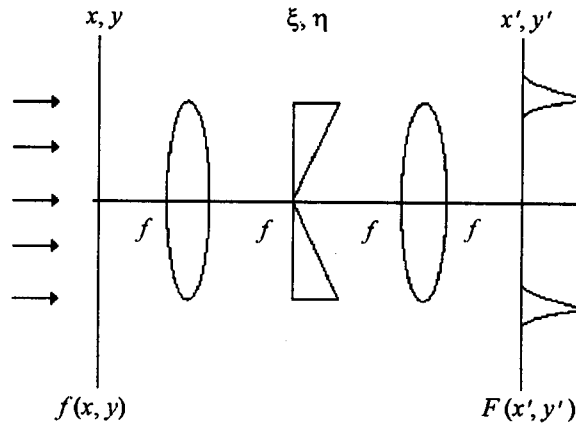
В работе [10] рассмотрена одна из базовых оптических схем мезооптики. Она приведена на рисунке. Такую оптическую схему нетрудно проанализировать с помощью методов фурье-оптики. В одномерном варианте была получена формула, связывающая комплексную амплитуду на выходе мезооптической системы $F(x')$ с комплексной амплитудой на входе $f(x)$, в виде

$$F(x') = \frac{d}{dx'} \left[f(x') + \frac{i}{\pi} \oint \frac{f(x) dx}{x' - x} \right]. \quad (1)$$

Правая часть уравнения (1) по форме является производной от преобразования Фуко – Гильберта [11].

Поскольку уравнение (1) получено для одномерного случая, а реальная оптическая схема на рисунке двумерная (комплексная амплитуда светового поля зависит от двух декартовых координат (x, y)), остается нерешенным во-

* Работа выполнена при поддержке Международного гранта CRDF (REC-SA-014-02), гранта Президента РФ (ИШ-1007.2003.1).



Типичная оптическая схема мезооптики: фурье-коррелятор, в частотной плоскости которого расположен аксикон

прос о применимости уравнения (1) для преобразования двумерных световых полей.

В данной работе строго получено двумерное уравнение, описывающее связь комплексных амплитуд на входе и выходе фурье-коррелятора, которое отличается от уравнения (1). Кроме того, рассмотрено интегральное преобразование, которое можно назвать разложением по коническим волнам аналогично тому, как интегральное преобразование Фурье называют разложением по плоским волнам.

Импульсный отклик изображающей системы с аксиконом. При отсутствии виньетирования пучков в оптической системе, показанной на рисунке, в плоскости перед аксиконом формируется фурье-образ входной комплексной амплитуды (при $k/f = 1$):

$$G(\xi, \eta) = \int \int_{R^2} f(x, y) \exp[-i(x\xi + y\eta)] dx dy. \quad (2)$$

Пусть функция пропускания аксикона имеет вид

$$H(\xi, \eta) = \exp(i\alpha \sqrt{\xi^2 + \eta^2}). \quad (3)$$

Тогда на выходе фурье-коррелятора (см. рисунок) сформируется световое поле, комплексная амплитуда которого пропорциональна фурье-образу от произведения функций (2) и (3) (оси x' и y' на выходе перевернуты по отношению к осям x и y):

$$F(x', y') = \int \int_{R^2} G(\xi, \eta) H(\xi, \eta) \exp[i(x'\xi + y'\eta)] d\xi d\eta. \quad (4)$$

По известному свойству фурье-преобразования выражение (4) можно записать в виде свертки:

$$F(x', y') = \int \int \int \int \int \int f(x, y) \exp[-i(x\xi + y\eta)] dx dy h(\alpha, \beta) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp[-i(\alpha\xi + \beta\eta)]d\alpha d\beta \exp[i(x'\xi + y'\eta)]d\xi d\eta = \\
& = (2\pi)^2 \iiint \delta(x + \alpha - x', y + \beta - y') f(x, y) h(\alpha, \beta) dx dy d\alpha d\beta = \\
& = (2\pi)^2 \int_{R^2} f(x, y) h(x' - x, y' - y) dx dy, \tag{5}
\end{aligned}$$

где

$$h(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint H(\xi, \eta) \exp[i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta. \tag{6}$$

В уравнении (5) учтено, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ix\xi) d\xi = 2\pi\delta(x).$$

Таким образом, задача свелась к нахождению частотной характеристики пространственного фильтра, в качестве которого выбран аксикон.

Запишем уравнение (6) в полярных координатах:

$$h(\rho, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\alpha r) \exp[ir\rho \cos(\varphi - \theta)] r dr d\varphi, \tag{7}$$

где $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $\xi = r \cos\varphi$, $\eta = r \sin\varphi$. Выделяя в (7) интеграл по r и избавляясь от сомножителя r в подынтегральном выражении, получим

$$h(\rho, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left\{ -i \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\alpha r) \exp[ir\rho \cos(\varphi - \theta)] dr \right] \right\} d\varphi. \tag{8}$$

Рассмотрим отдельно интеграл в квадратных скобках в уравнении (8):

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\alpha r) \exp[ir\rho \cos(\varphi - \theta)] dr = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) \exp(i\alpha\xi) \exp[i\xi\rho \cos(\varphi - \theta)] d\xi, \tag{9}
\end{aligned}$$

где $X(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0; \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$ — функция Хевисайда. Выражение (9) представляет собой обратное фурье-преобразование от функции Хевисайда:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) \exp(i\xi\omega) d\xi, \tag{10}$$

где $\omega = \alpha + \rho \cos(\varphi - \theta)$. В [10] показано, что фурье-образ функции Хевисайда имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) \exp(-i\xi\omega) d\xi = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega). \quad (11)$$

Тогда интеграл (10) можно записать в виде

$$I = \frac{i}{2\pi\omega} + \frac{\delta(\omega)}{2}. \quad (12)$$

Вернемся к прежним обозначениям и вместо уравнения (8) запишем

$$\begin{aligned} h(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -i \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{i}{2\pi(\alpha + \rho \cos(\varphi - \theta))} + \frac{\delta(\alpha + \rho \cos(\varphi - \theta))}{2} \right] \right\} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{d}{d\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \rho \cos(\varphi - \theta)} - \frac{i}{4\pi} \frac{d}{d\alpha} \int_0^{2\pi} \delta(\alpha + \rho \cos(\varphi - \theta)) d\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим по отдельности два интеграла в правой части уравнения (13):

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \rho \cos(\varphi - \theta)}, \quad (14)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \delta(\alpha + \rho \cos(\varphi - \theta)) d\varphi. \quad (15)$$

В обоих интегралах интегрирование проводится по периоду функции $\cos x$ от 0 до 2π , поэтому интеграл не изменится, если интегрировать по смещенному периоду от $-\theta$ до $2\pi - \theta$. Тогда интегралы (14) и (15) не будут зависеть от угла θ и примут вид

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\alpha + \rho \cos \varphi'} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{\alpha + \rho \cos \varphi'}, \quad (16)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \delta(\alpha + \rho \cos \varphi') d\varphi' = 2 \int_0^{\pi} \delta(\alpha + \rho \cos \varphi') d\varphi'. \quad (17)$$

В уравнениях (16) и (17) было учтено, что функция $\cos x$ четная. После замены переменных $\cos \varphi' = t$ интегралы (16) и (17) примут вид

$$I_1 = 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} (\alpha + \rho t)}, \quad (18)$$

$$I_2 = 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \delta(\alpha + \rho t). \quad (19)$$

Интеграл (19) по известному свойству δ -функции вычисляется непосредственно:

$$I_2 = 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\rho \sqrt{1-t^2}} \delta(t + \alpha/\rho) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}, & \alpha < \rho; \\ 0, & \alpha > \rho. \end{cases} \quad (20)$$

Для вычисления интеграла (18) можно воспользоваться неопределенным справочным интегралом [12]:

$$\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{a^2 + bx + \sqrt{(a^2-b^2)(a^2-x^2)}}{x+b} \right|, & |a| > |b|; \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \arcsin \left\{ \frac{a^2 + bx}{a|x+b|} \right\}, & |a| < |b|. \end{cases} \quad (21)$$

С учетом (21) интеграл (18) примет вид

$$I_1 = \frac{2}{\rho} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} (t + \alpha/\rho)} = \begin{cases} 0, & \alpha < \rho; \\ \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}, & \alpha > \rho. \end{cases} \quad (22)$$

Подставляя выражения (20) и (22) в (13), получим

$$h(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}, & \alpha > \rho; \\ \frac{-i}{2\pi} \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}, & \alpha < \rho \end{cases} \quad (23)$$

или окончательно

$$h(\rho) = \begin{cases} \frac{-\alpha}{2\pi(\alpha^2 - \rho^2)^{3/2}}, & \alpha > \rho; \\ \frac{-i\alpha}{2\pi(\rho^2 - \alpha^2)^{3/2}}, & \alpha < \rho. \end{cases} \quad (24)$$

При $\alpha = \rho$ $h(\rho) \rightarrow \infty$.

Таким образом, частотная характеристика пространственного фильтра в виде аксикона имеет кольцевую структуру ($\rho = \alpha$ – радиус кольца):

$$h(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(i\alpha r) J_0(\rho r) r dr = \begin{cases} \frac{-\alpha}{2\pi(\alpha^2 - \rho^2)^{3/2}}, & \alpha > \rho; \\ \frac{-i\alpha}{2\pi(\rho^2 - \alpha^2)^{3/2}}, & \alpha < \rho. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда связь между комплексной амплитудой на выходе фурье-коррелятора с кольцевым откликом и на входе с учетом уравнений (5) и (25) будет иметь вид

$$F(x', y') = -2\pi\alpha \iint_{R^2} \frac{f(x, y) dx dy}{[\alpha^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2]^{3/2}}. \quad (26)$$

Сравнение выражений (26) и (1) обнаруживает их существенное различие. Уравнение (26) можно рассматривать условно как обобщение преобразования Гильберта на двумерный случай. Известны и другие попытки определения двумерного преобразования Гильберта [11, 13]. Заметим, что если знаменатель подынтегрального выражения в (26) обращается в нуль, то сам интеграл (26) следует понимать в смысле принципиального (главного) значения Коши. Полезность уравнения (26) состоит в том, что с его помощью для идеальной изображающей системы можно получить точные решения для некоторых простых входящих функций $f(x, y)$, а также приближенное асимптотическое решение при $\alpha \rightarrow \infty$.

Разложение комплексной амплитуды света по коническим волнам. Интересно рассмотреть интегральное преобразование, аналогичное известным интегральным преобразованиям Фурье (разложение по плоским волнам), Френеля (разложение по параболическим волнам) и Кирхгофа (разложение по сферическим волнам), но которое раскладывает комплексную амплитуду света по коническим волнам:

$$G_\alpha(x, y) = \iint_{R^2} f(\xi, \eta) \exp[i\alpha \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] d\xi d\eta. \quad (27)$$

Выражение (27) также можно назвать преобразованием аксикона, так как для осевого точечного источника результатом будет коническая волна, формирующая осевую световую линию.

Уравнение (27) – это уравнение свертки, поэтому, пользуясь известным свойством интеграла свертки, вместо (27) можно записать

$$\mathfrak{I}(G_\alpha) = \mathfrak{I}(f) \mathfrak{I} \left[\exp \left(i\alpha \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] \quad (28)$$

или

$$G_\alpha = \mathfrak{I}^{-1} \left\{ \mathfrak{I}(f) \mathfrak{I} \left[\exp \left(i\alpha \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] \right\}, \quad (29)$$

где \mathfrak{F} и \mathfrak{F}^{-1} – прямое и обратное преобразования Фурье:

$$F(\xi, \eta) = \mathfrak{F}(f) = \iint_{R^2} f(x, y) \exp[-i(x\xi + y\eta)] dx dy. \quad (30)$$

Фурье-образ от функции, описывающей пропускание аксикона, представляется выражением (25), поэтому вместо (29) можно записать

$$G_\alpha(x, y) = \frac{-\alpha}{2\pi} \iint \frac{F(\xi, \eta) \exp[i(x\xi + y\eta)]}{(\alpha^2 - \xi^2 - \eta^2)^{3/2}} d\xi d\eta. \quad (31)$$

Из уравнения (31) следует, что преобразование аксикона оптически может быть выполнено с помощью фурье-коррелятора, аналогичного изображенному на рисунке, но вместо аксикона в качестве пространственного фильтра нужно использовать фильтр с кольцевой функцией пропускания вида

$$H(\xi, \eta) = -2\pi\alpha (\alpha^2 - \xi^2 - \eta^2)^{-3/2}. \quad (32)$$

В полярных координатах уравнение (31) будет иметь вид

$$G_\alpha(\rho, \theta) = \frac{-\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{F(r, \varphi) \exp[ir\rho \cos(\varphi - \theta)]}{(\alpha^2 - r^2)^{3/2}} r dr d\varphi. \quad (33)$$

Если функция $f(\xi, \eta)$ радиально-симметричная, то $F(r, \varphi) = F(r)$ и вместо (33) получим

$$G_\alpha(\rho) = -\alpha \int_0^\infty \frac{F(r) J_0(r\rho)}{(\alpha^2 - r^2)^{3/2}} r dr. \quad (34)$$

Из уравнений (28) и (31) можно получить обратное преобразование аксикона:

$$\mathfrak{F}(f) = \frac{\mathfrak{F}(G_\alpha)}{\mathfrak{F}\left[\exp\left(i\alpha\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]} \quad (35)$$

или



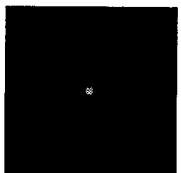
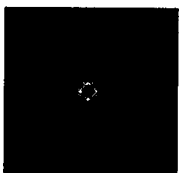
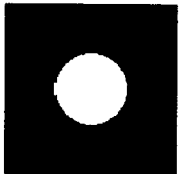
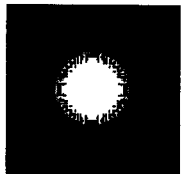
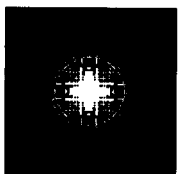
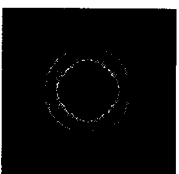
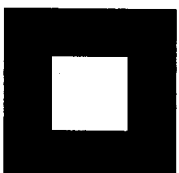
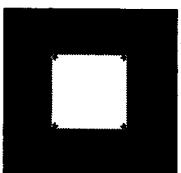
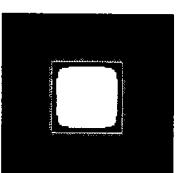
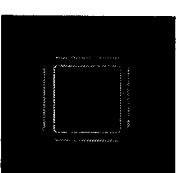





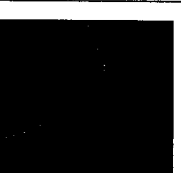
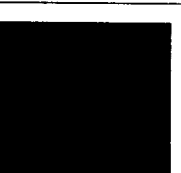
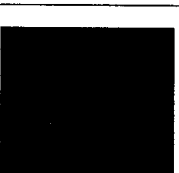
$$f(\xi, \eta) = \frac{-1}{\alpha(2\pi)^3} \iint g_\alpha(x, y) (\alpha^2 - x^2 - y^2)^{3/2} \exp[i(x\xi + y\eta)] dx dy, \quad (36)$$

где

$$g_\alpha(x, y) = \iint_{R^2} G_\alpha(\xi, \eta) \exp[-i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta. \quad (37)$$

Численные результаты. Моделирование преобразования комплексной амплитуды в фурье-корреляторе с аксиконом осуществлялось с помощью

Результаты прохождения изображений некоторых геометрических объектов
через мезооптический фурье-коррелятор при различных параметрах α

Исходное изображение	Выходное изображение		
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,3$
			
			
			
			
			

вычисления двух дискретных преобразований Фурье (прямого и обратного) и умножения на функцию пропускания аксикона (3):

$$F(x', y') = \mathfrak{F}^{-1}[H\mathfrak{F}[f(x, y)]], \quad (38)$$

где H – функция из уравнения (3). В дискретном варианте преобразование

Фурье (2) вычисляется в виде двойной суммы:

$$F_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{kl} \exp \left[-i \frac{2\pi}{N} (mk + nl) \right], \quad (39)$$

а функцию пропускания аксикона (3) выберем в виде

$$H_{mn} = \exp \left[-i\alpha \sqrt{(m - N/2)^2 + (n - N/2)^2} \right]. \quad (40)$$

В таблице приведены исходные изображения на входе фурье-коррелятора $|f(x, y)|^2$ (первый столбец): точка (один отсчет в центре изображения), круг (радиуса 25 отсчетов), квадрат (со стороной 50 отсчетов), отрезок прямой (длиной 60 и толщиной в один отсчет) и кривой (толщиной в один отсчет) линий, а также изображения на выходе фурье-коррелятора $|F(x', y')|^2$ (столбцы 2–4) для соответствующих параметров α : 0,05 (второй столбец), 0,1 (третий), 0,3 (четвертый). Матрицы отсчетов входной функции f_{kl} и выходной функции F_{mn} имеют размеры 128×128 отсчетов. Физические размеры этих изображений зависят от дискретности между отсчетами и могут быть выбраны произвольно.

Из таблицы видно, что с ростом параметра α , который пропорционален «силе» аксикона, одновременно происходит несколько видоизменений исходного изображения: подчеркиваются точки излома контура исходного изображения, подчеркивается весь контур исходного изображения, формируются два контура исходного изображения – внутренний и внешний.

Заключение. В работе рассмотрена простейшая оптическая схема мезооптики (фурье-коррелятор с аксиконом), которая является базовой для широкого класса оптических устройств [9]: измерителя внешней (внутренней) конусной поверхности в автоколлимационном режиме, мезооптических конфокальных кератометра и профилометра, интерферометра для анализа конических волновых фронтов и т. д. Получены следующие результаты:

1. Выведено уравнение, связывающее комплексные амплитуды света на входе и выходе фурье-коррелятора с аксиконом в качестве пространственного фильтра (уравнение (26)).

2. Показано, что интегральное преобразование, выполняемое в корреляторе с аксиконом, может быть представлено в виде разложения по коническим волнам.

3. С помощью численного моделирования показано, что фурье-коррелятор с аксиконом преобразует исходное изображение в зависимости от параметра «силы» аксикона, подчеркивая контур и формируя внутренний и внешний контуры изображения.

Авторы выражают благодарность Л. М. Сороко за инициирование данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McLeod J. H. The axicon: a new type optical element // JOSA. 1954. 44, N 8. P. 592.

2. Tremblay R., D'Astons Y., Roy G., Blanshard M. Laser plasma-optically pumped by focusing with axicon a CO₂-TEA laser beam in a high-pressure gas // Opt. Commun. 1979. 28, N 2. P. 193.
3. Michaltsova I. A., Nalivaiko V. I., Soldatenkov I. S. Kinoform axicon // Optik. 1984. 67, N 3. S. 267.
4. Belanger P., Rioux M. Ring pattern of a lens-axicon doublet illuminated by a Gaussian beam // Appl. Opt. 1978. 17, N 7. P. 1080.
5. Fedotovskiy A., Lehovec H. Optimal filter design for annular imaging // Appl. Opt. 1974. 13, N 12. P. 2919.
6. Коронкевич В. П., Пальчикова И. Г., Полещук А. Г. и др. Киноформные оптические элементы с кольцевым импульсным откликом. Новосибирск, 1985. 20 с. (Препр. /ИАиЭ СО АН СССР; 265).
7. Астахов А. Я., Комов Г. М., Сидорова В. И. и др. Конструкция фурье-микроскопа для ядерной фотоэмульсии // Сообщение ОИЯИ, 1983. P13-83-119, Дубна.
8. Soroko L. M. Axicons and mesooptical imaging devices // Progress in Optics /Ed. E. Wolf. Amsterdam: Elsevier, 1989. 27. P. 109.
9. Soroko L. M. Mesooptics: foundations and applications // World Scientific. Singapore, 1996.
10. Soroko L. M. Dirac delta-plus (or minus) function in optics and mesooptics. Дубна, 1987. (Препр. /ОИЯИ: E13-87-252).
11. Арбузов В. А., Федоров В. А. Оптическая реализация изотропного преобразования Гильберта // Автометрия. 1975. № 5. С. 27.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
13. Khonina S. N., Kotlyar V. V., Shinkarev M. V. et al. The phase rotor filter // Journ. Mod. Opt. 1992. 39, N 5. P. 1147.

*Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный
аэрокосмический университет,
E-mail: kotlyar@smr.ru*

*Поступила в редакцию
3 июня 2003 г.*