РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2004, том 40, № 3

УДК 621.391

А. И. Литвин, Л. А. Писаренко

(Томск)

ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УОЛША

Рассмотрены способы факторизации матриц преобразований Уолша. Предложенные алгоритмы факторизации матриц являются удобными для их реализации в реальном режиме времени, а также в векторном режиме для вычислительных устройств типа «одна команда, много данных».

В работах [1–7] описаны ортогональные дискретные преобразования Уолша и подробно рассмотрены их основные свойства. Ранее рассматривались только функции Радемахера, но множество функций Радемахера образует периодическую, ортогональную, но не полную систему функций. В работе [8] Уолш впервые получил полную ортонормированную систему прямоугольных функций, дополняющую систему функций Радемахера. Множество функций Уолша обычно разделяют на три группы, имеющие большое применение и отличающиеся порядком расположения функций (упорядочением).

Известно, что преобразования Уолша обладают рядом интересных свойств: по базису Уолша можно производить разложение сигналов в ряд Фурье – Уолша; они принимают всего лишь два значения (+1, –1) и поэтому удобны для вычислений на ЭВМ. Матрицы Уолша могут быть представлены в виде конечного числа разреженных матриц, что способствует сокращению числа операций и вычислительных ресурсов ЭВМ (увеличение быстродействия, уменьшение требуемой оперативной памяти и т. д.).

Кронекеровские и обобщенные кронекеровские произведения матриц. Пусть A и B – матрицы размера $m \times n$ и $k \times r$ соответственно над коммутативным кольцом R:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kr} \end{bmatrix}.$$

Определение 1. Кронекеровским произведением матриц A и B называется матрица C размера $mk \times nr$ вида [1–8]:

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Обозначим строки матрицы B через $B_1, B_2, ..., B_k$, а столбцы через $B^1, B^2, ..., B^r$.

Определение 2. Кронекеровским произведением матриц A и B по строкам называется матрица C вида [9–15]:

$$C = A \overline{\otimes} B = \begin{bmatrix} A & \otimes & B_1 \\ A & \otimes & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A & \otimes & B_k \end{bmatrix}.$$

Определение 3. Кронекеровским произведением матриц A и B по столбцам называется матрица C вида [9–15]:

$$C = A \widetilde{\otimes} B = [A \otimes B^1 \; A \otimes B^2 \ldots A \otimes B^r].$$

Факторизация матриц Уолша. Используя свойства обычных кронекеровских произведений матриц [1–4, 6–15], а также обобщенных кронекеровских произведений матриц по строкам и столбцам [9–15], опишем ряд факторизаций матриц Уолша.

Факторизация матриц Уолша – Адамара. Пусть $N = 2^n$, где n – целые положительные числа. Матрицы Уолша – Адамара можно представить в виде [1–3, 14–17]:

$$H_h(N) = \prod_{j=1}^{n} [E_{2^{(j-1)}} \otimes (H(2) \otimes E_{2^{(n-j)}})]; \tag{1}$$

$$H_h(N) = \prod_{j=1}^{n} [E_{2^{(n-j)}} \otimes (H(2) \otimes E_{2^{(j-1)}})]; \tag{2}$$

$$H_h(N) = [E_{2^{(n-1)}} \overline{\otimes} H(2)]^n; \tag{3}$$

$$H_h(N) = [E_{2^{(n-1)}} \widetilde{\otimes} H(2)]^n, \tag{4}$$

где $E_{2^{(j-1)}}$ – единичная матрица порядка $2^{(j-1)}$; $H(2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ – стандартная матрица Уолша – Адамара второго порядка. В отношении факторизаций матриц Уолша – Адамара сделаем несколько замечаний, которые используются в дальнейшем.

З а м е ч а н и е 1. Коммутативность факторизаций матриц Уолша – Адамара (1), (2) можно доказать, используя известное свойство симметрических матриц: произведение $C=AB$ симметрических матриц A и B является симметрическим тогда и только тогда, когда $C=BA$, а также тот факт, что матрицы Уолша – Адамара симметрические [1–5, 8, 16, 17]. Симметричность матриц итераций выражений (1) и (2) следует из свойства кронекеровского произведения матриц $(A\otimes B)^t=A^t\otimes B^t$, где t – символ транспонирования матриц [1–3].

З а м е ч а н и е 2. От выражения (3) к выражению (4) возможно перейти путем транспонирования матриц итераций. Это следует из свойства обобщенных кронекеровских произведений матриц (см. [9], свойство 6а): $(A\,\overline{\otimes}\,B)^t=A^t\,\overline{\otimes}\,B^t$ и симметричности матриц Уолша – Адамара.

З а м е ч а н и е 3. Выражение (2) совпадает с известным алгоритмом Кули – Тьюки [1–6, 8].

З а м е ч а н и е 4. Алгоритмы факторизаций матриц Уолша – Адамара по формулам (1) и (3) удобны для реализации их в реальном масштабе времени, так как для начала вычислений спектральных коэффициентов Уолша – Адамара достаточно иметь на входе только два первых отсчета исходных данных [9–12].

Примеры факторизаций матриц Уолша – Адамара (выражения (1)–(4)) при $N=8$, $n=3$:

$$H_h(8)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}^3=$$

$$
=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}.
$$

Факторизация матриц Уолша – Пэли [18]. Матрицу Уолша – Пэли порядка N можно также факторизовать следующим образом [9–15]:

$$
H_p(N)=\prod_{j=1}^{n}[(E_{2^{(n-j)}}\tilde{\otimes}H(2))\otimes E_{2^{(j-1)}}]. \tag{5}
$$

П р и м е р. $N=8$, $n=3$:

$$
H_p(8)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}.
$$

Матрицу Уолша – Пэли также можно представить в виде [11–13]:

$$H_p(N)=\prod_{j=1}^{n}[(E_{2^{(j-1)}}\,\overline{\otimes}\,H(2))\otimes E_{2^{(n-j)}}]. \tag{6}$$

Используя свойства обобщенных кронекеровских произведений матриц, матрицы Уолша – Пэли можно также факторизовать следующим образом [9–15]:

$$H_p(N)=\prod_{j=1}^{n}[E_{2^{(j-1)}}\otimes(E_{2^{(n-j)}}\,\overline{\otimes}\,H(2))], \tag{7}$$

$$H_p(N)=\prod_{j=1}^{n}[E_{2^{(n-j)}}\otimes(E_{2^{(j-1)}}\,\tilde{\otimes}\,H(2))]. \tag{8}$$

Пример. $N=8, n=3$:

$$H_p(8)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотренные выше способы факторизации матриц Уолша – Пэли удобны для реализации их в реальном режиме времени [9–15]. Заметим также, что ряд конечных результатов вышеприведенных факторизаций матриц Уолша – Пэли имеется в работах [1, 16, 17], но без достаточного обоснования и описания способов их получения.

Факторизация матриц Уолша – Качмажа. Среди преобразований Уолша – Качмажа наиболее применяемыми являются системы функций Уолша – Качмажа, так как они упорядочены по частоте следования и по аналогии с функциями синуса и косинуса подразделяются на нечетные и четные [1–5, 8, 16, 17]. К недостаткам алгоритмов преобразований Уолша – Качмажа можно отнести то, что факторизация их матриц, как правило, требует перестановок исходных данных путем двоичной инверсии и кодов Грея (прямого или обратного) [1, 3, 4] или достигается сложным путем [1, 3, 7]. Предлагаются алгоритмы факторизаций матриц Уолша – Качмажа, имеющие простое математическое описание и исключающие перестановки исходных данных [15–17]. Заметим, что перестановки исходных данных путем двоичной инверсии и кодов Грея снижают быстродействие алгоритмов ортогональных дискретных преобразований Уолша – Качмажа до 25–30 %.

Для первого способа факторизации матрицы Уолша – Качмажа введем понятие косокронекеровского произведения матриц по строкам: $C = A \hat{\otimes} B$, где матрица A кронекеровски перемножается на первую строку в прямом порядке, а на вторую в обратном порядке и т. д., например

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\otimes} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу Уолша – Качмажа можно представить в виде

$$H_w(N) = \prod_{j=1}^{n} [(E_{2^{(j-1)}} \hat{\otimes} H(2)) \otimes E_{2^{(n-j)}}]. \tag{9}$$

Второй способ факторизации матриц Уолша – Качмажа заключается в следующем. Введем понятие косокронекеровского произведения матриц по столбцам $C = A \check{\otimes} B$, где матрица A кронекеровски перемножается на первый столбец матрицы B в прямом порядке, затем на второй столбец матрицы B, но в обратном порядке и т. д., например

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \check{\otimes} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь матрицу Уолша – Качмажа можно представить в виде

$$H_w(N) = \prod_{j=1}^{n} [(E_{2^{(n-1)}} \check{\otimes} H(2)) \otimes E_{2^{(j-1)}}]. \tag{10}$$

П р и м е р. $N = 8$, $n = 3$:

$$H_w(8) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу Уолша – Качмажа можно также факторизовать в виде

$$H_w(N) = (E_{2^{(n-1)}} \tilde{\otimes} H(2)) \prod_{j=1}^{n-1} [E_{2^{(j-1)}} \otimes (E_{2^{(n-j)}} \overline{\otimes} H(2))]. \qquad (11)$$

В формуле (11) вычисления производятся сначала по $j = \overline{1, n-1}$, а затем рассматривается выражение $(E_{2^{(n-1)}} \tilde{\otimes} H(2))$, где первая строка верхней половины матрицы $E_{2^{(n-1)}}$ кронекеровски перемножается на матрицу $H(2)$, а вторая – на матрицу $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и т. д.; нижняя половина строк матрицы $E_{2^{(n-1)}}$ перемножается аналогично, но снизу вверх.

П р и м е р. $N = 8, n = 3$:

$$H_w(8) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Используя симметричность матриц Уолша–Качмажа, можно получить другую факторизацию этих матриц путем транспонирования матриц итераций:

$$H_w(8)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&-1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\end{bmatrix}.$$

Заметим, что последние две факторизации матриц Уолша – Качмажа отличаются от факторизаций матриц Уолша – Пэли по формулам (7), (8) лишь последними итерациями.

Рассмотренные способы факторизаций матриц Уолша имеют простое математическое описание. Алгоритмы быстрого преобразования Уолша – Пэли и Уолша – Качмажа исключают процедуры перестановки исходных данных с помощью двоичной инверсии и кодов Грея. Предложенные алгоритмы преобразований Уолша хорошо поддаются распараллеливанию, сокращают время обработки экспериментальной информации на ЭВМ и удобны для реализации их на спецпроцессорах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахмед Н., Рао К. Р.** Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980.
2. **Залманзон Л. А.** Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989.
3. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.
4. **Дагман Э. Е., Кухарев Г. А.** Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983.
5. **Ефимов А. В.** Математический анализ. Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложения. М.: Высш. шк., 1980.
6. **Лабунец В. Г.** Алгебраическая теория сигналов и систем. Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1984.
7. **Садыхов Р. Х., Чеголин П. М., Шмерко В. П.** Методы и средства обработки сигналов в дискретных базисах. Минск: Наука и техника, 1987.

8. **Walsh J. L.** A closed set of orthogonal functions // Amer. Journ. Math. 1923. **45**. P. 5.
9. **Быков В. И., Литвин А. И., Кожуховский А. Д. и др.** Обобщенные кронекеровские произведения матриц и их применения // Электрон. моделирование. 1991. **13**, № 5. С. 14.
10. **Зайцев А. П., Кожуховский А. Д., Литвин А. И.** О некоторых алгоритмах сжатия спектральной информации. Томск, 1986. 14 с. Деп. в ВИНИТИ 23.05.86, № 3765-В96.
11. **Зайцев А. П., Кожуховский А. Д., Литвин А. И.** Об алгоритмах быстрых преобразований Уолша. Томск, 1986. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 23.05.86. № 3764-В86.
12. **Литвин А. И.** Одно свойство обобщенных кронекеровских произведений матриц // III Междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993.
13. **Литвин А. И., Кожуховский А. Д., Иванова В. А., Росошек С. К.** Обобщенные кронекеровские произведения матриц и их приложения // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. Барнаул, 1991. С. 67.
14. **Литвин А. И., Кожуховский А. Д.** Обобщение кронекеровского произведения матриц // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. Новосибирск, 1989. С. 34.
15. **Литвин А. И.** Кронекеровские произведения матриц и их применения // Электрон. моделирование. 1994. **16**, № 2. С. 91.
16. **Kramer H.** On the representation of Walsh functions and fast Walsh transform algorithms // Angewandte Informatik. 1973. **15**, N 1. P. 7.
17. **Rusforth C. K.** Fast Fourier – Hadamard decoding of orthogonal codes // Inform. and Control. 1969. **15**, N 1. P. 35.
18. **Palley R. E.** A remarkable series of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1932. **34**, N 2. P. 241.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники,
E-mail: vm@fet.tusur.ru

Поступила в редакцию
4 июля 2002 г.