

Я. А. Фурман, А. А. Роженцов

(Йошкар-Ола)

**О ПРЕДЕЛЬНО ДОСТИЖИМЫХ ВЕРОЯТНОСТЯХ
ПРАВИЛЬНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ
МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ СИГНАЛОВ***

Решается задача определения предельно достижимых вероятностей правильного распознавания сигнала в виде упорядоченной совокупности k -мерных векторов. Обоснованы выбор пространства для представления сигналов, критерий принятия решения, вид эталонных сигналов алфавита и его объем, а также модель распознаваемого сигнала. Получено в виде $(k - 1)$ -кратного определенного интеграла от нормальной плотности распределения вероятностей выражение для расчета предельно достижимой вероятности правильного распознавания k -мерного сигнала. Экспериментально проверена правильность полученных аналитическим путем результатов.

Введение. Задача распознавания многомерных сигналов часто решается в постановке [1, 2]. Задан состоящий из M классов алфавит эталонных сигналов. Распознаваемый сигнал N представляет собой эталонный сигнал одного из классов, искаженный действием шума, причем некоторые из его параметров неизвестны или случайны. Распознающее устройство в соответствии с заданным критерием обеспечивает принятие наилучшего решения о классе сигнала N . Если предположить, что решение обязательно принимается в пользу одного из M классов алфавита, т. е. нет ситуаций, связанных с отказом от распознавания, то принятое решение может рассматриваться как двухальтернативное: либо сигнал распознан правильно, либо решение ошибочное. При таких условиях эффективность работы распознающего устройства характеризуется вероятностью правильного распознавания $P_{\text{пр}}$ и лучшее решение о классе сигнала достигается при максимизации данной вероятности, причем ни один из классов не имеет преимуществ перед любым из $M - 1$ остальных, т. е.

$$P_{\text{пр, макс}}(0) = P_{\text{пр, макс}}(1) = \dots = P_{\text{пр, макс}}(M - 1) = P_{\text{пр, макс}}, \quad (1)$$

где $P_{\text{пр, макс}}(j)$ – максимально достижимая вероятность правильного распознавания сигналов j -го класса, $j = 0, 1, \dots, M - 1$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-00243, № 01-01-00298, № 03-01-06550).

Пусть \mathbf{N} – дискретно-кодированный k -мерный сигнал. В общем виде его можно представить как совокупность k упорядоченных векторов $\mathbf{v}(n)$, $n = 0, 1, \dots, k-1$, или $\mathbf{N} = \{\mathbf{v}(n)\}_{0, k-1}$. Векторы $\mathbf{v}(n)$, образующие сигнал, назовем элементарными. В целях общности допускается отсутствие информации о том, какой из них является начальным (нулевым), но последовательность их перебора задана. Примерами подобных сигналов являются изображения групповых точечных объектов, заданных радиусами-векторами на комплексной плоскости [3, 4], контуры изображений [1–3], сложные амплитудно-фазокодированные гармонические сигналы, представленные последовательностью элементарных векторов, модули которых определяют амплитуду сигнала, а аргументы – начальную фазу сигнала в пределах кодовых интервалов [4, 5]. Достоинством такого представления является возможность использования аппарата контурного анализа для получения алгоритма обработки сигналов. На его основе с единых позиций могут быть найдены оптимальные алгоритмы обнаружения, оценки параметров, разрешения и распознавания зашумленных сигналов [3].

Цель данной работы заключается в определении алфавита сигналов из M классов, обеспечивающих в соответствии с (1) потенциально достижимую вероятность правильного распознавания сигнала любого из классов.

Поставленная задача отличается от чаще всего решаемых задач оптимального распознавания тем, что ни сам сигнал, ни размерность алфавита не заданы. Известными являются лишь структурные элементы сигнала в виде множества k -мерных векторов. На их основе необходимо получить эталонный сигнал в виде упорядоченного набора конкретных значений этих векторов для каждого из классов. Алфавит $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_j\}_{0, M-1}$, сформированный из таких сигналов \mathbf{E}_j , должен обеспечивать максимально возможные по сравнению с любыми другими видами сигналов и алфавитами вероятности $P_{\text{пр}}$, удовлетворяющие (1). Попутно возникают вопросы, связанные с выбором пространства для представления и преобразования k -мерных сигналов при их распознавании, с моделью распознаваемого сигнала, критерием принятия решения, и ряд других. Рассмотрим подходы к их решению.

Пространство для представления многомерных сигналов при решении задачи распознавания. Дискретно кодированный k -мерный сигнал будем рассматривать в виде k -мерного вектора $\mathbf{N} = \{\mathbf{v}(n)\}_{0, k-1}$, компонентами которого служат элементарные векторы $\mathbf{v}(n)$, $n = 0, 1, \dots, k-1$. Мерой схожести двух векторов является значение расстояния между ними. В линейном комплексном пространстве C^k , включающем в себя как частный случай линейное действительное пространство E^{2k} , квадрат расстояния между векторами \mathbf{N} и $\mathbf{\Gamma}$ есть

$$R_{\mathbf{N}, \mathbf{\Gamma}}^2 = \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{\Gamma}\|^2 - 2\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{\Gamma}).$$

В частности, когда \mathbf{N} и $\mathbf{\Gamma}$ – нормированные по энергии векторы, то $R_{\mathbf{N}, \mathbf{\Gamma}}^2 = 2[1 - \text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{\Gamma})]$. Поэтому нормированное скалярное произведение

$$\eta = (\mathbf{N}, \mathbf{\Gamma}) / \|\mathbf{N}\| \|\mathbf{\Gamma}\|$$

полностью характеризует степень схожести двух векторов. В пространстве C^k скалярное произведение η_{C^k} является комплексным числом, веществен-

ная часть $\text{Re}\eta_{C^k}$ которого равна скалярному произведению $\eta_{E^{2k}}$, полученному в пространстве E^{2k} [3, 6]. Наличие мнимой части $\text{Im}\eta_{C^k}$ повышает информативность меры схожести η_{C^k} по сравнению с $\eta_{E^{2k}}$. Если нормированное скалярное произведение в пространстве E^{2k} является мерой схожести k -мерных сигналов, инвариантной к их масштабу (энергии), то максимальное значение модуля нормированного скалярного произведения при задании этих сигналов в пространстве C^k дополнительно инвариантно к углам их поворотов и к сдвигам номеров начальных векторов каждого из сигналов [3, 7]. Данное свойство обуславливает предпочтительность комплексного пространства C^k для задания сигналов.

Используемый для этой цели ортогональный базис представляет собой полное семейство элементарных контуров (ЭК) [3]. Элементарный контур $\Gamma_m = \{\gamma_m(n)\}_{0, k-1}$ порядка m , $m=0, 1, \dots, k-1$, является k -угольной ориентированной фигурой с одинаковыми по модулю элементарными векторами, равными 1, и одинаковыми по величине углами между соседними элементарными векторами:

$$\Gamma_m = \{\gamma_m(n)\}_{0, k-1} = \left\{ \exp\left\{i\frac{2\pi}{k}mn\right\}\right\}_{0, k-1}. \quad (2)$$

В общем случае растянутый в $|\mu|$ раз и повернутый на угол $\Delta\phi$ элементарный контур Γ_m со сдвинутой на d элементарных векторов начальной точкой имеет вид

$$\mu\Gamma_m^{(d)} = |\mu| \exp\{i\Delta\phi\} \exp\left\{i\frac{2\pi}{k}m(n+d)\right\}_{0, k-1},$$

$$\mu = |\mu| \exp\{i\Delta\phi\}, \quad m=0, 1, \dots, k-1.$$

Скалярное произведение ЭК

$$\eta = (\Gamma_m, \Gamma_l) = \sum_{n=0}^{k-1} \exp\left\{i\frac{2\pi}{k}(m-l)n\right\} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq l, \\ k & \text{при } m = l. \end{cases} \quad (3)$$

Спектр ЭК монохроматичен:

$$\rho_j(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq m, \\ k & \text{при } j = m. \end{cases} \quad (4)$$

Квадраты норм ЭК $\|\Gamma_0\|^2 = \|\Gamma_1\|^2 = \dots = \|\Gamma_{k-1}\|^2 = k$ не зависят от их порядка j , а расстояния между ЭК разных порядков одинаковы и составляют $R = \sqrt{2k}$. Автокорреляционная функция (АКФ) $\mathbf{T}_m = \{\tau_m(d)\}$, $m=0, 1, \dots, k-1$, элементарного контура, понимаемая как набор скалярных произведений ЭК Γ_m и $\Gamma_m^{(d)}$, $d=0, 1, \dots, k-1$, представляет собой также ЭК, но имеющий порядок не m , а $k-m$ и растянутый в k раз, т. е.

$$\mathbf{T}_m = \{\tau_m(d)\}_{0, k-1} = k\Gamma_{k-m} = k\Gamma_m^*.$$

Выбор критерия принятия решения о классе распознаваемого сигнала и его анализ. Нахождение предельно достижимых вероятностей $P_{\text{пр}}$ целесообразно осуществить для критерия принятия решения, позволяющего по возможности сузить без значительного ущерба для практической ценности конечного результата количество влияющих на результат факторов. К этим существенным факторам следует отнести вид и размерность сигнала, объем алфавита и величину отношения сигнал/шум на входе устройства распознавания. Такими свойствами обладает критерий минимума расстояния [3]. В соответствии с ним k -мерный сигнал \mathbf{N} будет отнесен к s -му классу, если расстояние $R_{\mathbf{N}, \mathbf{A}_s}$ между ним и эталонным сигналом \mathbf{A}_s минимально по сравнению с расстоянием $R_{\mathbf{N}, \mathbf{A}_j}$, $j=0, 1, \dots, M-1$, до других эталонных классов:

$$R_{\mathbf{N}, \mathbf{A}_s}^2 = \min_j \left\{ \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{A}_j\|^2 - 2\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{A}_j) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \{v(n)\}_{0, k-1}, & v(n) &= |v(n)| \exp\{i\psi(n)\}; \\ \mathbf{A}_j &= \{\alpha_j(n)\}_{0, k-1}, & \alpha_j(n) &= |\alpha_j(n)| \exp\{i\phi_j(n)\}. \end{aligned}$$

Здесь $|v(n)|$ и $|\alpha_j(n)|$ – модули, а $\psi(n)$ и $\phi_j(n)$ – аргументы элементарных векторов \mathbf{N} и \mathbf{A}_j , $n=0, 1, \dots, k-1$, $j=0, 1, \dots, M-1$, соответственно.

Для применения критерия минимума расстояния нет необходимости в информации о законах распределения вероятностей зашумленных сигналов, об априорных вероятностях появления сигналов каждого из классов и значениях штрафов за неправильные решения. Между тем для достаточно часто встречающихся на практике условий, например при нормальном законе распределения вероятностей некоррелированного шума и аддитивной модели зашумленного сигнала, данный критерий является частным случаем широко используемого критерия минимума среднего риска.

С использованием критерия минимума расстояния максимизация вероятностей правильного распознавания зашумленного эталонного сигнала s -го класса для алфавита из M классов достигается при

$$\cos \Delta\phi_j \Rightarrow \begin{cases} +1 & \text{при } j=s, \\ -1 & \text{при } j \neq s, \end{cases} \quad s=0, 1, \dots, M-1, \quad \Delta\phi_j = \phi(n) - \phi_j(n).$$

В этом случае среднее значение реальной части скалярного произведения распознаваемого и соответствующего ему эталонного сигналов будет положительной величиной, т. е. $\overline{\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{A}_s)} > 0$, а средний квадрат расстояния между ними

$$\overline{R_{\min}^2} = \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{A}_s\|^2 - 2\overline{\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{A}_s)} < \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{A}_s\|^2, \quad s=0, 1, \dots, M-1. \quad (5)$$

Для эталонных сигналов остальных классов $\overline{\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{A}_s)} < 0$, а средний квадрат расстояния

$$\overline{R_{\max, j}^2} = \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{A}_j\|^2 + 2\overline{\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{A}_j)} > \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{A}_j\|^2, \quad j \neq s, \quad m=0,1,\dots, M-1.$$

Здесь и далее будем предполагать равенство энергий всех эталонных сигналов:

$$\|\mathbf{A}_1\|^2 = \|\mathbf{A}_2\|^2 = \dots = \|\mathbf{A}_s\|^2 = \dots = \|\mathbf{A}_M\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2. \quad (6)$$

Выражение (5) характеризует свойства распознаваемого сигнала \mathbf{N} по отношению к эталонному сигналу \mathbf{A}_s того же класса, что и \mathbf{N} . Поскольку $\cos\Delta\varphi_s = 1$, то $\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{A}_s) = (\mathbf{N}, \mathbf{A}_s)$. В связи с тем что операции вращения и сдвига начальной точки приводят к изменению реальной части скалярного произведения, распознаваемый сигнал \mathbf{N} должен быть получен из эталонного сигнала \mathbf{A}_s лишь путем зашумления без линейных преобразований последнего. Чтобы в результате зашумления ни один из классов не имел преимуществ при распознавании, не только нормы эталонных сигналов, но и плотности распределения вероятностей шума должны быть одинаковы для сигналов всех классов, а при уменьшении энергии шума расстояние между сигналами \mathbf{N} и \mathbf{A}_s должно стремиться к нулю:

$$\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{A}_s \quad \text{при} \quad \|\mathbf{Z}\|^2 \rightarrow 0,$$

$$R^2 = R_{\min}^2 = \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{A}_s\|^2 - 2\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{A}_s) \rightarrow 0, \quad s=0,1,\dots, M-1, \quad \|\mathbf{Z}\|^2 \rightarrow 0.$$

Здесь $\mathbf{Z} = \{\zeta(n)\}_{0, k-1}$ ($\zeta(n) = \zeta_1(n) + i\zeta_2(n)$, $n=0,1,\dots, k-1$) – k -мерный шумовой сигнал, участвующий в образовании распознаваемого сигнала каждого из M классов.

Из выражения (6) с учетом результатов анализа выражения (5) следует, что

$$R_{\max, j}^2 = \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{A}_j\|^2 + 2\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{A}_j) \rightarrow 4\|\mathbf{A}_j\|^2 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{Z}\|^2 \rightarrow 0.$$

Полученная величина $R_{\max, j} = 2\|\mathbf{A}_j\|$ есть расстояние между эталонным сигналом \mathbf{A}_s , относящимся к s -му классу, и любым другим эталонным сигналом \mathbf{A}_j из алфавита. Поскольку распознаваемый сигнал может относиться к любому из M классов, то попарное расстояние между k -мерными эталонными сигналами алфавита \mathbf{E} будет

$$R_{l, j} = 2\|\mathbf{A}\|, \quad l \neq j, \quad l, j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Так как нормы всех эталонных сигналов одинаковы, то из последнего выражения следует, что точки, соответствующие концам векторов M эталонных

сигналов $\{A_j\}_{0, M-1}$, расположены на поверхности k -мерной комплексной гиперсферы радиусом $\|A\|$. Они должны быть разнесены на максимально возможное на этой поверхности расстояние: $R_{\max} = 2\|A\|$. Для этого эталонные сигналы алфавита \mathbf{E} должны быть попарно антикоррелированы:

$$(A_l, A_j) / \|A_l\| \|A_j\| = -1, \quad l \neq j, \quad l, j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (7)$$

В результате знак перед скалярным произведением в выражении для квадрата расстояния станет положительным, а само скалярное произведение будет чисто вещественной величиной. В свою очередь, условие (7) задает определенные соотношения между размерностью k эталонных сигналов и количеством классов M в алфавите \mathbf{E} .

Суммируя результаты проведенного анализа, приходим к следующему выводу. Для достижения потенциальной эффективности работы устройства распознавания k -мерных векторных сигналов точки, определяемые концами векторов, должны быть расположены на поверхности заданной в пространстве C^k гиперсферы радиусом $\|A\|$ на максимально возможном друг от друга расстоянии: $R = 2\|A\|$. Для обеспечения этого условия нормированное скалярное произведение любой пары эталонных сигналов должно быть равным -1 .

Выбор эталонных сигналов и размерности алфавита. Взаимная равноудаленность расположенных на поверхности гиперсферы точек сигналов E_j алфавита $\mathbf{E} = \{E_j\}_{0, M-1}$ обеспечивает минимальную и одинаковую для каждого класса вероятность ошибочного распознавания. Их можно рассматривать как вершины вписанного в гиперсферу правильного многогранника с максимально равноудаленными вершинами. Отсюда следует, что задача получения алфавита \mathbf{E} из M k -мерных векторов есть задача распределения на поверхности k -мерной гиперсферы M равноудаленных точек E_j , $j = 0, 1, \dots, M-1$. Если предположить, что каждая из точек содержит одинаковый заряд, то подобная система обладает минимальной потенциальной энергией. Задача расположения зарядов на поверхности сферы для такой системы рассматривалась в начале прошлого века Дж. Дж. Томсоном [8], но общее ее решение до сих пор не найдено [9, 10]. Достаточно просто задача Томсона, а следовательно, и задача нахождения алфавита \mathbf{E} решаются, когда объем алфавита и размерность сигнала совпадают, т. е. когда $M = k$, $k = 2, 3, \dots$. В работе [11] описан подход к получению семейства из k симплексных сигналов на базе семейства из k ортогональных сигналов. Полное семейство симплексных сигналов $\{E_j\}_{0, k-1}$ (далее симплексных контуров (СК)) получается из полного семейства ЭК $\{\Gamma_j\}_{0, k-1}$ на основании подхода, описанного в [11]. В результате получим

$$E_j = \Gamma_j - \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \Gamma_l, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (8)$$

Данное семейство СК характеризуется такой же величиной расстояния между парами сигналов, как и семейство ЭК, из которых оно было получено. Но при этом энергия $E_{\text{simpl}} = \|E_j\|^2$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, каждого из СК E_j уменьши-

лась по сравнению с энергией $E_{\text{ort}} = \|\Gamma_j\|^2 = k$ элементарного контура Γ_j , $j=0,1,\dots,k-1$: $E_{\text{simpl}} = E_{\text{ort}}(1-1/k) < E_{\text{ort}}$, откуда

$$E_{\text{simpl}} = \|\mathbf{E}_j\|^2 = k-1. \quad (9)$$

Если теперь уравнивать энергии симплексных и ортогональных контуров, то расстояние между парой СК будет всегда больше, чем между парой ЭК, в $r = \frac{R_{\text{simpl}}}{R_{\text{ort}}} = \sqrt{\frac{k}{k-1}}$ раз. Для $k=2$ величина выигрыша $r=1,41$. С ростом размерности контуров она постепенно уменьшается, достигая при $k=10$ значения $r=1,054$.

Изометричное с элементарными контурами семейство СК может быть получено на базе соотношения (8):

$$\mathbf{E}_j = \Gamma_j - \mathbf{K}, \quad j=0,1,\dots,k-1. \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{K} = \{\kappa(n)\}_{0,k-1} = \{1,0,\dots,0\}$ – символ Кронекера. Согласно (10) между элементарными векторами симплексных и элементарных контуров существует следующая связь: $\gamma_j(0)=1$; $\varepsilon_j(0)=0$; $\gamma_j(n)=\varepsilon_j(n)$, $j=1,2,\dots,k-1$. В приложении приведены данные по семействам симплексных контуров с $k=2,3,4,5$.

Наличие всегда равного нулю элементарного вектора $\varepsilon_j(0)$ обуславливает незамкнутость любого СК, т. е.

$$\sum_{n=0}^{k-1} \varepsilon_j(n) \neq 0, \quad j=0,1,\dots,k-1.$$

Спектральная компонента $\mathbf{E}_j = \{\varepsilon_j(n)\}_{0,k-1}$ равна $\rho_{\mathbf{E}_j}(m) = \rho_{\Gamma_j}(m) - \rho_{\mathbf{K}}(m)$, $m=0,1,\dots,k-1$. Компонента спектра $\rho_{\mathbf{E}_j}(j)$ доминирует над остальными, равными между собой, компонентами. С ростом размерности СК разница между доминирующей компонентой $\rho(j)$ и всеми остальными увеличивается, и при больших значениях k спектр становится квазимонохроматичным, т. е. спектры симплексных и элементарных контуров практически совпадают. АКФ симплексного контура с учетом (10) будет

$$\tau_{\mathbf{E}_j}(d) = \begin{cases} k-1 & \text{при } d=0, \\ (k-2)\gamma_j^*(d) & \text{при } d=1,2,\dots,k-1. \end{cases} \quad (11)$$

Элементарные векторы $\gamma_j(n)$ равны по модулю 1. Поэтому, как следует из (11), модули отсчетов АКФ симплексных контуров, особенно при больших значениях размерности k , слабо отличаются друг от друга (рис. 1, а). Это свидетельствует о том, что между элементарными векторами симплексного контура \mathbf{E}_j , как и между элементарными векторами ЭК Γ_j , $j=0,1,\dots,k-1$, существует сильная связь.

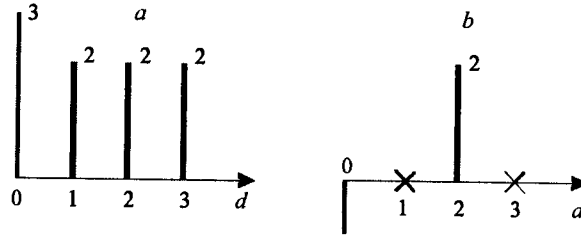


Рис. 1. Корреляционные функции симплексных контуров размерности $k = 4$: отсчеты модулей АКФ (а), отсчеты модулей ВКФ контуров E_1 и E_3 (б)

Взаимно корреляционная функция (ВКФ) симплексных контуров E_j и E_l , $j \neq l$, $j, l = 0, 1, \dots, k-1$, имеет вид

$$\tau_{E_j, E_l}(d) = \begin{cases} -1 & \text{при } d=0, \\ -\gamma_j^*(d) - \gamma_l^*(d) & \text{при } d=1, 2, \dots, k-1. \end{cases} \quad (12)$$

Отсюда следует, что не все отсчеты ВКФ симплексных контуров разных порядков в отличие от аналогичной функции ЭК равны нулю (рис. 1, б), а отсчет $\tau(0)$ этой функции всегда равен -1 . Следовательно, симплексные контуры при $d=0$ всегда более различимы, чем элементарные. Однако при других значениях d между СК разных порядков может существовать значительная более жесткая связь, чем между ЭК.

Таким образом, алфавит, оптимальный с позиции максимизации вероятностей распознавания k -мерных векторных сигналов при равной k размерности алфавита и одинаковой эффективности распознавания сигналов каждого из классов, состоит из эталонных сигналов в виде полного семейства симплексных контуров:

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_m\}_{0, k-1},$$

где

$$\mathbf{E}_m = \{\varepsilon_m(n)\}_{0, k-1}, \quad m=0, 1, \dots, M-1;$$

$$\varepsilon_m(0) = 0; \quad \varepsilon_m(n) = \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\}, \quad n=1, 2, \dots, k-1.$$

Модель распознаваемого сигнала и характеристики меры схожести распознаваемого и эталонных сигналов. Для решения задачи оценки потенциальной эффективности распознавания сигналов в виде k -мерных векторов остановимся на аддитивной модели зашумленного сигнала:

$$\mathbf{N} = \mathbf{E}_s + \mathbf{Z} = \{\varepsilon_s(n) + \zeta(n)\}_{0, k-1}, \quad s=0, 1, \dots, k-1.$$

Запишем выражения для меры схожести распознаваемого сигнала $\mathbf{N} = \mathbf{E}_s + \mathbf{Z}$ с эталонным контуром своего класса, т. е. с \mathbf{E}_s , и с эталонными контурами другого класса, например с \mathbf{E}_0 , $s \neq 0$. Если контуры \mathbf{E}_s и \mathbf{E}_0 имеют одинаковые нормы, то в качестве меры схожести η можно взять не расстояние

между распознаваемым сигналом \mathbf{N} и одним из СК \mathbf{E}_s или \mathbf{E}_0 , а реальную часть их скалярного произведения, т. е.

$$\eta_{\mathbf{N}, \mathbf{E}_s} = \operatorname{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{E}_s) = \operatorname{Re}(\mathbf{E}_s + \mathbf{Z}, \mathbf{E}_s) = \|\mathbf{E}_s\|^2 + \operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{E}_s), \quad (13)$$

$$\eta_{\mathbf{N}, \mathbf{E}_0} = \operatorname{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{E}_0) = \operatorname{Re}(\mathbf{E}_s + \mathbf{Z}, \mathbf{E}_0) = \operatorname{Re}(\mathbf{E}_s, \mathbf{E}_0) + \operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{E}_0).$$

Принимая во внимание выражения (11) и (12) при $d=0$, определяющие значения скалярных произведений СК, получим

$$\eta_{\mathbf{N}, \mathbf{E}_s} = (k-1) + \operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{E}_s) = (k-1) + \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{k-1} \zeta(n) \varepsilon_s^*(n), \quad (14)$$

$$\eta_{\mathbf{E}_0, \mathbf{N}} = -1 + \operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{E}_0) = -1 + \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{k-1} \zeta(n) \varepsilon_0^*(n). \quad (15)$$

Отсюда следует, что искомые меры схожести содержат постоянные и случайные составляющие. Рассмотрим более подробно случайные составляющие меры схожести в виде скалярных произведений $(\mathbf{Z}, \mathbf{E}_s)$ и $(\mathbf{Z}, \mathbf{E}_0)$, предполагая, что компоненты $\zeta_1(n)$ и $\zeta_2(n)$ шумового контура $\mathbf{Z} = \{\zeta(n)\}_{0, k-1} = \{\zeta_1(n) + i\zeta_2(n)\}_{0, k-1}$, $n=0, 1, \dots, k-1$, центрированные и независимые для любого из отсчетов шума с дисперсией σ_{in}^2 и корреляционным моментом

$$K[\zeta_1(n), \zeta_1(r)] = K[\zeta_2(n), \zeta_2(r)] = \sigma^2 \kappa(n-r), \quad n, r = 0, 1, \dots, k-1,$$

где $\kappa(n)$ – компонента символа Кронекера. Закон распределения величин $\zeta_1(n)$ и $\zeta_2(n)$ предполагается нормальным. Случайная величина $\zeta(n)$ является комплексной с математическим ожиданием $m_\zeta = 0$ и дисперсией $D[\zeta(n)] = 2\sigma_{\text{in}}^2$. Для скалярного произведения шумового \mathbf{Z} и эталонного \mathbf{A} контуров, т. е. случайной величины вида

$$\eta = (\mathbf{Z}, \mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{k-1} \zeta(n) \alpha^*(n) = \eta_1 + i\eta_2,$$

математические ожидания m_1 и m_2 вещественной η_1 и мнимой η_2 частей η равны нулю, а дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 вещественной и мнимой частей случайной величины η равны

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_{\text{in}}^2 \|\mathbf{A}\|^2.$$

Мера схожести распознаваемого сигнала $\mathbf{N} = \mathbf{E}_s + \mathbf{Z}$ с любым из эталонных сигналов из алфавита \mathbf{E} также распределена по нормальному закону с дисперсией $\sigma_1^2 = \sigma_{\text{in}}^2 \|\mathbf{E}\|^2 = (k-1)\sigma_{\text{in}}^2$, но с разными значениями математических ожиданий. Скалярное произведение распознаваемого $\mathbf{N} = \mathbf{E}_s + \mathbf{Z}$ и эталонного \mathbf{E}_s сигналов имеет математическое ожидание $m_s = k-1$, а скалярное произведение $(\mathbf{N}, \mathbf{E}_j)$ – математическое ожидание $m_j = -1$, $j=0, 1, \dots, M-1$,

$j \neq s$. Для плотностей распределения вероятностей мер схожести распознаваемого сигнала \mathbf{N} с эталонными сигналами алфавита \mathbf{E} можно записать:

$$f(\eta_{1, \mathbf{N}, \mathbf{E}_s}) = f[\operatorname{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{E}_s)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k-1}\sigma_{\text{in}}} \exp\left\{-\frac{(\eta_1 - k + 1)^2}{2(k-1)\sigma_{\text{in}}^2}\right\},$$

$$f(\eta_{1, \mathbf{N}, \mathbf{E}_j}) = f[\operatorname{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{E}_j)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k-1}\sigma_{\text{in}}} \exp\left\{-\frac{(\eta_1 + 1)^2}{2(k-1)\sigma_{\text{in}}^2}\right\},$$

$$s \neq j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

При образовании мер схожести распознаваемого сигнала $\mathbf{N} = \mathbf{E}_s + \mathbf{Z}$ с эталонными сигналами \mathbf{E}_j , $j = 0, 1, \dots, M-1$, участвует один и тот же шумовой контур \mathbf{Z} . Поэтому формируемые меры схожести коррелированы между собой. Взаимно корреляционный момент $K_{l,j}$ между реальными частями скалярных произведений $(\mathbf{Z}, \mathbf{E}_l)$ и $(\mathbf{Z}, \mathbf{E}_j)$, $l \neq j$, $l, j = 0, 1, \dots, k-1$, имеет вид

$$K_{l,j} = \sigma_{\text{in}}^2 \operatorname{Re}(\mathbf{E}_l, \mathbf{E}_j) = -\sigma_{\text{in}}^2, \quad l \neq j, \quad l, j = 0, 1, \dots, M-1, \quad (16)$$

т. е. меры схожести распознаваемого сигнала с эталонными сигналами различных классов алфавита \mathbf{E} антикоррелированы.

Определение потенциальной эффективности распознавания зашумленных симплексных контуров. При определении потенциальной эффективности распознавания предполагается, что все эталонные сигналы $\mathbf{E}_j = \{\varepsilon_j(n)\}_{0, k-1}$ из алфавита \mathbf{E} имеют одинаковые энергии, а распознаваемый сигнал $\mathbf{N} = \mathbf{E}_s + \mathbf{Z}$ представляет собой взятый из алфавита \mathbf{E} эталонный сигнал \mathbf{E}_s , подвергнутый затем воздействию шума. Решение принимается в пользу класса, для которого достигнуто максимальное значение меры схожести $\eta_{1,j} = \operatorname{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{E}_j)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$. Задача будет заключаться в определении аналитическим путем вероятности правильного распознавания сигнала $\mathbf{N} = \mathbf{E}_s + \mathbf{Z}$. Для определенности предположим, что распознаваемый сигнал относится к нулевому классу, т. е. $\mathbf{N} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{Z}$. В каждом j -м канале устройства распознавания вычисляется мера схожести $\eta_{0,j} = \operatorname{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{E}_j)$. Событие правильного распознавания будет иметь место лишь тогда, когда разность между мерами схожести $\Delta\eta_{0,j} = \eta_{0,0} - \eta_{0,j}$, формируемыми нулевым каналом и любым из остальных каналов, не будет отрицательным числом, т. е. когда

$$\Delta\eta_{0,j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \quad (17)$$

Пусть $f(\Delta\eta_{01}, \Delta\eta_{02}, \dots, \Delta\eta_{0, k-1})$ — $(k-1)$ -мерная плотность распределения вероятностей разностей мер схожестей $\Delta\eta_{0,j}$, образующихся в нулевом и j -м, $j = 1, 2, \dots, k-1$, каналах. Тогда в соответствии с условием (17) вероятность правильного распознавания зашумленного симплексного контура $\mathbf{E}_0 = \{\varepsilon_0(n)\}_{0, k-1}$ будет иметь вид

$$P_{\text{пр}} = \underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_{k-1} f(\Delta\eta_{01}, \Delta\eta_{02}, \dots, \Delta\eta_{0, k-1}) d(\Delta\eta_{01}) d(\Delta\eta_{02}) \dots d(\Delta\eta_{0, k-1}). \quad (18)$$

Корреляционная матрица системы случайных величин $\Delta\eta_{01}, \Delta\eta_{02}, \dots, \dots, \Delta\eta_{0, k-1}$ запишется в виде $\mathbf{W} = k\sigma_{\text{in}}^2 \mathbf{v}$, где

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{v} имеет порядок, равный $k-1$.

При принятых допущениях плотность $f(\Delta\eta_{01}, \Delta\eta_{02}, \dots, \Delta\eta_{0, k-1})$ подчиняется нормальному закону распределения, т. е.

$$\begin{aligned} f(\Delta\eta_{01}, \Delta\eta_{02}, \dots, \Delta\eta_{0, k-1}) &= \frac{\sqrt{|\mathbf{C}|}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} c_{i,j} (\Delta\eta_{0i} - \overline{\Delta\eta_{0i}})(\Delta\eta_{0j} - \overline{\Delta\eta_{0j}})\right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi^{(k-1)/2} k^{k/2} \sigma_{\text{in}}^{k-1}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} c_{i,j} (\Delta\eta_{0i} - k)(\Delta\eta_{0j} - k)\right\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{W}^{-1}$. Поскольку сигналы всех k классов не имеют при распознавании никаких преимуществ друг перед другом, то полученное выражение для $(k-1)$ -мерной плотности распределения вероятностей может быть использовано в (18) для определения вероятностей правильного распознавания любого из k классов алфавита $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_j\}_{0, k-1}$.

Определение вероятностей правильного распознавания для алфавита \mathbf{E} по формуле (18) и путем моделирования процесса распознавания дало очень близкие результаты. Степень их совпадения зависит от точности представления k -кратного интеграла (18) и количества опытов L при моделировании. Учитывая более высокую сложность получения вероятностей $P_{\text{пр}}$ путем вычисления этого интеграла по сравнению с моделированием процесса распознавания, дальнейшие результаты были получены именно вторым способом.

На рис. 2 приведены найденные в соответствии с выражением (18) графики зависимостей предельно достижимых вероятностей правильного распознавания зашумленных сигналов в виде СК из алфавита \mathbf{E} для разных от-

ношений сигнал/шум $q = \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{k\sigma_{\text{in}}^2} = \frac{k-1}{k\sigma_{\text{in}}^2}$ и соответствующие числовые данные.

Для сравнения на этих же графиках приведены аналогичные зависимости для алфавита из полного семейства ЭК $\{\Gamma_j\}_{0, k-1}$. Каждое значение вероятности вычислялось по результатам $3 \cdot 10^4$ опытов.

Полученные значения вероятностей $P_{\text{пр}}$ характеризуют эффективность правильного распознавания зашумленных изображений симплексных или

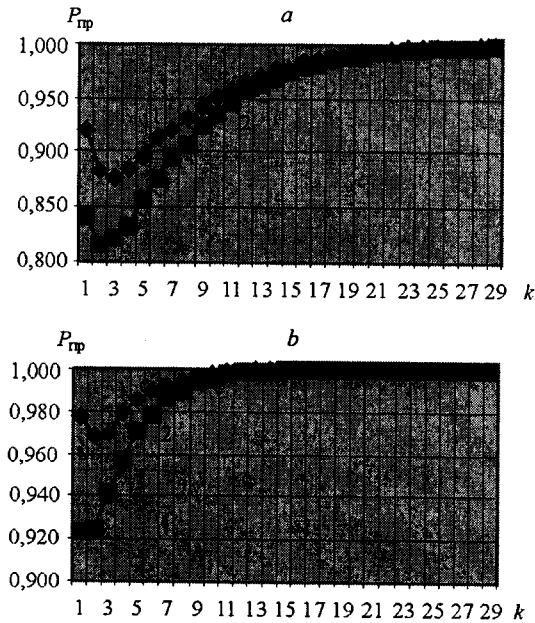


Рис. 2. Вероятности правильного распознавания k -мерных векторных сигналов, полученные для отношения сигнал/шум $q = 1$ (а) и $q = 2$ (б): симплексные сигналы (кривые 1), ортогональные сигналы (кривые 2)

элементарных контуров независимо от номера их класса, т. е. эти данные можно отнести к любому классу, номер которого находится в пределах от 0 до $k - 1$. Именно поэтому вероятности правильного распознавания для алфавита $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_j\}_{0, k-1}$ являются предельно достижимыми для сигналов в виде любой конструкции из k -мерных векторов.

Приведенные на рис. 2 зависимости вероятностей правильного распознавания от величины размерности k распознаваемых сигналов имеют нелинейный характер. Начиная со значения $k = 2$, вероятности $P_{гр}$ с ростом k уменьшаются, достигая минимального значения при $k = 4, \dots, 6$, а затем монотонно увеличиваются. Такое поведение зависимостей имеет место при распознавании зашумленных как симплексных, так и элементарных контуров. Это – следствие влияния нескольких факторов. В целом с ростом величины k вероятность правильного распознавания зашумленных СК из алфавита \mathbf{E}

1) снижается из-за уменьшения расстояния между эталонными контурами $\{\mathbf{E}_j\}_{0, k-1}$;

2) снижается из-за роста количества параллельно работающих каналов, не соответствующих классу распознаваемого сигнала, работа каждого из которых может стать причиной ошибочного решения;

3) увеличивается вследствие роста отношения сигнал/шум в канале, соответствующем классу распознаваемого сигнала при фиксированном отношении сигнал/шум на входе распознающего устройства.

Первые два из приведенных факторов оказывают существенное влияние лишь при небольших значениях k , в то время как действие третьего фактора пропорционально величине k . Поэтому представленные на рис. 2 графики $P_{гр} = f(k)$ в области небольших значений k отражают влияние первых двух

Размерность k	Отношение сигнал/шум			
	$q = 1$		$q = 2$	
	СК	ЭК	СК	ЭК
2	0,921	0,842	0,977	0,924
3	0,884	0,816	0,969	0,925
4	0,876	0,822	0,970	0,942
5	0,886	0,834	0,979	0,957
6	0,897	0,858	0,985	0,970
7	0,914	0,878	0,990	0,979
8	0,921	0,896	0,992	0,987
9	0,931	0,908	0,995	0,990
10	0,942	0,926	0,997	0,994

факторов, т. е. вероятности $P_{\text{пр}}$ уменьшаются с ростом k . Начиная со значений $k > 6$, доминирует третий фактор. Поэтому вероятности $P_{\text{пр}}$ увеличиваются с ростом k .

Анализируя графики на рис. 2 и данные таблицы, необходимо отметить следующее обстоятельство. Рост значения k приводит к уменьшению разницы между вероятностями $P_{\text{пр}}$, полученными при распознавании сигналов на базе симплексных и элементарных контуров. При значениях k порядка 20 и более эта разница с практической точки зрения становится несущественной. Поэтому, начиная с $k > 20$, полное семейство ЭК $\{\Gamma_j\}_{0, k-1}$ образует алфавит эталонных сигналов с такой же, как и у алфавита $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_j\}_{0, k-1}$, помехоустойчивостью при распознавании.

Закключение. Рассмотренная в данной работе проблема потенциальной эффективности распознавания комплекснозначных векторных сигналов решалась с позиции рассмотренной в [12] интерпретации потенциальной помехоустойчивости информационной системы. В качестве меры различия двух сигналов выбрано расстояние между задающими их векторами. Помехоустойчивость распознающей системы характеризовалась вероятностью правильного распознавания $P_{\text{пр}} = 1 - P_{\text{ош}}$, где $P_{\text{ош}}$ – вероятность ошибочного распознавания сигнала. Предполагалось, что величина $P_{\text{пр}}$ одинакова для всех классов распознаваемых сигналов.


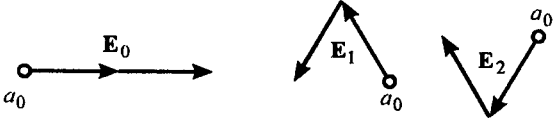
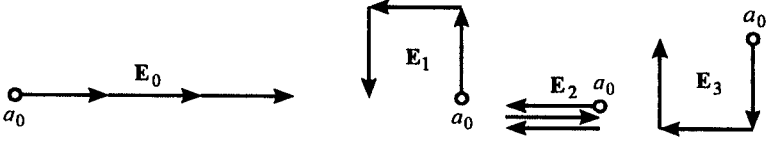
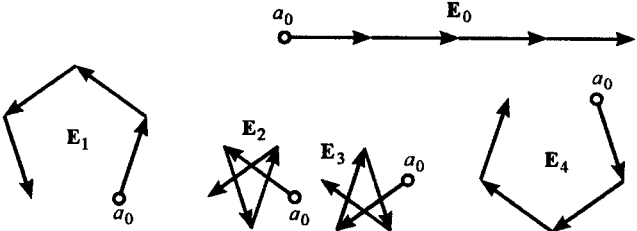
Показано, что потенциальная помехоустойчивость обеспечивается при распознавании сигналов из алфавита в виде полного семейства симплексных сигналов. Так, например, если комплекснозначный сигнал составлен из векторов размерности $k = 3$, то максимальная вероятность правильного распознавания произвольного сигнала, составленного из таких векторов, на фоне белого шума для алфавита из $M = k = 3$ классов не может превышать значения $P_{\text{пр, max}} = 0,921$ при отношении сигнал/шум на входе, равном 1.

Анализ процесса распознавания зашумленных симплексных сигналов показал сильную зависимость вероятностей правильного распознавания от преобразований вращения и сдвига начальных точек. Поэтому с практиче-

ской точки зрения при обработке комплекснозначных сигналов значительно больший интерес для построения помехоустойчивых систем распознавания представляют семейства элементарных контуров, являющихся ортогональными сигналами [13, 14]. По эффективности распознавания они незначительно проигрывают симплексным сигналам. Например, при $M = k = 3$ и отношении сигнал/шум, равном 1, вероятность правильного распознавания для них $P_{\text{пр}} = 0,842$. Однако полученные результаты распознавания инвариантны к линейным преобразованиям элементарных контуров, а различие в вероятностях $P_{\text{пр}}$ по сравнению с симплексными контурами уменьшается с ростом размерности k .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Изображения и коды полных семейств симплексных контуров, образующих алфавиты E размерностью $M = k = 2, \dots, 5$

$E_0 = \{0; 1\}; \quad E_1 = \{0; -1\}$ 	$k = 2$
$E_0 = \{0; 1; 1\}; \quad E_1 = \{0; -0,5 + 0,866i; -0,5 - 0,866i\};$ $E_2 = \{0; -0,5 - 0,866i; -0,5 + 0,866i\}$ 	$k = 3$
$E_0 = \{0; 1; 1; 1\}; \quad E_1 = \{0; i; -1; -i\};$ $E_2 = \{0; -1; 1; -1\}; \quad E_3 = \{0; -i; -1; i\}$ 	$k = 4$
$E_0 = \{0; 1; 1; 1; 1\};$ $E_1 = \{0; 0,309 + 0,951i; -0,809 + 0,588i; -0,809 - 0,588i; 0,309 - 0,951i\};$ $E_2 = \{0; -0,809 + 0,588i; 0,309 - 0,951i; 0,309 + 0,951i; -0,809 - 0,588i\};$ $E_3 = \{0; -0,809 - 0,588i; 0,309 + 0,951i; 0,309 - 0,951i; -0,809 + 0,588i\};$ $E_4 = \{0; 0,309 - 0,951i; -0,809 - 0,588i; -0,809 + 0,588i; 0,309 + 0,951i\}$ 	$k = 5$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Методы компьютерной обработки изображений** /Под ред. В. А. Сойфера. М.: Физматлит, 2001.
2. **Барабаш Ю. Л., Варский Б. В., Зиновьев В. Т. и др.** Вопросы статистической теории распознавания /Под ред. Б. В. Варского. М.: Сов. радио, 1977.
3. **Фурман Я. А., Кревецкий А. В., Передреев А. К. и др.** Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов. М.: Физматлит, 2002.
4. **Фурман Я. А.** Помехоустойчивые символы для передачи сообщений // *Автометрия*. 1996. № 1. С. 42.
5. **Фурман Я. А., Роженцов А. А., Хафизов Р. Г.** Дискретно-кодированные сигналы на базе композиционных контуров // *Автометрия*. 1996. № 1. С. 72.
6. **Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.** Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974.
7. **Егошина И. Л., Михайлов А. И., Фурман Я. А.** Оценка степени сходства двух плоских форм // *Автометрия*. 1995. № 4. С. 19.
8. **Whyte L. L.** Unique arrangements of points on a sphere // *The Amer. Math. Monthly*. 1952. 59, N 9. P. 606.
9. **Тот Л. Ф.** Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958.
10. **Андреев И. Н., Темковский С. А., Юдин В. А.** Приближение индивидуальных функций – от Чебышева до наших дней // *Российская наука: день нынешний и день грядущий. Сб. научно-популярных статей* /Под ред. В. П. Скулачева. М.: Academia, 1999. С. 12.
11. **Филиппов Л. И.** Теория передачи дискретных сигналов: Учебное пособие для вузов. М.: Выш. шк., 1981.
12. **Харкевич А. А.** Борьба с помехами. М.: Наука, 1965.
13. **Фурман Я. А.** О понятии формы плоского изображения // *Автометрия*. 1992. № 5. С. 113.
14. **Фурман Я. А.** О двух замечательных видах замкнутых контуров изображений // *Радио-техн. и электроника*. 1993. 38, № 6. С. 1054.

*Марийский государственный
технический университет,
E-mail: rts@marstu.mari.ru*

*Поступила в редакцию
30 октября 2003 г.*