РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2004, том 40, № 3

УДК 681.518 : 519.68

И. А. Ходашинский

(Томск)

ОЦЕНИВАНИЕ ВЕЛИЧИН СРЕДСТВАМИ НЕЧЕТКОЙ АРИФМЕТИКИ

Рассмотрены процедуры оценивания величин, выраженных в виде нечетких чисел. Базой для оценки выбрано нечеткое треугольное число. Приведены примеры оценивания нечетких трапециевидных и параболических чисел треугольными эквивалентами. Рассмотрены вопросы нахождения среднего значения нескольких нечетких треугольных чисел. Определены операции для оценки сложных свойств.

Введение. Под величиной будем понимать сущность, в которой проявляются измеряемые, вычисляемые или оцениваемые свойства. Эти свойства являются частью описания объекта, явления, процесса и определяют аспекты их поведения. Характерным признаком величины является изменчивость, причем пределы возможных изменений могут быть достаточно точно определены априори.

В теории оценивания можно выделить несколько подходов.

1. *Логико-философский* (*аксиологический*) подход. Здесь оценка – это субъективное сравнение или отношение, касающееся объектов, событий, явлений и выраженное в положительной или отрицательной форме, в форме согласия или критики, в предпочтении или неприятии, одобрении или осуждении [1].

2. *Когнитивно-лингвистический* подход предполагает переход от ценностной ориентации оценок к расширенному их толкованию [2]. Здесь различают четыре типа оценок: а) количественные оценки выражаются через описание размерности оцениваемых объектов; б) прототипические оценки – это сравнение со свойствами, присущими большинству рассматриваемых предметов оценивания; шкала прототипических оценок содержит значения нормы, минимум и максимум; в) гомеостатические или целевые оценки характеризуют имеющиеся у оценивающего субъекта ресурсы, требующиеся для достижения некоторой цели; шкала данного типа оценок упорядочивает затраты ресурсов от минимального до максимального; г) общие оценки – это по сути оценки в их логико-философском толковании.

3. *Статистическая теория* оценок нацелена на определение количественных характеристик случайных величин в условиях ограниченного числа испытаний и базируется на методах теории вероятностей. Основой этих методов является положение о том, что усредненные случайные характеристи-

ки изучаемых объектов, событий и явлений приближаются к детерминированным при возрастании числа измерений, испытаний или наблюдений.

4. *Оценивание в интервальном анализе* имеет своей целью получить приближенный ответ при решении задач, оценить возможную погрешность и полученный результат. Природа неопределенности величин, с которой имеет дело интервальный анализ, принципиально отличается от той, с которой оперирует статистический анализ. Последний имеет дело со случайными величинами, в то время как интервальный анализ с ненадежными данными. Основным понятием в интервальном анализе является интервальное число, которое задается двумя вещественными числами, представляющими собой нижнюю и верхнюю оценки [3].

В данной работе рассматривается задача нечеткого оценивания, которая сводится к нахождению некоторой величины на основе уже имеющихся оценок величин, полученных различными методами и представленных в различных шкалах и разными способами.

Постановка задачи. Предметом оценивания является экстенсивно выраженные свойства объекта, явления, процесса. Правило оценивания любой величины будем представлять в виде структуры, включающей в себя три компонента, каждый из которых выражает: относительность оценивания, характер оценивания, статику либо динамику измеряемых свойств объекта. В соответствии с этим будем различать абсолютные и сравнительные, четкие и нечеткие, статические и динамические оценки величин. Отметим, что полная оценка величины включает все три составные части [4]. В данной работе рассмотрим четкие и нечеткие оценки (последние выражены нечеткими числами).

Рассмотрим формальную постановку задачи в терминах теории измерений [5]. Пусть имеется шкала $\langle S, ES1, f \rangle$, в которой f отображает S в $ES1$, и пусть имеется шкала $\langle S, ES2, g \rangle$, где g отображает S в $ES2$ (здесь S – область исследования; $ES1, ES2$ – два произвольных множества оценок величин). Необходимо определить операции, которые по оценке величины $f(a)$ позволили бы найти $g(a),\ a \in S$.

Нечеткие числа.

Определение 1. Нечеткое множество $\widetilde{A}$, определенное на базовом множестве X, задается своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x) \in [0,1]$. α-подмножество $A(\alpha)$ нечеткого множества $\widetilde{A}$ определяется как

$$A(\alpha) = \{x \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha, | x \in X\},\ \alpha \in (0,1].$$

Определение 2. Нечетким числом общего вида $\widetilde{a}(\alpha)$ будем называть пару функций

$$[a_-(\alpha),\ a_+(\alpha)]\colon \alpha \in (0,1],\ a_-\colon [0,1] \to (-\infty, +\infty),\ a_+\colon [0,1] \to (-\infty, +\infty),$$

удовлетворяющих следующим требованиям:

1) $a_-(\alpha)$ является ограниченной, непрерывной, монотонно неубывающей, $a_+(\alpha)$ – ограниченной, непрерывной, монотонно невозрастающей;

2) $\forall \alpha (a_-(\alpha) \leq a_+(\alpha))$.

Частным случаем нечеткого числа является нечеткое треугольное число, которое задается тройкой (a_1, a_0, a_2), где a_0 представляет собой значение из множества X с максимальной функцией принадлежности; $(a_2 - a_1)$ – это базис, характеризующий степень нечеткости числа. Параметрическая запись нечеткого треугольного числа $\widetilde{a}(\alpha)$, заданного тройкой (a_1, a_0, a_2), будет иметь следующий вид:

$$\widetilde{a}(\alpha)=\begin{cases} a_-(\alpha)=a_1+(a_0-a_1)\alpha; \\ a_+(\alpha)=a_2+(a_0-a_2)\alpha. \end{cases}$$

Трапециевидное представление нечетких чисел является не менее распространенным, чем треугольное представление. Параметрическая запись нечеткого трапециевидного числа $\widetilde{u}(\alpha)$, заданного четверкой $(u_1, u_{01}, u_{02}, u_2)$, имеет вид

$$\widetilde{u}(\alpha)=\begin{cases} u_-(\alpha)=u_1+(u_{01}-u_1)\alpha; \\ u_+(\alpha)=u_2+(u_{02}-u_2)\alpha. \end{cases}$$

Параметрическая запись параболического числа $\widetilde{o}(\alpha)$, заданного парой (p, s), следующая:

$$\widetilde{o}(\alpha)=\begin{cases} o_-(\alpha)=p-s\sqrt{1-\alpha}; \\ o_+(\alpha)=p+s\sqrt{1-\alpha}. \end{cases}$$

Параметрическая запись гауссова числа $\widetilde{n}=(m_0, \sigma_0)$ имеет вид

$$\widetilde{n}(\alpha)=\begin{cases} n_-(\alpha)=m_0-\sigma_0\sqrt{-\ln(\alpha)}; \\ n_+(\alpha)=m_0+\sigma_0\sqrt{-\ln(\alpha)}. \end{cases}$$

Операции. Арифметические операции над нечеткими числами можно задать, используя принцип обобщения. Пусть даны два нечетких числа A и B с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(y)$ соответственно. Арифметическая операция «*» задается следующим образом: $A * B = C$, где C – нечеткое число с функцией принадлежности

$$\mu_C(z)=\sup_{z=xy}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}.$$

Применение принципа обобщения пригодно для понимания и обобщения понятия «арифметическая операция над произвольно заданными нечеткими числами». Однако задача данной работы не столько обобщить, сколько конкретизировать; здесь предлагаются конкретные способы выполнения арифметических операций над конкретными типами нечетких чисел в виде простых вычислительных процедур. Предложенные в этой работе способы отличны от процедур, описанных в работе [6]. Отличие связано с тем, что в указанной работе нечеткие числа определены на интервале $(0, \infty)$, в данной работе – на интервале $(-\infty, +\infty)$. Используя принцип обобщения, обозначить эти отличия не представляется возможным. Кроме того, арифметические операции, заданные с использованием принципа обобщения, имеют сложную интерпретацию. В связи с этим в работе использован прямой способ задания арифметических операций.

Рассмотрим некоторые арифметические операции на множестве нечетких чисел. Пусть (a_1, a_0, a_2), (c_1, c_0, c_2) – треугольные, $(b_1, b_{01}, b_{02}, b_2)$, $(d_1, d_{01}, d_{02}, d_2)$ – трапециевидные, (p_1, s_1), (p_2, s_2) – параболические, (m_0, σ_0), (m_1, σ_1) – гауссовы числа.

Сложение нечетких треугольных чисел:

$$(a_1, a_0, a_2) \oplus (c_1, c_0, c_2) = (a_1 + c_1, a_0 + c_0, a_2 + c_2),$$

нечетких трапециевидных чисел:

$$(b_1, b_{01}, b_{02}, b_2) \oplus (d_1, d_{01}, d_{02}, d_2) = (b_1 + d_1, b_{01} + d_{01}, b_{02} + d_{02}, b_2 + d_2),$$

нечетких параболических чисел:

$$(p_1, s_1) \oplus (p_2, s_2) = (p_1 + p_2, s_1 + s_2),$$

нечетких гауссовых чисел:

$$(m_0, \sigma_0) \oplus (m_1, \sigma_1) = (m_0 + m_1, \sigma_0 + \sigma_1).$$

Вычитание нечетких треугольных чисел:

$$(a_1, a_0, a_2) \ \Theta \ (c_1, c_0, c_2) = (a_1 - c_2, a_0 - c_0, a_2 - c_1),$$

нечетких трапециевидных чисел:

$$(b_1, b_{01}, b_{02}, b_2) \ \Theta \ (d_1, d_{01}, d_{02}, d_2) = (b_1 - d_2, b_{01} - d_{02}, b_{02} - d_{01}, b_2 - d_1),$$

нечетких параболических чисел:

$$(p_1, s_1) \ \Theta \ (p_2, s_2) = (p_1 - p_2, s_1 + s_2),$$

нечетких гауссовых чисел:

$$(m_0, \sigma_0) \ \Theta \ (m_1, \sigma_1) = (m_0 - m_1, \sigma_0 + \sigma_1).$$

Умножение нечетких треугольных чисел:

$$(a_1, a_0, a_2) \otimes (c_1, c_0, c_2) = (\min(a_1 c_1, a_1 c_2, a_2 c_1, a_2 c_2), a_0 c_0,$$
$$\max(a_1 c_1, a_1 c_2, a_2 c_1, a_2 c_2)),$$

нечетких трапециевидных чисел:

$$(b_1, b_{01}, b_{02}, b_2) \otimes (d_1, d_{01}, d_{02}, d_2) = (\min(b_1 d_1, b_1 d_2, b_2 d_1, b_2 d_2),$$
$$\min(b_{01} d_{01}, b_{01} d_{02}, b_{02} d_{01}, b_{02} d_{02}),$$
$$\max(b_{01} d_{01}, b_{01} d_{02}, b_{02} d_{01}, b_{02} d_{02}),$$
$$\max(b_1 d_1, b_1 d_2, b_2 d_1, b_2 d_2)),$$

нечетких параболических чисел:

$$(p_1, s_1) \otimes (p_2, s_2) = (p_1 p_2, abs(p_2 s_1 + p_1 s_2)),$$

нечетких гауссовых чисел:

$$(m_0, \sigma_0) \otimes (m_1, \sigma_1) = (m_0 m_1, abs(m_0 \sigma_1 + m_1 \sigma_0)).$$

Деление нечетких треугольных чисел при условии, что $0 \notin [c_1, c_2]$:

$$(a_1, a_0, a_2) \varnothing (c_1, c_0, c_2) = (a_1, a_0, a_2) \otimes (1/c_2, 1/c_0, 1/c_1);$$

нечетких трапециевидных чисел при условии, что $0 \notin [d_1, d_2]$:

$$(b_1, b_{01}, b_{02}, b_2) \varnothing (d_1, d_{01}, d_{02}, d_2) =$$
$$= (b_1, b_{01}, b_{02}, b_2) \otimes (1/d_2, 1/d_{02}, 1/d_{01}, 1/d_1);$$

нечетких параболических чисел при условии, что $0 \notin [p_2 - s_2, p_2 + s_2]$:

$$(p_1, s_1) \varnothing (p_2, s_2) = (p_1, s_1) \otimes (1/p_2, s_2);$$

деление нечетких гауссовых чисел не определяется в силу того, что эти числа определены на интервале $(-\infty, +\infty)$ и, следовательно, содержат 0 на своем интервале определения.

Четыре арифметические операции могут быть дополнены некоторыми другими унарными операциями над нечеткими числами.

Определение 3. Пусть $p(x)$ – унарная операция, непрерывная на некотором интервале, и $\tilde{a} = (a_1, a_0, a_2)$ – нечеткое треугольное число, тогда

$$p(\tilde{a}) = p(a_1, a_0, a_2) = (\min(p(a_1), p(a_2)), p(a_0), \max(p(a_1), p(a_2))).$$

В качестве таких унарных операций могут выступать $\exp(x)$, $\log(x)$ и др.

Метрические подходы к оцениванию величин. Рассмотрим методы оценивания величин, имеющие геометрическую интерпретацию и основанные на вычислении расстояния между числами.

Определение 4. (Метрика Diamond&Kloeden [7].) Расстояние между двумя нечеткими числами $\tilde{a}$ и $\tilde{u}$ определяется следующим образом:

$$D(\tilde{a}, \tilde{u}) = \int_0^1 (a_-(\alpha) - u_-(\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (a_+(\alpha) - u_+(\alpha))^2 d\alpha.$$

Используя метрику Diamond&Kloeden, определим ближайшее к произвольному нечеткому числу $\tilde{a}(\alpha) = [a_-(\alpha), a_+(\alpha)]$ треугольное нечеткое число $tn(\alpha)$, заданное тройкой (a_1, a_0, a_2). Для этого нужно минимизировать приведенную ниже функцию по переменным a_1, a_0, a_2:

$$D(\tilde{a}, tn) = \int_0^1 (a_-(\alpha) - tn_-(\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (a_+(\alpha) - tn_+(\alpha))^2 d\alpha =$$

$$= \int_0^1 (a_-(\alpha) - (a_1 + (a_0 - a_1)\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (a_+(\alpha) - (a_2 + (a_0 - a_2)\alpha))^2 d\alpha.$$

Найдем следующие частные производные:

$$\frac{\partial D(\widetilde{a}, (a_1, a_0, a_2))}{\partial a_0} = -2\int_0^1 (a_-(\alpha)\alpha) d\alpha - 2\int_0^1 (a_+(\alpha)\alpha) d\alpha + \frac{4}{3} a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3},$$

$$\frac{\partial D(\widetilde{a}, (a_1, a_0, a_2))}{\partial a_1} = -2\int_0^1 a_-(\alpha)(1-\alpha) d\alpha + \frac{a_0}{3} + \frac{2a_1}{3},$$

$$\frac{\partial D(\widetilde{a}, (a_1, a_0, a_2))}{\partial a_2} = -2\int_0^1 a_+(\alpha)(1-\alpha) d\alpha + \frac{a_0}{3} + \frac{2a_2}{3}.$$

Для минимизации функции приравняем к нулю частные производные и решим указанную выше систему уравнений:

$$a_0 = 3\int_0^1 (a_-(\alpha)\alpha) d\alpha + 3\int_0^1 (a_+(\alpha)\alpha) d\alpha - \int_0^1 a_-(\alpha) d\alpha - \int_0^1 a_+(\alpha) d\alpha,$$

$$a_1 = \frac{7}{2}\int_0^1 a_-(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 a_+(\alpha) d\alpha - \frac{9}{2}\int_0^1 (a_-(\alpha)\alpha) d\alpha - \frac{3}{2}\int_0^1 (a_+(\alpha)\alpha) d\alpha,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 a_-(\alpha) d\alpha + \frac{7}{2}\int_0^1 a_+(\alpha) d\alpha - \frac{3}{2}\int_0^1 (a_-(\alpha)\alpha) d\alpha - \frac{9}{2}\int_0^1 (a_+(\alpha)\alpha) d\alpha.$$

Таким образом, можно оценить произвольное нечеткое число его треугольным эквивалентом.

Пример 1. Имеется нечеткое параболическое число $\widetilde{o}$, функция принадлежности которого имеет вид $\mu_{\widetilde{o}}(x) = 1 - bx^2$, а параметрическая запись представлена как

$$\widetilde{o}(\alpha) = \begin{cases} o_-(\alpha) = -\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{b}}; \\ o_+(\alpha) = +\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{b}}. \end{cases}$$

Тогда ближайшее к указанному параболическому нечеткому числу нечеткое треугольное число (a_1, a_0, a_2) будет иметь следующие характеристики:

$$a_0 = -3\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}\alpha\right) d\alpha + 3\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}\alpha\right) d\alpha + \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\alpha}{b}} d\alpha - \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\alpha}{b}} d\alpha = 0,$$

$$a_1=-\frac{7}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}d\alpha+$$

$$+\frac{9}{2}\int_0^1\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}\alpha\right)d\alpha-\frac{3}{2}\int_0^1\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}\alpha\right)d\alpha=-\frac{6}{5\sqrt{b}},$$

$$a_2=-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}d\alpha+\frac{7}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}d\alpha+$$

$$+\frac{3}{2}\int_0^1\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}\alpha\right)d\alpha-\frac{9}{2}\int_0^1\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{b}}\alpha\right)d\alpha=\frac{6}{5\sqrt{b}}.$$

П р и м е р 2. Найдем оценку нечеткого трапециевидного числа $\tilde{u}=(u_1, u_{01}, u_{02}, u_2)$ его треугольным эквивалентом. Ближайшее к указанному трапециевидному нечеткому числу нечеткое треугольное число (a_1, a_0, a_2) будет иметь следующие параметры:

$$a_0=3\int_0^1((u_1+(u_{01}-u_1)\alpha)\alpha)d\alpha+3\int_0^1((u_2+(u_{02}-u_2)\alpha)\alpha)d\alpha-$$

$$-\int_0^1(u_1+(u_{01}-u_1)\alpha)d\alpha-\int_0^1(u_2+(u_{02}-u_2)\alpha)d\alpha=\frac{u_{01}}{2}+\frac{u_{02}}{2},$$

$$a_1=\frac{7}{2}\int_0^1(u_1+(u_{01}-u_1)\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^1(u_2+(u_{02}-u_2)\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{9}{2}\int_0^1((u_1+(u_{01}-u_1)\alpha)\alpha)d\alpha-\frac{3}{2}\int_0^1((u_2+(u_{02}-u_2)\alpha)\alpha)d\alpha=u_1+\frac{u_{01}}{4}-\frac{u_{02}}{4},$$

$$a_2=\frac{1}{2}\int_0^1(u_1+(u_{01}-u_1)\alpha)d\alpha+\frac{7}{2}\int_0^1(u_2+(u_{02}-u_2)\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{3}{2}\int_0^1((u_1+(u_{01}-u_1)\alpha)\alpha)d\alpha-\frac{9}{2}\int_0^1((u_2+(u_{02}-u_2)\alpha)\alpha)d\alpha=u_2+\frac{u_{02}}{4}-\frac{u_{01}}{4}.$$

Произвольное нечеткое число можно оценить не только его треугольным эквивалентом, но и любым другим, например трапециевидным, параболическим, колоколообразным и т. д. Для этого в метрике Diamond&Kloeden параметрическую запись треугольного числа необходимо изменить на параметрическую запись нечеткого числа – эквивалента – и повторить процедуру нахождения минимума по параметрам, задающим нечеткое число – эквивалент.

Рассмотрим нахождение оценки нескольких нечетких чисел треугольным эквивалентом. Такая оценка может быть определена как минимальная сумма расстояний от эквивалента до оцениваемых чисел.

Пусть $\widetilde{u}(\alpha)=[u_-(\alpha),u_+(\alpha)]$ и $\widetilde{a}(\alpha)=[a_-(\alpha),a_+(\alpha)]$ – два нечетких числа общего вида. Для нахождения ближайшего к ним нечеткого треугольного числа $tn(\alpha)$, заданного тройкой (b_1, b_0, b_2), минимизируем функцию

$$f(b_1,b_0,b_2)=D(\widetilde{a}(\alpha),tn(\alpha))+D(\widetilde{u}(\alpha),tn(\alpha))=\int_0^1(a_-(\alpha)-tn_-(\alpha))^2\,d\alpha+$$

$$+\int_0^1(a_+(\alpha)-tn_+(\alpha))^2\,d\alpha+\int_0^1(u_-(\alpha)-tn_-(\alpha))^2\,d\alpha+\int_0^1(u_+(\alpha)-tn_+(\alpha))^2\,d\alpha.$$

Найдем значения b_1, b_0, b_2 такие, что

$$\frac{\partial f(b_1,b_0,b_2)}{\partial b_0}=0,\qquad \frac{\partial f(b_1,b_0,b_2)}{\partial b_1}=0,\qquad \frac{\partial f(b_1,b_0,b_2)}{\partial b_2}=0.$$

Вычислив частные производные, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}-\int_0^1(a_-(\alpha)\alpha)\,d\alpha-\int_0^1(a_+(\alpha)\alpha)\,d\alpha-\int_0^1(u_-(\alpha)\alpha)\,d\alpha-\int_0^1(u_+(\alpha)\alpha)\,d\alpha+\\ +\dfrac{4b_0}{3}+\dfrac{b_1}{3}+\dfrac{b_2}{3}=0;\\ -\int_0^1 a_-(\alpha)(1-\alpha)\,d\alpha-\int_0^1 u_-(\alpha)(1-\alpha)\,d\alpha+\dfrac{b_0}{3}+\dfrac{2b_1}{3}=0;\\ -\int_0^1 a_+(\alpha)(1-\alpha)\,d\alpha-\int_0^1 u_+(\alpha)(1-\alpha)\,d\alpha+\dfrac{b_0}{3}+\dfrac{2b_2}{3}=0.\end{cases}$$

Решением этой системы уравнений будут следующие значения:

$$b_0=\frac{3}{2}\int_0^1(a_-(\alpha)\alpha)\,d\alpha+\frac{3}{2}\int_0^1(a_+(\alpha)\alpha)\,d\alpha+\frac{3}{2}\int_0^1(u_-(\alpha)\alpha)\,d\alpha+\frac{3}{2}\int_0^1(u_+(\alpha)\alpha)\,d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 a_-(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^1 a_+(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^1 u_-(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^1 u_+(\alpha)\,d\alpha,$$

$$b_1=\frac{7}{4}\int_0^1 a_-(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{4}\int_0^1 a_+(\alpha)\,d\alpha+\frac{7}{4}\int_0^1 u_-(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{4}\int_0^1 u_+(\alpha)\,d\alpha-$$

$$-\frac{9}{4}\int_0^1(a_-(\alpha)\alpha)\,d\alpha-\frac{3}{4}\int_0^1(a_+(\alpha)\alpha)\,d\alpha-\frac{9}{4}\int_0^1(u_-(\alpha)\alpha)\,d\alpha-\frac{3}{4}\int_0^1(u_+(\alpha)\alpha)\,d\alpha,$$

$$b_2=\frac{1}{4}\int_0^1 a_-(\alpha)d\alpha+\frac{7}{4}\int_0^1 a_+(\alpha)d\alpha+\frac{1}{4}\int_0^1 u_-(\alpha)d\alpha+\frac{7}{4}\int_0^1 u_+(\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{3}{4}\int_0^1(a_-(\alpha)\alpha)d\alpha-\frac{9}{4}\int_0^1(a_+(\alpha)\alpha)d\alpha-\frac{3}{4}\int_0^1(u_-(\alpha)\alpha)d\alpha-\frac{9}{4}\int_0^1(u_+(\alpha)\alpha)d\alpha.$$

П р и м е р 3. Пусть даны два нечетких треугольных числа $\tilde{a}=(1,3,4)$ и $\tilde{u}=(3,6,8)$, параметрическая запись которых имеет вид

$$\tilde{a}(\alpha)=\begin{cases}a_-(\alpha)=2\alpha+1;\\ a_+(\alpha)=-\alpha+4,\end{cases}\qquad \tilde{u}(\alpha)=\begin{cases}u_-(\alpha)=3\alpha+3;\\ u_+(\alpha)=-2\alpha+8.\end{cases}$$

Найдем ближайшее к указанным двум числам нечеткое треугольное число:

$$b_0=\frac{3}{2}\int_0^1((2\alpha+1)\alpha)d\alpha+\frac{3}{2}\int_0^1((-\alpha+4)\alpha)d\alpha+\frac{3}{2}\int_0^1((3\alpha+3)\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{3}{2}\int_0^1((-2\alpha+8)\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^1(2\alpha+1)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^1(-\alpha+4)d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1(3\alpha+3)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^1(-2\alpha+8)d\alpha=4{,}5,$$

$$b_1=\frac{7}{4}\int_0^1(2\alpha+1)d\alpha+\frac{1}{4}\int_0^1(-\alpha+4)d\alpha+\frac{7}{4}\int_0^1(3\alpha+3)d\alpha+\frac{1}{4}\int_0^1(-2\alpha+8)d\alpha-$$

$$-\frac{9}{4}\int_0^1((2\alpha+1)\alpha)d\alpha-\frac{3}{4}\int_0^1((-\alpha+4)\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{9}{4}\int_0^1((3\alpha+3)\alpha)d\alpha-\frac{3}{4}\int_0^1((-2\alpha+8)\alpha)d\alpha=2,$$

$$b_2=\frac{1}{4}\int_0^1(2\alpha+1)d\alpha+\frac{7}{4}\int_0^1(-\alpha+4)d\alpha+\frac{1}{4}\int_0^1(3\alpha+3)d\alpha+\frac{7}{4}\int_0^1(-2\alpha+8)d\alpha-$$

$$-\frac{3}{4}\int_0^1((2\alpha+1)\alpha)d\alpha-\frac{9}{4}\int_0^1((-\alpha+4)\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{3}{4}\int_0^1((3\alpha+3)\alpha)d\alpha-\frac{9}{4}\int_0^1((-2\alpha+8)\alpha)d\alpha=6.$$

Для нахождения нечеткого треугольного числа, ближайшего к указанным двум треугольным числам, достаточно найти их среднее значение, выполнив операцию

$$Ave = ((a_1 + u_1)/2, (a_0 + u_0)/2, (a_2 + u_2)/2).$$

Оценка n нечетких треугольных чисел $\tilde{a}^{(1)}, \tilde{a}^{(2)}, \ldots, \tilde{a}^{(n)}$ в виде их среднего значения определяется следующим образом:

$$Ave = \left(\frac{a_-^{(1)} + a_-^{(2)} + \ldots + a_-^{(n)}}{n}, \frac{a_0^{(1)} + a_0^{(2)} + \ldots + a_0^{(n)}}{n}, \frac{a_+^{(1)} + a_+^{(2)} + \ldots + a_+^{(n)}}{n} \right).$$

Рассмотрим сложное свойство. Если сложное свойство можно представить функцией более простых свойств $b = f(\tilde{a}^{(1)}, \tilde{a}^{(2)}, \ldots, \tilde{a}^{(n)})$, заданных как нечеткие треугольные числа, и отношения в функциональной зависимости определены арифметическими операциями, то оценка b может быть найдена путем применения указанных выше арифметических и некоторых унарных операций над простыми свойствами.

Заключение. Процедура нахождения ближайшего треугольного числа описана в работе [8]. Однако в указанной работе треугольное число обязательно должно быть симметричным. В предлагаемой работе нет таких ограничений на форму треугольного числа и операции умножения и деления нечетких чисел для оценивания сложных свойств заданы иначе, чем, например, в работе [6]. Оценивание рассматривается в представленной работе как один из способов вывода в интеллектуальных системах. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании нечетких интеллектуальных систем, работающих с величинами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ивин А. А.** Основания логики оценок. М.: МГУ, 1970.
2. **Баранов А. Н.** Когнитивный статус естественно языковой оценки (к типологии языковых стратегий оценивания) // Формальные и неформальные рассуждения. Уч. зап. Тартуского гос. ун-та. Тарту, 1989. Вып. 840. С. 5.
3. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
4. **Ходашинский И. А.** Псевдофизическая логика оценок величин // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 5. С. 96.
5. **Пфанцагль И.** Теория измерений. М.: Мир, 1976.
6. **Chen S.-M.** Weighted fuzzy reasoning using weighted fuzzy Petri nets // IEEE Trans. on Knowledge and Eng. 2002. **14**. P. 386.
7. **Diamond P., Kloeden P.** Metric spaces of fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. 1990. **35**. P. 241.
8. **Ma M., Kandel A., Friedman M.** A new approach for defuzzification // Fuzzy Sets and Systems. 2000. **111**. P. 351.

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
E-mail: hodashn@rambler.ru

Поступила в редакцию 18 февраля 2003 г.