

С. И. Вяткин, Б. С. Долговесов, А. Т. Валетов

(Новосибирск)

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ
ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАДАННЫХ ОБЪЕКТОВ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕНИЯ**

Рассмотрен подход к преобразованиям описывающей функции для геометрических операций: проецирования, офсеттинга, теоретико-множественных и метаморфозиса. Дана характеристика более сложных операций для функционально заданных объектов с применением функций возмущения: замещения движущимся твердым телом и кручения тел. Гибкость и универсальность данного подхода иллюстрируется примерами изображений, полученных при моделировании геометрических операций.

Введение. Геометрическая концепция моделирования виртуальной среды на базе функционально заданных объектов [1, 2] может быть описана как алгебраическая система

$$(M, \Phi, W), \quad (1)$$

где M – множество геометрических объектов, Φ – множество геометрических операций, W – множество отношений на множество объектов.

Функционально заданные геометрические объекты с применением функций возмущения подробно описаны в работе [2]. Одним из примеров отношений может служить определение столкновений между объектами [3]. Бинарное отношение есть множество множества $M^2 = M \times M$. Оно может быть определено как

$$S_i: M \times M \rightarrow I. \quad (2)$$

Целью данной работы является исследование возможности применения стандартных унарных, бинарных и более сложных геометрических операций для функционально заданных объектов на базе функций возмущения, предложенных в работе [2], а также сравнение их с известными методами функционального представления объектов.

При функциональном задании объектов появляется возможность реализации новых спецэффектов благодаря введению операций над функциями. Это может быть удобно при моделировании некоторых сложных движений тел, частиц при разработке как научных, так и игровых приложений. Таким образом, весьма полезно исследовать некоторые из операций применительно к предложенному подходу [2].

Функциональное задание объектов с применением функций возмущения. Дадим краткое определение функций возмущения, рассмотренных в работе [2]. Предложено описание сложных геометрических объектов с помощью задания функции отклонения (второго порядка) от базовой квадрики в виде

$$F(x, y, z) = A11x^2 + A22y^2 + A33z^2 + A12xy + A13xz + A23yz + \\ + A14x + A24y + A34z + A44 \geq 0. \quad (3)$$

На базе квадрик строятся свободные формы. Свободная форма есть композиция базовой квадрики и возмущения $F'(x, y, z) = F(x, y, z) + R(x, y, z)$, где функция возмущения $R(x, y, z)$ находится следующим образом:

$$R(x, y, z) = \begin{cases} Q^2(x, y, z) & \text{при } Q(x, y, z) > 0; \\ 0 & \text{при } Q(x, y, z) \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

(здесь $Q(x, y, z)$ – возмущающая квадратика).

В качестве Q также может быть возмущенная квадратика (свободная форма). Другими словами, композиция базовой квадрики и функции отклонения являются новой функцией возмущения, т. е. производной для другой базовой квадрики. Вследствие того что $\max[Q + R] \leq \max[Q] + \max[R]$, для оценки максимума Q на некотором интервале необходимо вычислить максимум функции возмущения на этом же интервале. Полученная поверхность будет гладкой, и потребуются небольшое количество функций возмущения для создания сложных форм поверхностей. Сцены, описанные свободными формами с аналитическими функциями возмущения, требуют меньше информации в 500 раз и более в сравнении с заданием их полигонами. Таким образом, задача конструирования объекта сводится к задаче деформации поверхности квадрики нужным образом, а не к аппроксимации ее примитивами (полигонами или патчами, представленными сплайновыми поверхностями). Предложенный способ описания объектов трехмерных сцен базовыми поверхностями и функциями возмущения в сравнении с известными способами задания функционально заданных объектов, которые приведены в [4], имеет более компактное описание, что позволяет существенно уменьшить объем передаваемых данных.

В работе [2] предложен также алгоритм многоуровневого отслеживания лучей, осуществляющий эффективный поиск элементов объема – вокселей, участвующих в формировании изображения. Предложенный алгоритм сканирования отображаемого объема в сравнении с известными алгоритмами сканирования [4] определяет поверхности функционально заданных объектов за меньшее время за счет меньшего количества вычислений. Кроме того, при использовании известных функциональных представлений [1] иногда возникают проблемы: вычисление определяющей функции в заданной точке часто оказывается весьма трудоемкой задачей. Особенно явно это выражено при использовании R -функций с квадратными корнями. Предложенные в [2] метод задания и алгоритм растрирования не имеют этих недостатков.

Геометрические операции. Множество геометрических операций Φ математически выражается следующим образом:

$$\Phi_i: M^1 + M^2 + \dots + M^n \rightarrow M, \quad (5)$$

где n – номер операнда операции.

Пусть объект G_1 определен как $f_1(X) \geq 0$. Унарная операция ($n=1$) (5) объекта G_1 означает операцию $G_2 = \Phi_1(G_1)$ с определением

$$f_2 = \psi(f_1(X)) \geq 0, \quad (6)$$

где ψ – непрерывная вещественная функция одной переменной. Рассмотрим подробнее следующие унарные операции.

Проекция. Проекция тела на три ортогональные плоскости дают нам представление о разных его сторонах. Проекция трехмерного тела на координатную плоскость рассмотрена как объединение сечений тела плоскостями, параллельными данной координатной плоскости на достаточно малом расстоянии друг от друга. Дадим математическое описание этого процесса для произвольной размерности пространства.

Пусть исходный объект $G_1 \subset E_n$ описывается функцией

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \geq 0,$$

а его проекция $G_2 \subset E_{n-1}$ описывается функцией

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0.$$

Объект G_2 может быть определен как объединение сечений объекта G_1 гиперплоскостью $x_i = C_j$, где $C_{j+1} = C_j + \Delta x_i$, $j=1, \dots, N$, и $C_1 = x_{i \min}$. Пусть

$$f_{1j} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, C_j, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

– функция для сечения. В итоге функция для проекции при $\Delta x_i \rightarrow 0$ есть объединение всех функций f_{1j} :

$$f_2 = f_{11} \vee f_{12} \vee \dots \vee f_{1j} \vee \dots \vee f_{1N}. \quad (7)$$

В реализации данной операции для всей сцены фиксировалась одна координата в зависимости от того, какую проекцию требовалось получить.

Результаты записаны как набор рисунков исходного трехмерного тела и его двумерных проекций на три ортогональные плоскости (рис. 1). Полутоновые изображения с разрешением 200×200 на рисунке получены на ПК Pentium III (677 МГц), время вычислений 300 мс. Такие же изображения были получены на рабочей станции “Indigo 2” компании “Silicon Graphics” с помощью алгоритма трассировки лучей и с использованием R -функций [1]. При этом время вычислений с двойной точностью изображения с разрешением 200×200 составило 80 с.

Офсеттинг. Операция офсеттинга реализована с помощью преобразования коэффициентов квадрики [2]. Таким образом можно создавать увеличенную или уменьшенную копию исходного объекта, т. е. делать положительный или отрицательный офсеттинг соответственно. Например, можно имитировать пульсацию тела. Пусть исходный объект задается функцией $f(X) > 0$, тогда при такой операции полученное тело будет описываться функцией $F = f(X) + C$, где $C < 0$ определяет отрицательный офсеттинг (сжатие), а $C > 0$ – положительный офсеттинг (расширение). Иначе, суммируя положительную или отрицательную константу со свободным членом квадрики [2], мы получаем расширение или сжатие всего объекта в целом

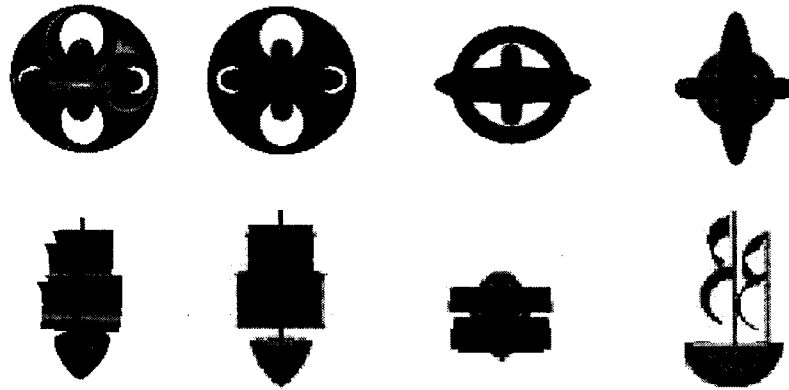


Рис. 1. Некоторые тела и их проекции

(рис. 2). Соответственно, прибавляя последовательно часть константы и растривая каждый раз полученный объект, имеем анимационный файл. Реализовывалась эта процедура с использованием метода, созданного для морфинга примитивов, о котором будет сказано ниже. Полутоновые изображения с разрешением 200×200 (см. рис. 2) получены на ПК Pentium III (677 МГц), время вычислений 250 мс. Такие же изображения были получены на рабочей станции “Indigo 2” с помощью алгоритма трассировки лучей и с использованием R -функций [1]. При этом время вычислений с двойной точностью изображения с разрешением 200×200 составило 60 с.

Теоретико-множественные операции. Пусть объекты G_1 и G_2 определены как $f_1(X) \geq 0$ и $f_2(X) \geq 0$. Бинарная операция ($n=2$) (5) объектов G_1 и G_2 означает операцию $G_3 = \Phi_i(G_1, G_2)$ с определением

$$f_3 = \psi(f_1(X), f_2(X)) \geq 0, \quad (8)$$

где ψ – непрерывная вещественная функция двух переменных. Рассмотрим подробнее бинарные операции: теоретико-множественные и метаморфозис (морфинг).

Для функционально заданных объектов на базе функций возмущения предлагается следующее. Для того чтобы создать сложную сцену, необходимо в ней описать определенное количество примитивов, нужных для конкретной задачи. Отображаемый объект, с которым алгоритм растривания осуществляет взаимодействие посредством запросов, представляет собой

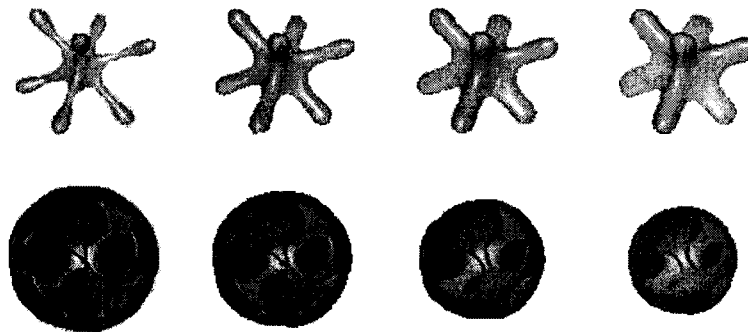


Рис. 2. Положительный и отрицательный офсеттинг

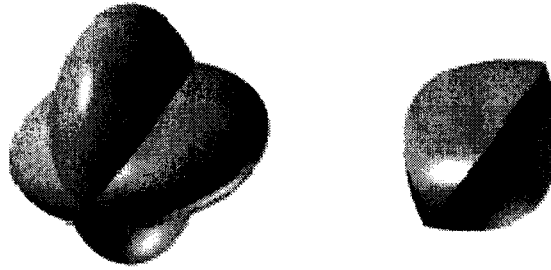


Рис. 3. Теоретико-множественные операции над объектами

всю трехмерную сцену. Поэтому геометрическая модель должна позволять конструировать объекты и их композиции неограниченной сложности. Достигается это, в первую очередь, применением булевых операций объединения и пересечения (рис. 3). В системе визуализации [5] определен объект особого вида [6], с помощью которого осуществляются логические операции над объектами. Поэтому вся сцена представляет собой вид дерева, каждый узел которого является объектом-конструктором, осуществляющим логические операции над своими потомками, а вершинами дерева – примитивы, используемые системой. В момент, когда при растривании происходит обращение с каким-либо запросом к объекту-конструктору, этот объект обращается к своим потомкам, преобразует полученный результат и выдает соответствующий ответ на запрос. При этом потомком может являться как примитив, так и другой объект-конструктор. При применении геометрических операций, поворотов, перемещений, масштабирования к объекту-конструктору он производит все эти операции со своими потомками, а в случае инвертирования изменяет еще и свою булеву функцию.

Метаморфозис. Эта операция преобразует первый заданный объект во второй с получением множества промежуточных форм. Термин происходит от слова *metamorphosis* – проведение преобразования – и относится к технике анимации, в которой один образ постепенно преобразуется в другой. При метаморфозисе (морфинге) осуществляется плавный переход начального образа в конечный (рис. 4). С помощью исходной, конечной и ключевых промежуточных моделей генерируется последовательность кадров преобразования одного объекта в другой.

Пусть мы имеем F_1, F_2 – значения функций возмущения первого и второго объектов соответственно, тогда результирующая функция возмущения F вычисляется следующим образом:

$$F = \beta F_1 + (1 - \beta) F_2, \quad (9)$$

где β – положительная непрерывная функция.



Рис. 4. Морфинг примитивов

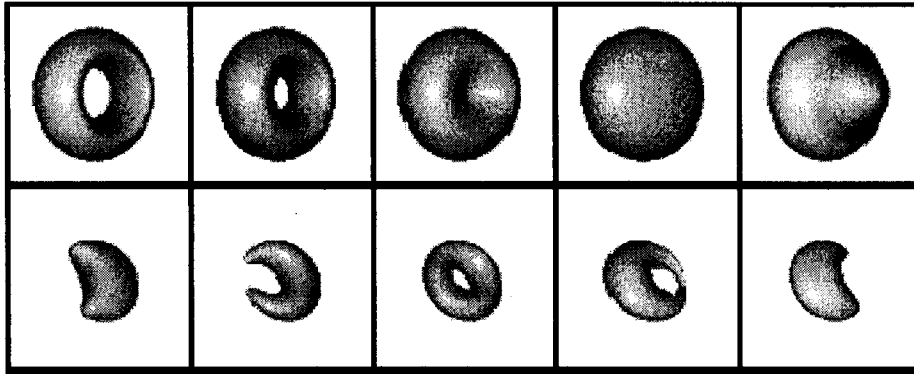


Рис. 5. Морфинг негомеоморфных объектов

При функциональном задании объектов с применением функций возмущения [2] можно осуществлять трехмерный морфинг негомеоморфных объектов (например, тора и сферы) (рис. 5). Два исходных тела гомотопны, если из первого тела путем взаимно однозначного непрерывного преобразования описывающей его функции можно получить второе тело, т. е. для негомеоморфных объектов мы не можем простым приближением квадрик получить неразрывный метаморфозис. В процессе морфинга могут участвовать не два исходных объекта, а четыре. В этом случае схема интерполяции будет билинейной, а геометрическая операция – кватернарной ($n = 4$) (5). Полутоновые изображения с разрешением 200×200 (см. рис. 5) были получены на ПК Pentium III (677 МГц), время вычислений 150 мс. Такие же изображения были получены на рабочей станции “Indigo 2” с помощью алгоритма трассировки лучей и с использованием R -функций [1]. При этом время вычислений с двойной точностью изображения с разрешением 200×200 составило 75 с.

Далее мы рассмотрим сложные геометрические операции: кручение и заметание движущимся твердым телом.

Кручение – это деформация тела, являющаяся частным случаем биективного отображения (рис. 6), которое служит для определения деформаций исходных объектов. Для кручения исходного тела были найдены и преобразованы его координаты z, y, x .

1) Кручение вокруг оси Z :

$$t = (z - z_1) / (z_2 - z_1), \quad (10)$$

$$\theta = (1 - t)\theta_1 + t\theta_2, \quad (11)$$

$$x_{\text{new}} = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (12)$$

$$y_{\text{new}} = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad (13)$$

где z_1, z_2 – координаты концов на z -интервале; θ_1, θ_2 – углы вращения в радианах для конечных точек.

2) Кручение вокруг оси Y :

$$t = (y - y_1) / (y_2 - y_1), \quad (14)$$

$$\theta = (1 - t)\theta_1 + t\theta_2, \quad (15)$$

$$z_{\text{new}} = z \cos \theta + x \sin \theta, \quad (16)$$

$$x_{\text{new}} = -z \sin \theta + x \cos \theta, \quad (17)$$

где y_1, y_2 – координаты концов на y -интервале.

3) Кручение вокруг оси X :

$$t = (x - x_1) / (x_2 - x_1), \quad (18)$$

$$\theta = (1 - t)\theta_1 + t\theta_2, \quad (19)$$

$$y_{\text{new}} = y \cos \theta + z \sin \theta, \quad (20)$$

$$z_{\text{new}} = -y \sin \theta + z \cos \theta, \quad (21)$$

где x_1, x_2 – координаты концов на x -интервале.

Полутоновые изображения с разрешением 200×200 (см. рис. 6) были получены на ПК Pentium III (677 МГц), время вычислений 400 мс. Такие же изображения были получены на рабочей станции “Indigo 2” с помощью алгоритма трассировки лучей и с использованием R -функций [1]. При этом время

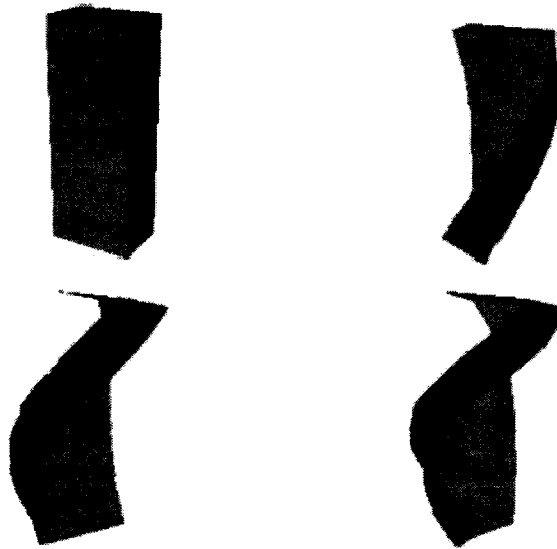


Рис. 6. Результаты реализации кручения

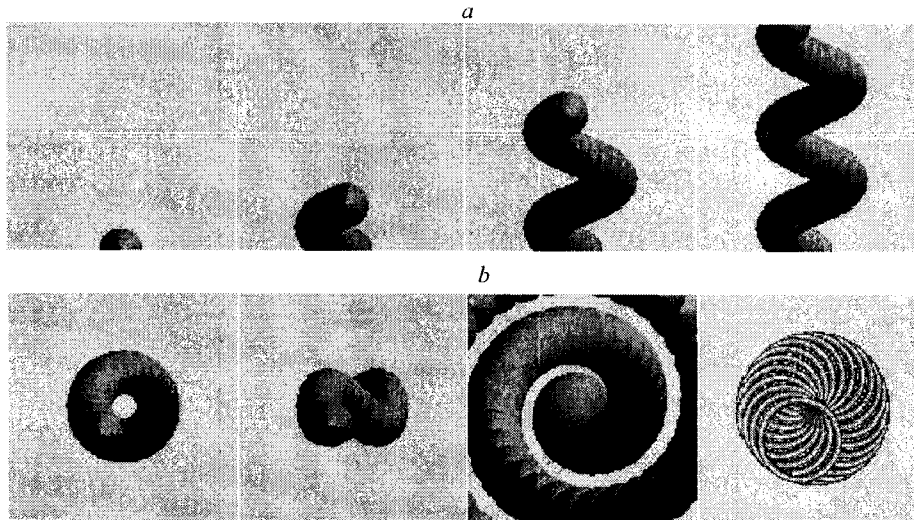


Рис. 7. Заметание движущимся твердым телом: несколько шагов заметания сферой (а); конечные результаты заметания сферой (b)

вычислений с двойной точностью изображения с разрешением 200×200 составило 85 с.

Заметание движущимся твердым телом является одной из давних и трудных проблем в твердотельном моделировании [7]. Рассмотрим заметание как проекцию движущегося тела из $4D(x, y, z, t)$ в $3D(x, y, z)$ пространство. Далее отрисовываем тело каждый раз с новыми координатами, которые изменяли согласно нужному закону. При этом предыдущие изображения сохраняются в памяти и используются для получения результата заметания. Вновь образованная фигура представляет собой объединение изображений заметающего тела при различных положениях (рис. 7). Полутоновые изображения с разрешением 200×200 на рисунках были получены на ПК Pentium III (677 МГц), время вычислений 550 и 700 мс соответственно. Такие же изображения были получены на рабочей станции “Indigo 2” с помощью алгоритма трассировки лучей и с использованием R -функций [1]. При этом время вычислений с двойной точностью изображения с разрешением 200×200 составило 50 и 90 с соответственно.

Заключение. В данной работе исследованы различные геометрические операции над функционально заданными объектами на базе функций возмущения. Предложены основные методы программной реализации сложных геометрических операций (метаморфозиса, проекций, офсеттинга, кручения, заметания) в системе, представлены результаты в анимационных и графических файлах. Итак, предложенный способ описания объектов трехмерных сцен базовыми поверхностями и функциями возмущения [2] в сравнении с известными способами задания функционально заданных объектов имеет более компактное описание. Алгоритм сканирования [2, 5, 6, 8, 9] отображаемого объема в сравнении с известными алгоритмами сканирования [4] определяет поверхности функционально заданных объектов за меньшее время за счет меньшего количества вычислений. Главной же отличительной особенностью предлагаемого алгоритма сканирования является то, что он максимально адаптирован к аппаратной реализации. Кроме того, при пред-

ложенном функциональном задании объектов возможна реализация перечисленных выше геометрических операций над функционально заданными объектами на базе функций возмущения.

Полутоновые изображения с разрешением 200×200 были получены на ПК Pentium III (677 МГц), время вычислений от 150 до 700 мс. Такие же изображения были получены на рабочей станции "Indigo 2" с помощью алгоритма трассировки лучей и с использованием R -функций [1]. При этом время вычислений с двойной точностью изображения с разрешением 200×200 составило от 50 до 90 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pasko A. A., Adzhiev V. D., Sourin A. I. et al. Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications // Visual Computer. 1995. 11, N 6. P. 429.
2. Вяткин С. И., Долговесов Б. С., Есин А. В. и др. Геометрическое моделирование и визуализация функционально заданных объектов // Автометрия. 1999. № 6. С. 84.
3. Вяткин С. И., Долговесов Б. С., Корсун А. С. Определение столкновений функционально заданных объектов в задачах компьютерной графики // Автометрия. 2003. 39, № 6. С. 119.
4. Вяткин С. И., Долговесов Б. С. Синтез поверхностей свертки с рекурсивным делением объектного пространства // Автометрия. 2002. 38, № 4. С. 58.
5. Vyatkin S. I., Dolgovesov B. S., Yesin A. V. et al. Voxel Volumes volume-oriented visualization system // IEEE Comput. Soc. 1999. P. 234.
6. Вяткин С. И., Долговесов Б. С., Каипов Н. Р. Отображение текстуры на плоские и криволинейные поверхности, свободные формы и объемы // Автометрия. 2002. № 1. С. 17.
7. Wang W. P., Wang K. K. Geometric modeling for swept volume of moving solids // IEEE Comput. Graph. and Appl. 1986. 6, N. 12. P. 8.
8. Vyatkin S. I., Dolgovesov B. S., Guimaoutdinov O. Y. Synthesis of virtual environment using perturbation functions // Emergent Comput. and Virtual Eng. 2001. III. P. 350.
9. Vyatkin S. I., Dolgovesov B. S., Yesin A. V. Non-Polygonal Graphics and Volume-Oriented Rendering // Proc. of the IASTED Intern. conf. "Automation, Control, and Information Technology". Calgary: ACTA Press. 2002. P. 447.

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: sivser@mail.ru*

*Поступила в редакцию
20 января 2003 г.*