

2003, том 39, № 6

УДК 681.3

С. И. Вяткин, Б. С. Долговесов, А. С. Корсун

*(Новосибирск)***ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ  
ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАДАННЫХ ОБЪЕКТОВ  
В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ**

Рассмотрена задача определения столкновений функционально заданных объектов. Обсуждается алгоритм определения столкновений различной сложности функционально заданных объектов за постоянное время.

**Введение.** Обнаружение столкновений функционально заданных объектов – достаточно сложная задача, решаемая в различных программах компьютерной графики. Это значит, что для каждого анимационного кадра нужно проверять, не пришли ли в соприкосновение (столкновение) какие-либо два объекта. Идеальный случай – определение столкновения двух произвольных объектов любой сложности за минимальное время. Поскольку контроль столкновений между всеми парами объектов является достаточно ресурсоемким процессом, то обычно такие проверки производятся лишь для части объектов. Алгоритм обнаружения может упрощаться до проверки наличия заданной точки (принадлежащей одному из объектов), например, внутри куба, ограничивающего второй объект.

Геометрическая концепция моделирования виртуальной среды на базе функционально заданных объектов [1, 2] включает в себя множества геометрических объектов, геометрических операций и отношений для множества объектов. Одним из примеров отношений может служить определение столкновений между объектами. Бинарное отношение есть множество множества  $M^2 = M \times M$ . Оно может быть определено как

$$S_i: M \times M \rightarrow I. \quad (1)$$

В ряде приложений: динамике столкновений тел и небесной механике, молекулярной динамике и компьютерных играх – возникает проблема моделирования поведения взаимодействующих тел, имеющих нерегулярную форму. Тела, перемещаясь в пространстве, в результате столкновений могут прилипать друг к другу, меняя свою геометрическую форму. В результате работы известного алгоритма определения столкновений функционально заданных объектов [3] столкновение не всегда может быть определено и, кроме

того, для разных столкновений требуется разное количество времени, сильно различающееся.

Цель данной работы – доказать, что с помощью предлагаемого алгоритма столкновение объектов определяется за постоянное и меньшее время для различной сложности столкновений с полной гарантией обнаружения событий.

**Определение столкновений функционально заданных объектов.** Для таких задач, как определение столкновений, функционально заданные объекты выгодно отличаются от широко распространенных полигональных моделей своей простотой. Поскольку объект при функциональном задании целиком определен с помощью вещественной непрерывной описывающей функции трех переменных  $(x_1, x_2, x_3)$  в виде  $F(X) \geq 0$ , то объекты рассматриваются как замкнутые подмножества евклидова пространства  $E^n$ , определяемые описывающей функцией  $F(X) \geq 0$ , где  $F$  – непрерывная вещественная функция, а  $X = (x_1, x_2, x_3)$  – задаваемая координатными переменными точка в  $E^n$ . Здесь  $F(X) > 0$  задает точки внутри объекта,  $F(X) = 0$  – точки на границе и  $F(X) < 0$  – точки, лежащие снаружи и не принадлежащие объекту. Поэтому, применяя булеву операцию пересечения и вычислив первую точку, принадлежащую пересечению, легко определить наличие столкновения между объектами.

Алгоритм обнаружения столкновений, описанный в [3], основан на отношении пересечения объектов и использует псевдослучайные последовательности Соболя и спиральный квадратичный поиск для обнаружения неотрицательных величин функции, определяющей пересечение. При этом для определения области, в которой ведется поиск, используются ограничивающие тела сферы.

Рассмотрим известный алгоритм обнаружения столкновений функционально заданных объектов [3]. Пусть объекты  $G_1$  и  $G_2$  определены как  $f_1(X) \geq 0$  и  $f_2(X) \geq 0$ . Бинарная операция пересечения объектов  $G_1$  и  $G_2$  определяется следующим образом:

$$S_c(G_1, G_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } G_1 \cap G_2 = \emptyset; \\ 1, & \text{если } G_1 \cap G_2 \neq \emptyset. \end{cases} \quad (2)$$

Функция  $f_3(X) = f_1(X) \& f_2(X)$  может быть использована для вычисления  $S_c$  (2). Можно утверждать, что  $S_c = 0$ , если  $f_3(X) < 0$  для любой точки пространства  $E^n$  [4]. При этом для определения области, в которой ведется поиск, используются ограничивающие тела сферы. Главным же недостатком этого алгоритма является большая зависимость времени определения столкновений функционально заданных объектов от взаимного расположения сталкивающихся объектов и частей их поверхностей. Такой алгоритм не всегда может определить столкновение объектов. Рассмотрим подробнее его работу.

1. Определяем допустимую область  $D$  для двух данных объектов.

*Допустимая область  $D$ :*

- 1) ограниченные объемы проецируются на три координатные плоскости;
- 2) проекции пересечений обнаруживаются в каждой плоскости;
- 3) квадратная область обнаруживается в пространстве.

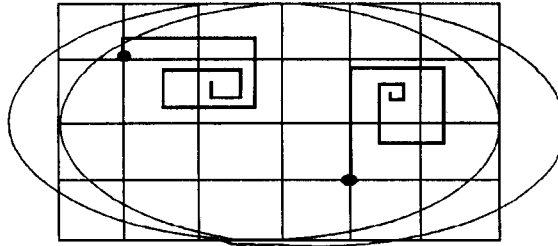


Рис. 1. Поиск неотрицательной величины функции, определяющей пересечение

2. Находим аргумент  $p^*$ , где  $f(p^*) = \max(f(p))$  в  $D$  (если  $f(p^*) < 0$ , то столкновение не обнаружено, если  $f(p^*) \geq 0$ , то  $p^*$  возвращает координаты точки столкновения).

Поиск внешней точки (рис. 1):

1) генерируются псевдослучайные  $LP_i$  точки (последовательность Соболя):

- точки ставятся случайно в узлах прямоугольной решетки,
- $N$  точек гарантируют точность  $N^{-1/3}$  определения точки соприкосновения;

2) старт поиска квадратной спиралью от случайной точки:

- успешно в одномерных квадратных поисках,
- квадрат интерполируется тремя равномерно отстоящими точками,
- требуется, чтобы функция  $f(p)$  была  $C^1$  непрерывности;

3) останавливаем испытание в следующих случаях:

- нуль или положительная величина функции  $f(p)$  найдена,
- превышено заданное число  $N$  испытаний,
- аргумент  $p^*$  найден с заданной точностью (рис. 2).

Объектами на рис. 2 взяты деформированные шумом сферы:

$$f(x, y, z, t) = R^2 - x^2 - y^2 - z^2 + \text{noise}(x, y, z), \quad (3)$$

где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  и  $\text{noise}$  – так называемая функция сплошного шума (последовательность Гарднера). Наихудший случай, когда объекты не имеют точек столкновения: 1,07 с для 1000 случайных точек. Событие столкновения: 0,07 с для 106 случайных точек.

На рис. 3 показаны сферы с «пушистым» шумом:

$$f(x, y, z) = \text{noisy\_sphere}(\text{fur} \ \& \ \text{offset}). \quad (4)$$

Событие столкновения: 0,03 с для 20 случайных точек.

Отметим, что эти временные тесты проводились на параллельной мультипроцессорной вычислительной системе (ОССАМ-2), состоящей из 16 транспьютеров Т805 с общей пиковой производительностью 73 Мфлопс [3].

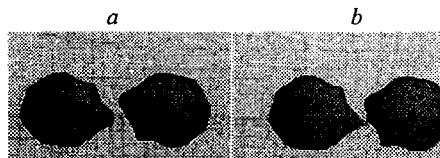


Рис. 2. Столкновение двух объектов: наихудший случай (a), столкновение определено (b)

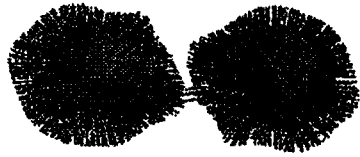


Рис. 3. Столкновение двух пушинок

Можно сделать следующий вывод: в результате работы этого алгоритма столкновение не всегда может быть определено, т. е. алгоритм не гарантирует обнаружения со-

бытия. А также для разных столкновений требуется разное количество времени, сильно различающееся.

**Определение столкновений функционально заданных объектов на основе рекурсивного деления объектного пространства.** Мы предлагаем другой способ определения столкновений, лишенный перечисленных выше недостатков. Этот способ обнаружения столкновений основан на отношении пересечений объектов [5] и рекурсивном делении объектного пространства [6, 7] для поиска точки соприкосновения объектов.

После вычисления пересечения, т. е. применения булевой операции пересечения, поиск точки соприкосновения сталкивающихся объектов осуществляется с помощью рекурсивного деления объектного (модельного) пространства. В предлагаемой работе не делается принципиального различия между столкновением объектов и их взаимопenetрацией. Поэтому достаточно найти хотя бы одну точку (или более), принадлежащую пересечению. Пусть мы имеем дело с объектом-пересечением [5], который обладает свойством отвечать на запрос о пересечении с прямоугольным параллелепипедом или бруском. Отрицательный ответ гарантирует, что данный объект не пересекается и не имеет общих точек с данным бруском, а положительный подразумевает, что, возможно, общие точки существуют. Поиск первой точки, принадлежащей пересечению, осуществляется рекурсивным делением пространства внутри куба, определенного границами  $\pm 1$  по каждой координате. Центр куба совпадает с началом модельной системы координат  $M$  (рис. 4), а плоскость  $Z = -1$  совпадает с экранной плоскостью [6]. На каждом шаге рекурсии исходный объем разбивается на четыре бруска в экранной плоскости по координатам  $X$  и  $Y$  (кватернарный поиск пересечения). Для каждого бруска определяется принадлежность объекту-пересечению. При положительном результате брусок подвергается следующему рекурсивному

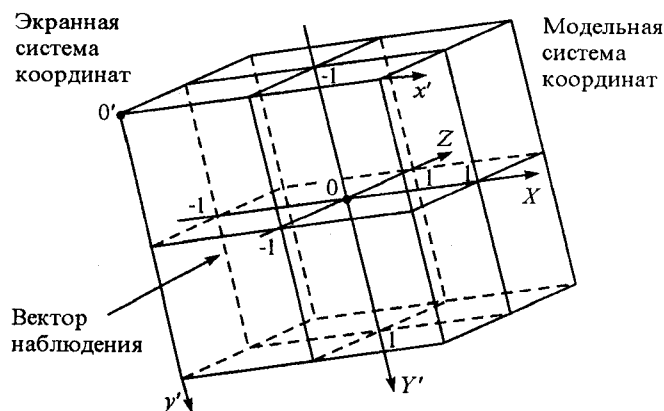


Рис. 4. Модельная система координат, в которой осуществляется деление пространства внутри куба

делению, иначе при отрицательном результате – данный брусок рассматривается как не принадлежащий объекту-пересечению и в дальнейшем не подлежит рекурсивному делению. На некотором шаге деления мы доходим до последнего уровня рекурсии, получая тонкий брусок длиной, равной 2 по оси  $Z$ , проецирующийся в один пиксел экрана. Осью симметрии по оси  $Z$  является луч, который пересекает объект-пересечение в какой-то точке  $Z$  уже определенными значениями  $X$  и  $Y$ . Далее остается определить  $Z$ -координату этой точки для того, чтобы сделать следующее заключение: произошло ли столкновение тестируемых объектов. Для этого следует произвести рекурсивное деление тонкого бруска по оси  $Z$ , осуществляя бинарный поиск, т. е. деля брусок на две части и сначала определяя принадлежность объекту-пересечению ближней половины бруска, а затем, в случае отрицательного ответа, – дальней. На последнем уровне деления по оси  $Z$  находим первую точку, принадлежащую объекту-пересечению, если столкновение объектов произошло.

Данный алгоритм обнаружения столкновений основан на отношении пересечений функционально заданных объектов с применением функций возмущения и рекурсивного деления объектного пространства.

В целях расчета времени обнаружения столкновений тестировались объекты, различающиеся как по степени сложности (форме), так и по виду столкновения (имеется в виду столкновение различными сторонами и частями объектов) (рис. 5). Время вычисления столкновений составило 150 мс на ПК Pentium II (350 МГц, 20 Мфлопс), и разброс времен при тестировании был не более 1% от данного времени.

Для функционального задания объектов с применением функций возмущения [2] тест на пересечение подобен описанному в [6, 7]. Далее докажем это утверждение.

**Критерий наличия нулей аналитической функции в  $\delta$ -окрестности начала координат.** В алгоритмах растрирования путем рекурсивного деления пространства произвольной размерности самым важным является вопрос о пересечении некоторого объекта, заданного в виде неравенства  $f(x, y, z) \geq 0$ , с клеткой деления (квадратом, брусковой окрестностью  $B(P, \delta) = \{X_i; |X_i - P| \leq \delta\}$ ).

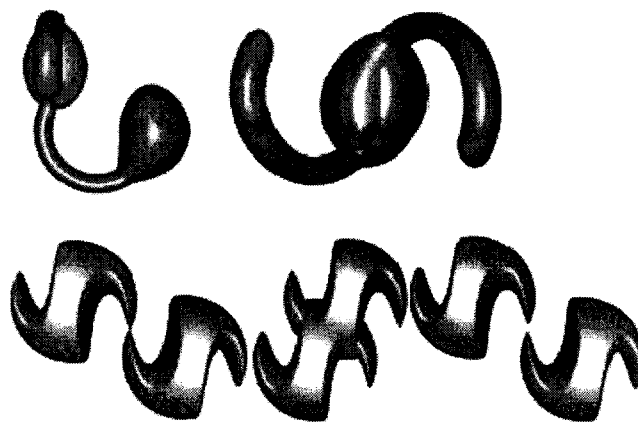


Рис. 5. Определение столкновений и взаимопроникновений функционально заданных объектов с помощью рекурсивного деления объектного пространства

Ясно, что точное решение этой задачи (системы неравенств) возможно только для достаточно простых функций  $f(x, y, z)$ . Даже для функции, разложимой на полиномы в  $B(P, \delta)$  до степени  $n$ , точное решение неприемлемо, так как будет содержать корни  $n$ -й степени.

Однако точное решение для нашего приложения не нужно. Необходимым и достаточным будет ответ на вопрос, есть ли вообще точки контура в окрестности, потому что полное перекрытие и отсутствие пересечения объекта с клеткой решаются простыми неравенствами. Важно отметить, что приближительное решение должно учитывать случай потенциально возможного пересечения и быть асимптотически точным.

Итак, переформулируем задачу как определение множества точек, принадлежащих  $B(0, \delta)$  и при этом удовлетворяющих уравнению  $f(x, y, z) = 0$ .

**О п р е д е л е н и е.**  $\delta$ -окрестностью точки  $P$  метрического пространства называется множество точек  $B(P, \delta) = \{X: \text{dist}(X, P) \leq \delta\}$ . Дальнейшие рассуждения проведем для случая трехмерного пространства, поскольку нас интересует именно этот случай, и манхэттенской метрики  $\text{dist}(X, Y) = \max\{|X|, |Y|\}$ , хотя данные результаты верны и для произвольной размерности и метрики.

**Отыскание решения.** Пусть  $f(x, y, z)$  – аналитическая функция в трехмерном пространстве. Тогда в  $B((0, 0, 0), \delta)$  ее можно разложить в ряд Тейлора. Отбрасывая члены со степенями выше некоторого  $d$ , получим

$$f(x, y, z) = \sum_{0 \leq i, j, k; i+j+k \leq d} f_{ijk} x^i y^j z^k. \quad (5)$$

Перепишем выражение (5) в виде

$$f(x, y, z) = \sum_{h=0}^d f^h(x, y, z), \quad (6)$$

где

$$f^h(x, y, z) = \sum_{h=i+j+k} f_{ijk} x^i y^j z^k. \quad (7)$$

При этом считаем, что выполнено следующее условие:

$$|f(0, 0, 0)| > 0, \quad (8)$$

потому что в противном случае контур содержит в себе начало координат – тривиальный случай.

Рассмотрим неравенство треугольника:

$$|f(x, y, z)| \geq |f^0| - \sum_{h=0}^{h=d} |f^h(x, y, z)| \quad (9)$$

и функцию  $f^i(x, y, z)$ :

$$|f^i(x, y, z)| \leq \sum_{i+j+k=h} |f_{ijk} x^i y^j z^k| \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{i+j+k} |f_{ijk}| \right\} \left\{ \max |x^i y^j z^k| \right\} \leq F_h \varepsilon^h, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon = \text{dist}((x, y, z); (0, 0, 0)) = \max \{|x|, |y|, |z|\}. \quad (11)$$

Таким образом, записывая критерий в пригодном для практического применения виде, имеем следующее неравенство (если оно истинно, то  $f(x, y, z)$  имеет нули в  $B((0, 0, 0), \delta)$ ):

$$\begin{aligned} F(\delta) = F_0 - \sum_{h=1}^d F_h \delta^h \geq 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |f_0| - \sum_{h=1}^d (|f_{0,0,h}| + |f_{0,1,h-1}| + \dots + |f_{h,0,0}|) \delta^h &\geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку в качестве окрестности обычно используется единичная окрестность,  $B((0, 0, 0), \delta = 1)$ , формула сводится к сравнению модуля свободного члена уравнения фигуры (линии или поверхности) с суммой модулей остальных коэффициентов [2, 6, 7].

**Заключение.** Алгоритмы определения столкновений функционально заданных объектов в настоящее время являются предметом научного исследования многих зарубежных исследовательских лабораторий.

В предлагаемой работе проведено исследование алгоритма определения столкновений объектов, заданных аналитическими функциями возмущения с помощью рекурсивного деления объектного пространства. Показаны преимущества этого алгоритма в сравнении с известным алгоритмом определения столкновений функционально заданных объектов, основанным на отношении их пересечения и использовании псевдослучайных последовательностей Соболя и спирального квадратичного поиска для обнаружения неотрицательных величин функции, определяющей пересечение.

Можно сделать следующие выводы: в предложенном алгоритме определения столкновений функционально заданных объектов столкновение всегда определяется и не зависит от взаимного расположения сталкивающихся объектов и частей их поверхностей, т. е. такой алгоритм гарантирует обнаружение события, что доказано экспериментально и теоретически (12); требуется одинаковое количество уровней деления объектного пространства и, следовательно, времени вычисления; временное тестирование с применением известного алгоритма проводилось на параллельной мультипроцессорной вычислительной системе (ОССАМ-2), состоящей из кластера транзьютеров Т805 (73 Мфлопс); время вычислений на базе известного алгоритма составило от 0,03 до 1,07 с [3]; время вычислений с помощью предложенного алгоритма определения столкновений 0,15 с на ПК Pentium II (350 МГц, 20 Мфлопс); столкновение объектов определялось за постоянное время для различной сложности столкновений, разброс времен при тестировании был не более 1 % от данного времени; количество вычислений в предлагаемом алгоритме определения столкновений также меньше.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pasko A. A., Adzhiev V. D., Sourin A. I. et al. Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications // The Visual Computer. 1995. 11, N 6. P. 429.
2. Вяткин С. И., Долговесов Б. С., Есин А. В. и др. Геометрическое моделирование и визуализация функционально заданных объектов // Автометрия. 1999. № 6. С. 84.
3. Savchenko V. V., Pasko A. A. Collision detection for functionally defined deformable objects: The First International Workshop on Implicit Surfaces /Eds. B. Wyvill, M. P. Gascuel. Grenoble: Eurographics-INRIA, 1995. P. 217.
4. Rvachev V. L. On the analytical description of some geometric objects // Reports of Ukrainian Academy of Sciences. 1963. 153, N 4. P. 765.
5. Вяткин С. И., Долговесов Б. С., Каипов Н. Р. Отображение текстуры на плоские и криволинейные поверхности, свободные формы и объемы // Автометрия. 2002. № 1. С. 17.
6. Вяткин С. И., Долговесов Б. С., Чижик С. Е. Синтез виртуальной среды с рекурсивным делением объектного пространства // Тр. 8-й Междунар. конф. «Графикон-98». М.: МГУ, 1998. С. 119.
7. Вяткин С. И., Долговесов Б. С. Синтез поверхностей свертки с рекурсивным делением объектного пространства // Автометрия. 2002. 38, № 4. С. 58.

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,  
E-mail: sivser@mail.ru*

*Поступила в редакцию  
23 января 2003 г.*